CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2024
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 MP.MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

I Étude de l'opérateur différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

Q 1. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X)$ et $P(X+1)$ sont des polynômes à coefficients réels, donc $\Delta(P)$ est un polynôme à coefficients réels et Δ est une application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$. De plus, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda [P(X+1) - P(X)] + [Q(X+1) - Q(X)] \\ &= \lambda \Delta(P) + \Delta(Q), \end{aligned}$$

donc Δ est linéaire, ce qui permet de conclure que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q 2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n , écrivons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, donc

$$\Delta(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left((X+1)^k - X^k\right)$$

et on a $\deg\left((X+1)^k - X^k\right) = k - 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ donc

$$\deg(\Delta(P)) = \deg((X+1)^n - X^n) = n - 1$$

de plus si P est un polynôme constant $(P \in \mathbb{R})$ alors $\Delta(P) = 0$ et $\deg(\Delta(P)) = -\infty$.

Ainsi $\boxed{\deg(\Delta(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \ P \in \mathbb{K} \end{cases}}$.

Q 3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, pour tout $P \in \mathbb{K}_d[X]$ on a $\Delta(P) \leq \deg(P)$ donc $\Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$, le sous espace vectoriel $\mathbb{K}_d[X]$ est donc stable par Δ , ainsi Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

Q 4.

- Soit $d \in \mathbb{N}^*$et $P \in \mathbb{K}_d[X]$

$$P \in \operatorname{Ker}(\Delta_d) \Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = 0$$

Ce qui donne , pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P(k) = P(0)$, ainsi le polynôme $P(X) - P(0)$ admet une infinité de racines , donc il est nul et P est un polynôme constant , par suite $\operatorname{Ker}(\Delta_d) \subset \mathbb{K}_0[X]$.

[1] `https://tinyurl.com/2qyzzrbd`

L'inclusion $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathrm{Ker}\,(\Delta_d)$ est évidente . Donc $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X]}$.

- On a $\dim \mathrm{Ker}\,(\Delta_d) = 1$, le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Im}\,(\Delta_d) = d$.

D'après Q.2 on a $\mathrm{Im}\,(\Delta_d) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$ d'où $\boxed{\mathrm{Im}\,(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]}$.

Q 5.

- On a $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathrm{Ker}\,(\Delta)$. Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(\Delta)$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $P \in \mathbb{K}_d[X]$ donc $P \in \mathrm{Ker}\,(\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X]$ par suite $\mathrm{Ker}\,(\Delta) \subset \mathbb{K}_0[X]$, d'où $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\Delta) = \mathbb{K}_0[X]}$.
- Soit $d \in \mathbb{N}^*$on a $\mathrm{Im}\,(\Delta_d) \subset \mathrm{Im}\,(\Delta)$, donc pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \mathrm{Im}\,(\Delta)$ ainsi $\mathbb{K}[X] \subset \mathrm{Im}\,(\Delta)$ d'où $\boxed{\mathrm{Im}\,(\Delta) = \mathbb{K}[X]}$.
- Soit h une fonction polynomiale , qu'on peut confondre avec le polynôme associé , donc $h \in \mathrm{Im}\,(\Delta)$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = h(X)$, ainsi l'équation (E_h) admet une solution .

Si Q sont une autre solution de (E_h) ,alors $P - Q \in \mathrm{Ker}\,(\Delta)$ par suite il existe une constante c telle que $Q = P + c$.

On conclus que (E_h) admet une infinité de solutions polynomiales .

Q 6. Si P une solution polynomiale de (E_h) avec $h : x \mapsto x$; donc $P(X+1) - P(X) = X$, forcement on a $\deg P = 2$. Posons $P(X) = aX^2 + bX + c$, donc

$$P(X+1) - P(X) = a(2X+1) + b = X$$

ce qui donne

$$a = -b = \frac{1}{2}$$

Ainsi les solutions polynomiales de l'équation (E_h) sont de la forme $\boxed{P(X) = \frac{1}{2}X(X-1) + c \ , \ c \in \mathbb{K}}$.

Q 7. Soit $d \in \mathbb{N}^*$et $k \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\deg \Delta_d(X^k) = k - 1 \ , \deg \Delta_d^2(X^k) = k - 2, ..., \deg \Delta_d^{k-1}(X^k) = 1 \text{ et } \deg \Delta_d^k(X^k) = 0$$

donc le polynôme $\Delta_d^k(X^k)$ est constant et $\Delta_d^{k+1}(X^k) = 0$.

Ainsi pour tout $k \in [\![1, d]\!]$ $\Delta_d^{d+1}(X^k) = 0$, ce qui signifie que $\boxed{\Delta_d^{d+1} = 0_{\mathbb{K}_d[X]}}$ et X^{d+1} est unpolynôme annulateur de Δ_d .

Si $d \geq 2$ alors l'endomorphisme Δ_d est nilpotent et non nul donc non diagonalisable .

Si $d = 1$, $\Delta_d = 0$ donc il est diagonalisable .

II Fonctions entières

On note ω l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0, 1]$, par $\omega(t) = \mathrm{e}^{2i\pi t}$ et$\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développables en série entière de rayon de convergence infini.

II.A - Généralités

Q 8. Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, posons pour tout z dans $\mathbb{C}$: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

- On a pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $Rcv(\sum(\lambda a_n + \mu b_n) z^n) \geq \min(Rcv(\sum a_n z^n), Rcv(\sum b_n z^n)$, donc $Rcv(\sum(\lambda a_n + \mu b_n) z^n) = +\infty$ et pour tout z dans $\mathbb{C}$ $(\lambda f + \mu g)\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$, d'où $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}$.

- Posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, pour tout z dans $\mathbb{C}$ les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument,

le théorème du produit de Cauchy de deux séries assure que $\sum c_n z^n$ converge absolument et de somme $f(z)g(z)$, donc fg est développable en série entière de rayon de convergence infini ce qui donne $fg \in \mathcal{E}$.

Q 9. Soit $f \in \mathcal{E}$ et $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$:

Pour $k \in \mathbb{Z}$ on a : $f(\omega(t))\omega(t)^{-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega(t)^{n-k}$. Comme $\left|a_n \omega(t)^{n-k}\right| = |a_n|$ et $\sum |a_n|$ converge alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n \omega(t)^{n-k}$ converge normalement et uniformément sur $[0,1]$, le théorème d'intégration des séries de fonctions permet l'intervertir les symboles $\sum$ et $\int$, ainsi

$$\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega(t)^{n-k}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 \omega(t)^{n-k} dt$$

et on a $\int_0^1 \omega(t)^{n-k} dt = \begin{cases} a_k & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, donc

$$\boxed{\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\, dt = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

II. B- Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1}\, dt$$

Q 10. Pour tout $t \in [0,1]$ on a $|\omega(t)| = 1$ donc $\omega(t) \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ et $\mathrm{e}^{\omega(t)} \neq 1$, ainsi la fonction $t \mapsto \frac{\omega(t)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)}-1}$ est définie et continue sur $[0,1]$, ce qui prouve que I_p est bien définie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Q 11. Soit $\zeta \in \mathbb{U}$, on a

$$\mathrm{e}^{\zeta} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n!} = \zeta(1 + \zeta \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta^{n-2}}{n!})$$

et

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta^{n-2}}{n!} \right| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{\zeta^{n-2}}{n!} \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

posons $C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 2 \in]0,1[$ et $\beta : z :\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$, on a donc pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\zeta} - 1 = \zeta(1 + \zeta\beta(\zeta)) \quad et \quad |\beta(\zeta)| \leqslant C}$$

Q 12. Soitt $\zeta \in \mathbb{U}$ et $p \in \mathbb{Z}$, d'après la question précédente on a

$$\frac{\zeta^p}{e^\zeta - 1} = \frac{\zeta^{p-1}}{1+\zeta\beta(\zeta)}$$

avec $|\zeta\beta(\zeta)| \leqslant C < 1$ donc

$$\boxed{\frac{\zeta^p}{e^\zeta - 1} = \zeta^{p-1}\sum_{j=0}^{+\infty}(-\zeta\beta(\zeta))^j = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\zeta^{j+p-1}\beta(\zeta)^j}$$

Q 13. Soit $p \in \mathbb{N}$,on a

$$I_p = \int_0^1 \omega(t) \ \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\omega(t)^{j+p-1}\beta(\omega(t))^j dt$$

et pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, $\left|(-1)^j\omega(t)^{j+p-1}\beta(\omega(t))^j\right| \leq C^j$ donc la série de fonctions $\sum\limits_j(-1)^j\omega(t)^{j+p-1}\beta(\omega(t))^j$ converge normalement et uniformément sur $[0,1]$, le théorème d'intégration des séries de fonctions permet d'écrire

$$I_p = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\left(\int_0^1 \omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j dt\right)$$

d'après Q.8 on a pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction $\beta^j \in \mathcal{E}$, la question Q.9 donne

$$\int_0^1 \omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j dt = \begin{cases} 1 & \text{si } \ p=j=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $I_0 = 1$ et $I_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

III Polynômes de Bernoulli

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) = n!\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{\left(e^{\omega(t)}-1\right)\omega(t)^{n-1}}\ dt$$

III. A - Lien avec l'équation (E_h)

Q 14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a

$$B_n(z) = n!\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1}\ dt$$

comme dans la question Q.12 on a pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1}\right| &= \left|\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\omega(t)^{j+k-n}\beta(\omega(t))^j\right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}C^j \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left|\frac{\omega(t)^{k-n+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)}-1}\right| \leq \frac{1}{1-C} \quad ,\forall t\in[0,1]} \qquad (Q.14\ \ 1)$$

par suite $\left|\frac{z^k}{k!}\frac{\omega(t)^{k-n+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)}-1}\right| \leq \frac{1}{1-C}\frac{|z|^k}{k!}$ ce qui prouve la convergence normale et uniforme de la série $\sum\limits_k \frac{z^k}{k!}\frac{\omega(t)^{k-n+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)}-1}$ sur $[0,1]$, le théorème d'intégration des séries de fonctions permet d'écrire

$$B_n(z) = n!\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\left(\int_0^1 \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)}-1}\ dt\right) = n!\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}I_{k-n}$$

d'après Q.13 $I_{k-n}=0$ si $k\geq n+1$, ainsi

$$\boxed{B_n(z) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}I_{k-n}} \qquad (Q.14\ \ 2)$$

Le polynôme B_n s'écrit alors

$$B_n(z) = n!\left(\frac{z^n}{n!}I_0+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}I_{-1}...\right) = z^n+...$$

donc B_n est unpolynôme unitaire de degré n.

Q 15.

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
B_n' &= n!\sum_{k=1}^{n}k\frac{X^{k-1}}{k!}I_{k-n}\\
&= n!\sum_{k=1}^{n}\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}I_{k-1-(n-1)}\\
&= n\left((n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{X^k}{k!}I_{k-(n-1)}\right)\\
&= nB_{n-1}
\end{aligned}$$

- Autre méthode :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et la fonction $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times[0,1] & \to & \mathbb{C}\\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x\omega(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\omega(t)}-1\right)\omega(t)^{n-1}}\end{array}\right.$, on a f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\omega(t)f(x,t)$.

Soit $a>0$, l'inégalité (Q.14.1) donne pour tout $x\in[-a,a]$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{\mathrm{e}^{x\cos(2\pi t)}}{1-C} \leq \frac{\mathrm{e}^a}{1-C} \quad (1)$$

Puisqu'on intègre sur le segment $[0,1]$,les fonctions constantes sont intégrable $[0,1]$, donc (1) est une relation de domination, le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre assure que B_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$, pour tout $a>0$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
B_n'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt\\
&= n!\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\omega(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\omega(t)}-1\right)\omega(t)^{n-2}}\ dt\\
&= nB_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

On a $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ donc $\boxed{B_n' = nB_{n-1}}$.

Q 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} B_n(z+1) - B_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{(z+1)\omega(t)} - \mathrm{e}^{z\omega(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1\right)\omega(t)^{n-1}} \, dt \\ &= n! \int_0^1 \omega(t)^{1-n} \mathrm{e}^{z\omega(t)} \, dt \end{aligned}$$

la question Q.9 donne

$$\int_0^1 \omega(t)^{1-n} \mathrm{e}^{z\omega(t)} \, dt = \int_0^1 \omega(t)^{1-n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \omega(t)^k \right) dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

d'où

$$\boxed{B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}} \tag{Q.16 1}$$

Q 17. Soit $h : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $z^k = \frac{1}{k+1} \left(B_{k+1}(z+1) - B_{k+1}(z) \right)$ donc

$$h(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z+1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z)$$

Ce qui donne une solution polynomiale de (E_h) sur $\mathbb{C}$ définie par $\boxed{f : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z)}$, les autres solutions sont de la forme $f + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.

III. B - Unicité

Q 18.

- Montrons que les polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les relations

$$\begin{cases} 1) & B_0 = 1 \\ 2) & \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n' = nB_{n-1} \\ 3) & \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^1 B_n(t) dt = 0 \end{cases}$$

De la relation (Q.14.2) on a $B_0 = I_0 = 1$.
La question Q.15 donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$ donc $\int_0^1 B_n(t) dt = n \left(B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) \right)$ et la relation (Q.16 .1) asure que $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$.
Ainsi $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les relations 1) 2) et 3) .

- Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui vérifient les relations 1) 2) et 3) . Montrons par récurrence que $P_n = B_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

On a $P_0 = B_0 = 1$, supposons que c'est vrai pour $n \geq 1$ et montrons le pour $n+1$.
La relation 2) donne $P_{n+1}' = (n+1)P_n$, par hypothèse récurrence on a $P_n = B_n$ donc $P_{n+1}' = B_{n+1}'$, ce qui signifie que $P_{n+1} = B_{n+1} + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.
De la relation 3) on a $\int_0^1 B_{n+1}(t) dt = \int_0^1 P_{n+1}(t) dt = 0$ donc $c = 0$ et $P_{n+1} = B_{n+1}$.
Ainsi $P_n = B_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

D'où $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes qui vérifient les relations 1) 2) et 3).

Q 19. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrons que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions 1) 2) et 3) de la question précédente .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

- $H_0(X) = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$
- $H_n'(X) = (-1)^{n+1} B_n'(1-X) = n(-1)^{n+1} B_{n-1}(1-X) = nH_{n-1}(X)$.
- $\displaystyle\int_0^1 H_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)dt \overset{1-t=u}{=} (-1)^n \int_0^1 B_n(u)du = 0$.

d'après Q.18 on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n = B_n$.

III. C - Une application analytique

Soit ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit de plus u la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,t) = \psi(x)\mathrm{e}^{tx}$.

Q 20. Pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{1}{\psi(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$,qui est une série entière de rayon de convergence $+\infty$, cette relation est aussi valable pour $x = 0$. Donc $\dfrac{1}{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de plus elle ne s'annule pas, ce qui prouve que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que u est infiniment dérivable par rappoet à x et par rapport à t et ses dérivées partielles sont continues , donc u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q 21. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = xu(x,t)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par application de la formule de Leibniz on trouve

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + \binom{n}{1}\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t)$$

u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwartz permet donc d'écrire : $\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right) = \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x,t)\right)$, ce qui donne

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x,t)\right) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t)} \qquad \text{(Q.21 1)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n(t) = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)$.

Q 22. Montrons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes qui vérifient les conditions 1) 2) et 3) de la question Q.18 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a $A_0(t) = u(0,t) = 1$.
- D'après (Q.21 1) on a pour $x = 0$, $A_n'(t) = nA_{n-1}(t)$.

De cette relation, on déduit, par récurrence , que A_n est un polynôme .

- Pour $x \neq 0$ calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)dt$.

La fonction u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ donc les dérivées partielles $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}$ sont bornées sur tout compact $[a,b]\times[0,1]\subset\mathbb{R}\times[0,1]$ donc la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^1 u(x,t)dt$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(\int_0^1 u(x,t)dt)=\int_0^1\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)dt$$

donc

$$\int_0^1\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)dt=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\psi(x)\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}dt\right)=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\psi(x)\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)=0$$

par continuité en 0 on a

$$\int_0^1\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)dt=0$$

ainsi $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)dt=0$.
Ce qui prouve donc que pour tout $n\in\mathbb{N},\ A_n=B_n$.

IV Solution entière de l'équation (E_h)

IV.A - Une inégalité de contrôle

Soit $\mathcal{P}$ la proposition : $\exists c>0,\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\mathbb{C},(|z|=(2n+1)\pi\Rightarrow|e^z-1|\geqslant c)$
On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse.
Q 23. $\mathcal{P}$ est fausse donc $\forall c>0,\exists n\in\mathbb{N},\exists z\in\mathbb{C}$ tels que $(|z|=(2n+1)\pi$ et $|e^z-1|<c)$
Soit $p\in\mathbb{N}^*$, prenons $c=\dfrac{1}{p}$ alors $\exists n_p\in\mathbb{N}$ et$\exists z_p\in\mathbb{C}$ tels que $(|z_p|=(2n_p+1)\pi$ et $|e^{z_p}-1|<\dfrac{1}{p})$ **,** ce qui donne

$$\boxed{\mathrm{e}^{z_p}\underset{p\to+\infty}{\to}1 \text{ et } \forall p\in\mathbb{N}\ ,|z_p|=(2n_p+1)\,\pi}$$

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on note $a_p=\mathrm{Re}\,(z_p)$ et $b_p=\mathrm{Im}\,(z_p)$.
Q 24.

- On a $\mathrm{e}^{z_p}\underset{p\to+\infty}{\to}1$ donc $|\mathrm{e}^{z_p}|\underset{p\to+\infty}{\to}1$, comme $\mathrm{e}^{z_p}=\mathrm{e}^{a_p}\mathrm{e}^{ib_p}$ alors $\mathrm{e}^{a_p}\underset{p\to+\infty}{\to}1$ ce qui signifie que $\boxed{a_p\underset{p\to+\infty}{\to}0}$.
- D'après l'inégalité triangulaire on a $\forall p\in\mathbb{N},||z_p|-|b_p||\leq|z_p-ib_p|=|a_p|$,ce qui donne $\boxed{|z_p|-|b_p|\underset{p\to+\infty}{\to}0}$.

Q 25. Soit $\varepsilon_p=\begin{cases}+1 \text{ si } b_p\geqslant 0\\ -1 \text{ si } b_p<0\end{cases}$.

- D'une part on a $\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_p|z_p|)=\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_p(2n_p+1)\,\pi)=-1$, donc

$$\exp(z_p-\mathrm{i}\varepsilon_p|z_p|)=-\exp(z_p)\underset{p\to+\infty}{\to}-1\quad(1)$$

- D'autre part, pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\exp(z_p-\mathrm{i}\varepsilon_p|z_p|)=\exp(a_p+\mathrm{i}\ (b_p-\varepsilon_p|z_p|))=\exp(a_p+\mathrm{i}\ \varepsilon_p(\varepsilon_p b_p-|z_p|))$$

comme $\varepsilon_p b_p=|b_p|$ alors

$$\exp(z_p-\mathrm{i}\varepsilon_p|z_p|)=\exp(a_p+\mathrm{i}\ \varepsilon_p(|b_p|-|z_p|))$$

or $a_p \underset{p\to+\infty}{\to} 0$ et $|z_p| - |b_p| \underset{p\to+\infty}{\to} 0$ donc $\exp\left(z_p - \mathrm{i}\varepsilon_p |z_p|\right) \underset{p\to+\infty}{\to} 1$, ce qui contredit (1) .

- La supposition du départ est fausse donc

$$\boxed{\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, (|z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |e^z - 1| \geqslant c)} \qquad \text{(Q.25 1)}$$

IV.B - Une solution à (E_h)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$ et $z \in \mathbb{C}$, posons

$$\gamma_n(t) : (2n+1)\pi\omega(t) \text{ et } Q_n(z) = n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\gamma_n(t)^{n-1}}\, dt$$

Q 26. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, notons $g(t,z) = \dfrac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\gamma_n(t)^{n-1}}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi$ et $\gamma_n(t) \in \mathbb{C}\backslash(2i\pi\mathbb{Z})$, donc la fonction $g : (t,z) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1\right)\gamma_n(t)^{n-1}}$ est définie et continue sur $[0,1] \times \mathbb{C}$. La fonction Q_n est donc bien définie et on a

$$g(t,z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \gamma_n(t)^{k-n+1}}{k!\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t)$$

Les fonctions φ_k sont, définies et continues, donc intégrables sur $[0,1]$.
D'après (Q.25 1) il existe $c > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\left|\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right| \geqslant c$, ce qui donne

$$\int_0^1 |\varphi_k(t)|\, dt \leq \frac{|z|^k\left((2n+1)\pi\right)^{k-n+1}}{k!\ c} \qquad \text{(Q.26 1)}$$

donc la série $\displaystyle\sum_k \int_0^1 |\varphi_k(t)|\, dt$ converge , d'après le théorème d'intégration d'une série de fonctions, sur un intervalle quelconque, on peut intervertir les symboles $\sum$ et $\int$ et on obtient :

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t)\right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 \varphi_k(t) dt\right)$$

donc

$$\boxed{Q_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n!}{k!}\int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1}\, dt\right) z^k} \qquad \text{(Q.26 2)}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{E}$.

Q 27. On a

$$\begin{aligned} Q_n(z+1) - Q_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{(z+1)\gamma_n(t)} - \mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\gamma_n(t)^{n-1}} dt \\ &= n! \int_0^1 \gamma_n(t)^{1-n}\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}\, dt \end{aligned}$$

la question Q.9 donne

$$\int_0^1 \gamma_n(t)^{1-n}\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}\, dt = \left((2n+1)\pi\right)^{1-n}\int_0^1 \omega(t)^{1-n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left((2n+1)\pi z\right)^k}{k!}\omega(t)^k\right) dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \quad Q_n(z+1) - Q_n(z) = nz^{n-1}}$$

Q 28. D'après (Q.25 1) il existe $c > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\left|e^{\gamma_n(t)} - 1\right| \geqslant c$, donc

$$|Q_n(z)| \leq n! \int_0^1 \left| \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{\left(e^{\gamma_n(t)} - 1\right) \gamma_n(t)^{n-1}} \right| \, dt \leq \frac{n!}{c\left((2n+1)\pi\right)^{n-1}} \int_0^1 \left|e^{z\gamma_n(t)}\right| dt$$

on a $\dfrac{n!}{\left((2n+1)\pi\right)^{n-1}} \leq 1$ et $\left|e^{z\gamma_n(t)}\right| = e^{\mathrm{Re}(z\gamma_n(t))}$, comme $|\mathrm{Re}(z\gamma_n(t))| \leq |z\gamma_n(t)|$ et $|\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi$ alors $\left|e^{z\gamma_n(t)}\right| \leq e^{3\pi n|z|}$.

Ainsi il existe $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $\boxed{|Q_n(z)| \leqslant a e^{b\ n\ |z|}}$.

Q 29.

- Soit $h \in \mathcal{E}$, écrivons pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et on a $(n+1)z^n = Q_{n+1}(z+1) - Q_{n+1}(z)$

donc

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(Q_{n+1}(z+1) - Q_{n+1}(z)\right)$$

comme $|Q_n(z)| \leqslant a e^{bn|z|}$ et $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence infinie alors $\sum \frac{a_n}{n+1} Q_{n+1}(z)$ converge pout tout $z \in \mathbb{C}$, posons $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} Q_{n+1}(z)$,elle vérifie $f(z+1) - f(z) = h(z)$, donc f est solution de (E_h) .

- Montrons que $f \in \mathcal{E}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} Q_{n+1}(z) \text{ et } Q_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n!}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} \, dt \right) z^k$$

écrivons $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} U_{n,k}$, avec $U_{n,k} = \frac{a_n\ n!\ z^k}{(n+1)k!} \displaystyle\int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} \, dt.$

Pour intervertir les deux symboles $\sum$, dans l'expression de f, on doit montrer que la famille $(U_{n,k})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable .

On a

$$\begin{aligned} |U_{n,k}| &\leq \frac{|a_n|\, n!\, |z|^k \left((2n+1)\pi\right)^{k-n+1}}{(n+1)k!\ c} \\ &\leq \frac{|a_n|\, |z|^k \left((2n+1)\pi\right)^k}{k!\ c} \quad \left(\text{car } \tfrac{n!}{(n+1)((2n+1)\pi)^{n+1}} \leq 1\right) \end{aligned}$$

donc pour n fixé dans $\mathbb{N}$ la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} U_{n,k}$ converge et

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |U_{n,k}| \leq \frac{|a_n|}{c} e^{|z|(2n+1)\pi}$$

et la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|\, e^{2|z|n\pi}$ converge donc $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n$ et $(U_{n,k})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$est sommable .

On peut écrire alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} U_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{(n+1)} \int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} \, dt \right) \frac{z^k}{k!}.$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{E}$.