CCINP — PSI* — 2023

Exercice — Fonction de Bessel, intégrales de Wallis

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $W_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \cos(x\sin(t))$ est continue sur le segment $[0,\pi]$, donc $f(x)$ est bien définie.

Q2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.
Pour tout $t \in [0,\pi]$, la fonction $x \longmapsto \cos(x\sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, les fonctions

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(x\sin(t))\big) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) \qquad \& \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\cos(x\sin(t))\big) = -\sin^2(t)\cos(x\sin(t))$$

sont continues (p.m.) sur $[0,\pi]$ par rapport à t et dominées par la fonction constante égale à 1, qui est intégrable sur $[0,\pi]$. Il s'ensuit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$f'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \qquad \& \qquad f''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Q3. La fonction définie par $h(x,t) = \cos(t)\sin(x\sin(t))$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée et produit de fonctions qui le sont. Elle admet en particulier une dérivée partielle première par rapport à t donnée pour tout (x,t) par

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos^2(t)\cos(x\sin(t)).$$

Q4. On déduit des deux questions précédentes que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} xf''(x) + f'(x) + xf(x) &= -\int_0^\pi x\sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi x\cos(x\sin(t)) \\ &= \int_0^\pi \big[x\cos^2(t)\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t))\big]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t = h(x,\pi) - h(x,0) = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, f est solution de $(\mathbf{E})\colon xy'' + y' + xy = 0$.

Q5. Soit, à supposer qu'elle existe, une série entière $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E})$. En reportant dans $(\mathbf{E})$, il vient

$$\begin{aligned} xy''(x) + y'(x) + xy(x) &= x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \big[n(n-1)a_n + na_n + a_{n-2}\big]x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \big[n^2 a_n + a_{n-2}\big]x^{n-1}. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence étant infini, le développement en série entière est unique et l'écriture ci-dessus équivalente à

$$a_1 = 0 \qquad \& \qquad \forall n \geqslant 2\colon a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

Q6. En développant le cosinus en série entière, il vient, sous réserve de validité de la permutation série-intégrale,

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{W_n}{(2n)!}\, x^{2n}.$$

Pour justifier l'interversion, on a l'embarras du choix.

• Le plus simple est de noter que, pour $t \in [0, \pi]$ et $x \in \mathbb{R}$, l'on a $|x \sin t| \leqslant |x|$. Or, la série entière définissant cosinus est uniformément convergente sur tout segment donc la série intégrée converge uniformément ce qui, sur un segment, est une condition suffisante d'interversion.

• On peut aussi utiliser le théorème d'interversion en notant que

$$\int_0^\pi \left|(-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi x^{2n}}{(2n)!},$$

terme général du DSE convergent de $\pi \operatorname{ch}(x)$.

• À t et x fixés, la suite $\left(\dfrac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}\right)_n$ est clairement décroissante à partir d'un certain rang, le quotient des termes d'indices respectifs $n+1$ et n valant $\dfrac{x^2 \sin^2 t}{(2n+1)(2n+2)}$ et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées et majorer le reste

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}\right| \leqslant \frac{\sin^{2N}(t) x^{2N}}{(2N)!} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

comme terme général du DSE convergent de $\operatorname{ch}(x \sin t)$. Cela remontre la convergence uniforme de la série.

Q7. La suite obtenue à la question Q5. est unique et donne une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$. Il y a ainsi au plus une solution de (**E**) développable en série entière de coefficient constant fixé. Comme f est bien une solution de (**E**) développable en série entière vérifiant $f(0) = \pi$, c'est la seule.

Q8. Il reste à identifier le DSE de f et la série obtenue à la question Q5. C'est possible sans vérification du fait que le rayon de convergence de la série entière obtenue est non nul, puisque la série entière obtenue à la question Q6 converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc est de rayon de convergence infini. L'identification avec l'expression de a_n en fonction de W_n donne ainsi

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{4n^2} = \cdots = \frac{(-1)^n}{4^n\, n!^2}\, a_0 = \frac{(-1)^n}{4^n\, n!^2}\, \pi = (-1)^n \frac{W_n}{(2n)!} \qquad \therefore \qquad W_n = \frac{\pi}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

On aurait pu bien sûr aussi obtenir le rayon directement sur la série obtenue en Q5 : la relation de récurrence donne

$$\forall x > 0\colon \left|\frac{a_{2n} x^{2n}}{a_{2n-2} x^{2n-2}}\right| = \frac{x^2}{4n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

La règle de d'Alembert montre que la série ainsi obtenue est de rayon de convergence infini, ce qui valide le calcul effectué à la question Q5 indépendamment du calcul de la question Q6.

Problème 1 — Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Partie I — Un développement en série entière

Q9. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Alors, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1. Son DSE est donné par la formule

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Q10. En particulier, pour $\alpha = -1/2$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \times \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n\, n!} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.\end{aligned}$$

Partie II — Probabilité du retour à l'origine

Q11. Soit $t \in \mathbb{N}^*$. Alors, $Y_t = (X_t + 1)/2$ prend la valeur 1 avec la probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $1-p$, soit $Y_t \sim \mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli). Comme les v.a. $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes, les v.a. $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ le sont également (lemme des coalitions) et $\sum_{t=1}^{n} Y_t$ est une somme de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(t)$ donc $\sum_{t=1}^{n} Y_t \sim \mathcal{B}(n,p)$, loi binomiale de paramètres (n,p).

Q12. Par définition de S_n,

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t = \sum_{t=1}^{n}(2Y_t - 1) = 2\sum_{t=1}^{n} Y_t - n \qquad \therefore \qquad (S_n = 0) = \left(\sum_{t=1}^{n} Y_t = \frac{n}{2}\right).$$

Une loi binomiale ne prenant que des valeurs entières, il vient

$$u_n = \mathbf{P}(S_n = 0) = \begin{cases} \dbinom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q13. Appliquons la formule de Stirling.

$$u_{2n} = \binom{2n}{n}\big(p(1-p)\big)^n \sim \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n} \times \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{2n} \times \frac{1}{2\pi n} \times \big(p(1-p)\big)^n = \frac{\big(4p(1-p)\big)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

La fonction $p \mapsto 4p(1-p)$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en $p = \dfrac{1}{2}$, où elle vaut 1. On a donc $0 \leqslant u_{2n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, cela valant pour tout $p \in [0,1]$. La probabilité de se trouver à l'origine à la date $2n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Partie III — Nombre de passages par l'origine

Q14. Par définition, $O_{2j} = \mathbb{1}_{(S_{2j}=0)}$. La variable aléatoire $T_n = \sum_{j=0}^{n} O_{2j}$ dénombre les retours en 0 entre l'instant d'origine et l'instant $2n$. Comme $O_0 = 1$, elle est à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

Q15. D'après la question 12, $\mathbf{P}(O_{2j} = 1) = u_{2j} = \dbinom{2j}{j}\big(p(1-p)\big)^j$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}(O_{2j} = 1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}\big(p(1-p)\big)^j.$$

Q16. On suppose que $p \neq 1/2$. En utilisant le calcul fait à la question 10, il vient

$$\lim \mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j}\big(p(1-p)\big)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j}\big(4p(1-p)\big)^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$$

en notant que $4p(1-p) < 1$, ce qui valide l'utilisation du DSE. Ainsi, cette limite est finie, ce qui signifie qu'en moyenne, on repasse un nombre fini de fois par l'origine.

Q17. On suppose que $p = 1/2$. Montrons par récurrence simple sur n que $\mathbf{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$. Pour $n = 0$, $T_n = O_0 = 1$ et la formule donne bien $\mathbf{E}(T_0) = 1$. Supposons la formule vraie pour n. Alors,

$$\mathbf{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\left(\frac{4(n+1)^2}{2n+2} + 1\right) = \frac{2n+3}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}.$$

On reprend le calcul de la question Q13 en notant que

$$\mathbf{E}(T_n) = (2n+1)u_{2n} \sim \frac{2n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

On repasse ainsi en moyenne une infinité de fois par l'origine.

Problème 2 — Puissances de matrices, limites de suites matricielles

Partie I — Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Q18. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $M(a,b)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Q19. On calcule $M(a,b)V = \big(b + (n-1)a\big)V$.

Q20. On pourrait obtenir directement $P_{1,0}$ par un calcul de déterminant, mais il est plus rapide de remarquer que $M(1,0) + I_n$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1, qui est de rang 1. Comme $M(1,0)$ est de plus diagonalisable (question Q18), cela montre que -1 est valeur propre de $M(1,0)$ de multiplicité exactement $n-1$. Comme $n-1 \neq -1$ est aussi valeur propre de $M(1,0)$ (question Q19), elle est valeur propre simple (la somme des dimensions des espaces propres vaut n) et $P_{0,1} = \big(X - (n-1)\big)(X+1)^{n-1}$.

Q21. On suppose que $a \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{C}$. Par définition du polynôme caractéristique et n-linéarité du déterminant,

$$P_{a,b}(x) = \det\big(xI_n - M(a,b)\big) = \det\big((x-b)I_n - aM_{1,0}\big) = a^n \det\left(\frac{x-b}{a} I_n - M_{1,0}\right) = a^n P_{1,0}\left(\frac{x-b}{a}\right) \qquad \therefore$$

$$P_{a,b} = a^n \left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a} + 1\right)^{n-1} = \big(X - b - (n-1)a\big)(X-b+a)^{n-1}.$$

Ainsi, $M(a,b)$ admet deux valeurs propres, $b + (n-1)a$, d'ordre 1, et $b-a$, d'ordre $n-1$.

Q22. Pour $Q_{a,b} = \big(X - (b-a)\big)\big(X - (b + (n-1)a)\big)$, on calcule

$$\begin{aligned} Q_{a,b}(M(a,b)) &= \big(M(a,b) - (b-a)I_n\big)\big(M(a,b) - (b+(n-1)a)I_n\big) \\ &= \big(aM(1,0) + aI_n\big)\big(aM(1,0) - (n-1)aI_n\big) = a^2 Q_{1,0}(M(1,0)). \end{aligned}$$

Si $a \neq 0$, $Q_{a,b} = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M(a,b))} (X - \lambda)$. En particulier est-ce le cas pour $(a,b) = (1,0)$. Or, $M(1,0)$ est diagonalisable par Q18 et est donc annulé par $Q_{1,0}$. Il s'ensuit que $Q_{a,b}\big(M(a,b)\big) = 0$, que a soit nul ou pas. Si $a \neq 0$, il s'ensuit aussi que $M(a,b)$ est diagonalisable. Si $a = 0$, $M(0,b) = bI_n$ est diagonale, donc diagonalisable.

Q23. On suppose que $a \neq 0$. Comme $\deg(Q_{a,b}) = 2$, la division euclidienne donne $X^k = A_k Q_{a,b} + R_k$ avec $R_k = u_k X + v_k$, $(u_k, v_k) \in \mathbb{C}^2$. En affectant à l'indéterminée X les valeurs $b-a$ et $b + (n-1)a$, qui sont les racines de $Q_{a,b}$, il vient $R_k(b-a) = (b-a)^k$ et $R_k(b + (n-1)a) = (b + (n-1)a)^k$. La résolution du système linéaire donne

$$R_k = \frac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{na} X + \frac{(b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)}{na}.$$

En substituant cette fois $M(a,b)$ à X, il vient

$$M(a,b)^k = R_k(M(a,b)) = \frac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{na} M(a,b) + \frac{(b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)}{na} I_n.$$

Q24. Si $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$, on peut passer à la limite dans l'expression ci-dessus. Il vient $\displaystyle\lim_{k\to\infty} M(a,b)^k = 0$.

Partie II — Limite des puissances d'une matrice

Q25. La première colonne de la matrice donne $u(e_1) = \lambda_1 e_1$, d'où $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\|u^k(e_1)\| = |\lambda_1|^k \|e_1\|$ (la norme n'étant pas précisée, rien ne dit que les vecteurs de la base canonique sont de norme 1). Comme $|\lambda_1| < 1$ par hypothèse, il vient $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{k\to\infty} u^k(e_1) = 0$.

Q26. L'hypothèse selon laquelle $\displaystyle\lim_{k\to\infty} u^k(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, i]\!]$ est vérifiée pour $i = 1$ d'après la question 25. La matrice T est triangulaire supérieure, donc $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i+1})$ est stable par u. Plus précisément, la $i+1^{\text{ème}}$ colonne de la matrice donne $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x$ avec $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$. Montrons maintenant par récurrence simple sur k la formule

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

Pour $k=1$, cette formule n'est autre que $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$, ce qui vient d'être établi. Supposons la formule vérifiée à l'ordre k. Alors,

$$\begin{aligned} u^{k+1}(e_{i+1}) = u\big(u^k(e_{i+1})\big) &\overset{(\mathrm{HR}(k))}{=} \lambda_{i+1}^k u(e_{i+1}) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^{m+1}(x) \\ &\overset{(\mathrm{HR}(1))}{=} \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \lambda_{i+1}^k x + \sum_{m=1}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x) = \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x), \end{aligned}$$

ce qui établit la formule à l'ordre $k+1$.

Q27. Commençons par remarquer que, par hypothèse, $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$ et que $\lim\limits_{m\to\infty} u^m(e_t) = 0$ pour tout $t \in [\![1, i]\!]$. Par linéarité de la limite, on a donc $\lim\limits_{m\to\infty} u^m(x) = 0$. L'inégalité triangulaire donne

$$r_{i,k}(x) = \left\| \sum_{m=0}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x) \right\| \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|.$$

La convergence de la suite $\big(u^m(x)\big)_m$ assure qu'elle est bornée ; il existe donc un réel $A > 0$ tel que $\|u^m(x)\| \leqslant A$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Soit $k' \in [\![2, k-2]\!]$. On peut poursuivre la majoration

$$\begin{aligned} 0 \leqslant r_{i,k}(x) &\leqslant \sum_{m=0}^{k'-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| + \sum_{m=k'}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \\ &\leqslant k' |\lambda_{i+1}|^{k-k'} A + \max_{k' \leqslant m \leqslant k-1} \|u^m(x)\| \sum_{m=k'}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \\ &\leqslant k' |\lambda_{i+1}|^{k-k'} A + \max_{k' \leqslant m \leqslant k-1} \|u^m(x)\| \times \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|} \end{aligned}$$

Pour $k' = \lfloor k/2 \rfloor$, on obtient une majoration en

$$\mathcal{O}\big(k|\lambda_{i+1}|^{k/2}\big) + \mathcal{O}\left(\max_{\lfloor k/2 \rfloor \leqslant m \leqslant k} \|u^m(x)\| \right),$$

quantité qui tend vers 0 quand k tend vers l'infini par croissances comparées. Corrélativement, la formule de la question 26 montre que $u^k(e_{i+1})$ est la somme de deux termes de limite nulle, donc est de limite nulle.

Q28. Matriciellement, $\lim\limits_{k\to\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$ se traduit par $\lim C_{i+1}(T^k) = 0$. Ainsi, toutes les colonnes de $T - k$ tendent vers 0, donc $\lim T_k = 0$ (limite coefficient par coefficient).

Q29. Toute matrice complexe A est semblable à une matrice triangulaire supérieure et l'on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec P inversible. Alors, $A^k = PT^kP^{-1}$. D'après la question 28, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0$. La continuité de l'application linéaire $M \longmapsto PMP^{-1}$ donne alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Partie III — Application à la méthode de Gauß-Seidel

Q30. Par construction, M est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont ceux de A, lesquels sont non nuls par hypothèse (diagonale strictement dominante). Donc M est inversible.

On pose $B = M^{-1}F$, $X_0 \in \mathbb{C}^n$ (vecteur colonne) et $X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y$.

Q31. À partir des définitions, il vient

$$AX = Y \iff MX = FX + Y \iff X = M^{-1}FX + M^{-1}Y \iff X = BX + M^{-1}Y.$$

Q32. Par hypothèse, $BV = M^{-1}FV = \lambda V$, d'où, en multipliant par M, $FV = \lambda MV$. De manière équivalente, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} FV_{|i} = (\lambda MV)_{|i} &\iff \sum_{j=1}^{n} f_{i,j} v_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} v_j \iff -\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} v_j \\ &\iff \lambda a_{i,i} v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right) \end{aligned}$$

Q33. On considère la coordonnée i_0 de V qui réalise sa norme infinie (le maximum d'une partie finie de $\mathbb{R}$ est toujours atteint). Comme V est un vecteur propre, il est non nul, donc $\|V\|_\infty = v_{i_0} \neq 0$. On prend $i = i_0$ et l'on applique l'inégalité triangulaire. Il vient

$$|\lambda a_{i_0,i_0} v_{i_0}| \leqslant \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}||v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}||v_j| \leqslant \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}||v_{i_0}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}||v_{i_0}|$$

$$\therefore \qquad |\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}|$$

en divisant par $|v_{i_0}|$.

Q34. Par définition d'une matrice à diagonale dominante et par l'inégalité précédente

$$|\lambda| \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0,j}| < |\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| \qquad \therefore \qquad \big(1 - |\lambda|\big) \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| > 0,$$

d'où $|\lambda| < 1$. On peut alors appliquer la question 29 à la matrice B, dont le spectre est inclus dans le disque unité ouvert, soit $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$.

Q35. Par construction, on a

$$X_{k+1} - X = (BX_k + M^{-1}Y) - (BX + M^{-1}Y) = B(X_k - X)$$

d'où $X_k - X = B^k(X_0 - X)$ par une récurrence immédiate. Alors, la continuité de l'application linéaire $M \longmapsto M(X_0 - X)$ (on est en dimension finie) donne $\lim X_k - X = 0$, soit $\lim X_k = X$.