

Dans tout le problème les polynômes considérés sont des polynômes à coefficients réels, les fonctions considérées sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

PREMIÈRE PARTIE

Polynômes d'interpolation de Lagrange

I. x_1 et x_2 sont deux réels distincts donnés. On supposera $x_1 < x_2$.

1. Déterminer les deux polynômes du premier degré P_1 et P_2 tels que :

$$\begin{aligned} P_1(x_1) &= 1 & P_1(x_2) &= 0 \\ P_2(x_1) &= 0 & P_2(x_2) &= 1 \end{aligned}$$

Application numérique : $x_1 = 1, x_2 = 2$. Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions $x \mapsto P_1(x), x \mapsto P_2(x)$.

2. Montrer que les deux polynômes P_1 et P_2 sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel des polynômes.

Soit \mathcal{P}_1 l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est au plus 1. Quelle est la dimension de \mathcal{P}_1 ?

Prouver que P_1 et P_2 constituent une base de \mathcal{P}_1 .

3. Soit un polynôme P élément de \mathcal{P}_1 . Montrer qu'il existe des nombres réels a et b uniques tels que $P = a P_1 + b P_2$.

Déterminer a et b à l'aide des valeurs de P en x_1 et en x_2 .

4. En déduire que, étant donné deux couples de réels $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ où x_1 et x_2 sont distincts, il existe un polynôme P et un seul dont le degré est au plus 1 tel que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2$.

Donner son écriture dans la base (P_1, P_2) .

II. Dans cette question, x_1, x_2, x_3 sont trois nombres réels donnés deux à deux distincts. On supposera $x_1 < x_2 < x_3$.

1. a. Déterminer le polynôme P_1 du second degré tel que :

$$P_1(x_1) = 1 \quad P_1(x_2) = P_1(x_3) = 0$$

[on remarquera d'abord qu'il est divisible par le produit $(x - x_2)(x - x_3)$].

b. Déterminer de même les polynômes P_2 et P_3 du second degré tels que :

$$P_2(x_2) = 1 \quad P_2(x_1) = P_2(x_3) = 0$$

$$P_3(x_3) = 1 \quad P_3(x_1) = P_3(x_2) = 0$$

c. *Application numérique* : $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions $x \mapsto P_1(x), x \mapsto P_2(x), x \mapsto P_3(x)$.

2. Montrer que les trois polynômes P_1, P_2, P_3 sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel des polynômes.

Soit \mathcal{P}_2 l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est au plus 2. Quelle est la dimension de \mathcal{P}_2 ?

Prouver que P_1, P_2, P_3 constituent une base de \mathcal{P}_2 .

3. Soit un polynôme P élément de \mathcal{P}_2 . Montrer qu'il existe des nombres a, b, c uniques tels que $P = a P_1 + b P_2 + c P_3$.

Déterminer a, b, c à l'aide des valeurs de P en x_1, x_2, x_3 .

4. En déduire que, étant donné trois couples de réels $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ où x_1, x_2, x_3 sont deux à deux distincts, il existe un polynôme P et un seul dont le degré est au plus 2 tel que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$. Donner son écriture dans la base (P_1, P_2, P_3) .

III. Généralisation.

1. Dans cette question, $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n, x_{n+1}$ sont $(n+1)$ réels deux à deux distincts. Montrer qu'on peut leur associer $(n+1)$ polynômes de degré n , $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n, P_{n+1}$ tels que, pour tout $i = 1, 2, \dots, n, n+1$,

$$P_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n, n+1).$$

δ_{ij} est appelé symbole de Kronecker. Ces polynômes seront dits fondamentaux.

2. En s'inspirant des considérations développées dans les cas $n = 1$ et $n = 2$ (cf. questions I et II) montrer que, étant donné $(n+1)$ couples de réels (x_j, y_j) où les x_j sont deux à deux distincts, il existe un polynôme P et un seul dont le degré est au plus n vérifiant, pour tout $j = 1, 2, \dots, n, n+1$, $P(x_j) = y_j$.

DEUXIÈME PARTIE

Approximations d'une fonction

En choisissant $y_j = f(x_j)$ lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les réels x_j , le résultat obtenu dans la première partie à la question III.2. permet de définir le polynôme d'interpolation de f , dont le degré est au plus n , associé aux $(n+1)$ points x_j deux à deux distincts. Il sera noté P_f , ou plus simplement P si aucune confusion n'est à craindre.

Dans les cas $n = 1$ et $n = 2$, on se propose d'écrire ce polynôme P_f à l'aide des polynômes fondamentaux et de fournir un majorant de l'erreur commise en remplaçant dans l'intervalle I la fonction f par le polynôme P_f .

I. Cas $n = 1$.

1. Étude d'un exemple.

On considère la fonction f définie sur le segment $[0, 1]$ par :

$$f(x) = x^2$$

et les nombres réels $x_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, $x_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

- Écrire le polynôme P d'interpolation de f , du premier degré, associé aux valeurs x_1 et x_2 .
- Dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 10 cm), tracer la courbe (C) représentant la fonction f et la droite D représentant la fonction polynôme P .
Préciser le point de (C) où la tangente (T) à (C) a pour pente 1.
A étant le point de (C) de coordonnées $(1, 1)$, montrer que la droite (D) est l'axe de la bande limitée par les droites (OA) et (T) .
- Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - P(x)$. En déduire un majorant de $|f(x) - P(x)|$.
Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2. Étude générale.

On considère une fonction f définie et deux fois continûment dérivable sur le segment $[a, b]$. x_1 et x_2 sont deux nombres réels distincts donnés.

On supposera $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

- Écrire le polynôme d'interpolation P de f du premier degré associé aux valeurs x_1 et x_2 .

b. Soit x_0 un nombre réel fixé de $[a, b]$, distinct de x_1 et de x_2 .

On pose :

$$k_0 = \frac{f(x_0) - P(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

Soit, par ailleurs, la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - P(x) - k_0(x - x_1)(x - x_2).$$

- i. Montrer que φ admet au moins trois zéros sur $[a, b]$.
Montrer que φ' admet au moins deux zéros sur $[a, b]$.
- ii. En déduire qu'il existe un nombre réel ξ_0 de $[a, b]$ tel que $\varphi''(\xi_0) = 0$.
- iii. Exprimer simplement k_0 à l'aide de f'' et de ξ_0 .
- iiii. Montrer que, pour tout x_0 de $[a, b]$, distinct de x_1 et de x_2 , il existe un réel ξ_0 , pouvant dépendre de x_0 , tel que :

$$f(x_0) - P(x_0) = \frac{1}{2} f''(\xi_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2).$$

c. Déduire de ce qui précède que, pour tout x de $[a, b]$, il existe un réel ξ , pouvant dépendre de x , tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_1)(x - x_2).$$

d. Soit $M = \sup_{[a, b]} |f''|$. Montrer que, pour tout x de $[a, b]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{2} |(x - x_1)(x - x_2)|.$$

e. Étudier les variations de la fonction : $x \mapsto (x - x_1)(x - x_2)$ sur $[a, b]$.
Conclure en donnant un majorant de $|f(x) - P(x)|$ sur $[a, b]$.

II. Cas $n = 2$.

1. Étude d'un exemple.

On considère la fonction f définie sur le segment $[0, 1]$ par :

$$f(x) = x^3$$

et les nombres réels $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$.

- a. Écrire le polynôme d'interpolation P de f du second degré associé aux valeurs x_1, x_2, x_3 .
- b. Dans un même repère orthonormé (unité graphique : 10 cm), représenter la fonction f et la fonction polynôme P .
- c. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0, 1]$ par :

$$g(x) = f(x) - P(x).$$

En déduire un majorant de $|f(x) - P(x)|$ sur $[0, 1]$.

2. Étude générale.

On considère une fonction f définie et trois fois continûment dérivable sur le segment $[a, b]$.
 x_1, x_2, x_3 sont trois nombres réels donnés deux à deux distincts. On supposera $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$.

- a. Écrire le polynôme P d'interpolation de f du second degré associé aux valeurs x_1, x_2, x_3 .

b. Soit x_0 , un nombre réel fixé de $[a, b]$, distinct de x_1, x_2 et x_3 . On pose :

$$k_0 = \frac{f(x_0) - P(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}.$$

Soit, par ailleurs, la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - P(x) - k_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

- i. Montrer que φ admet au moins quatre zéros sur $[a, b]$.
- ii. Montrer que φ' admet au moins trois zéros sur $[a, b]$.
Montrer que φ'' admet au moins deux zéros sur $[a, b]$.
En déduire qu'il existe un nombre réel ξ_0 de $[a, b]$ tel que $\varphi'''(\xi_0) = 0$.
- iii. Exprimer simplement k_0 à l'aide de f''' et de ξ_0 .
- iiii. Montrer que, pour tout x_0 de $[a, b]$, distinct de x_1, x_2, x_3 , il existe un réel ξ_0 de $[a, b]$ pouvant dépendre de x_0 , tel que :

$$f(x_0) - P(x_0) = \frac{1}{6} f'''(\xi_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3).$$

c. Déduire de ce qui précède que, pour tout x de $[a, b]$, il existe un réel ξ , pouvant dépendre de x , tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

d. Soit $M = \sup_{[a, b]} |f'''|$. Montrer que, pour tout x de $[a, b]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{6} |(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|.$$

e. On suppose désormais que $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = b$. On se propose, pour préciser la majoration précédente, de déterminer $\sup_{[a, b]} |(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|$.

On pose $h = x_3 - x_1$.

i. Déterminer une fonction u du premier degré telle que, si l'on pose $t = u(x)$, on ait :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = h^3 t \left(t - \frac{1}{2} \right) (t - 1).$$

(On peut se servir d'un polynôme d'interpolation du premier degré).

ii. Étudier sur l'intervalle $[0, 1]$ la fonction $t \mapsto t \left(t - \frac{1}{2} \right) (t - 1)$.

En déduire la borne supérieure de $\left| t \left(t - \frac{1}{2} \right) (t - 1) \right|$ sur $[0, 1]$.

iii. Conclure en donnant un majorant de $|f(x) - P(x)|$ sur $[a, b] = [x_1, x_3]$, majorant faisant intervenir M et h .

TROISIÈME PARTIE

Équation différentielle avec conditions aux limites

On envisage le problème suivant dit « problème aux limites » sur le segment $[0, 1]$.

Soit une fonction numérique a continue sur le segment $[0, 1]$, et un nombre réel c . Le problème aux limites considéré, noté E_a , consiste à trouver une solution u de l'équation différentielle du second ordre sur $[0, 1]$

$$u''(x) - a(x)u(x) = 0$$

vérifiant les conditions, dites conditions limites,

$$u(0) = c, \quad u'(1) = 0.$$

Dans une première étape, on examinera le cas où la fonction a est constante. Dans une deuxième étape, on dégagera une méthode d'approximation utilisant les résultats de la deuxième partie.

I. Résolution de E_a quand a est une fonction constante.

1. Résoudre le problème E_0 correspondant au cas où a est la fonction nulle.
2. Résoudre le problème E_{ω^2} correspondant au cas où a est la fonction constante $x \mapsto \omega^2$, ω désignant un réel donné strictement positif.
3. Résoudre le problème $E_{-\omega^2}$ correspondant au cas où a est la fonction constante $x \mapsto -\omega^2$, ω désignant un réel donné strictement positif. On discutera suivant les valeurs de ω .

II. Méthode d'approximation de E_a .

Dans ce qui suit on admettra l'existence et l'unicité d'une solution de E_a si la fonction a est à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$.

On suppose désormais que la fonction a est trois fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ et telle que, pour tout x élément de $[0, 1]$, $0 < a(x) < 2$. Le problème E_a admet donc une solution et une seule sur $[0, 1]$ qui n'est pas la fonction nulle si le nombre donné c n'est pas nul, ce qui sera supposé dans toute la suite.

Il n'est pas possible en général d'expliciter la solution de E_a . On se propose d'utiliser une approximation de a par une fonction b polynomiale par intervalle et de fournir un majorant de l'erreur commise en résolvant E_b au lieu de E_a .

On pose pour une fonction f continue sur $[0, 1]$:

$$\|f\| = \sup_{[0, 1]} (|f(x)|).$$

Montrer que $\|a\| < 2$.

1. Approximation de la fonction a .

Soit $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$, ($n + 1$) points de $[0, 1]$ définis par $x_0 = 0, \dots, x_i = \frac{i}{n}, \dots, x_n = 1$.

Par ailleurs, on considère pour $i = 0, \dots, n - 1$, $z_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

a. Montrer qu'il existe une fonction b , polynomiale du second degré sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, telle que :

$$\begin{aligned} b(x_i) &= a(x_i) & i &= 0, 1, \dots, n \\ b(z_i) &= a(z_i) & i &= 0, 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

Montrer que b est continue sur $[0, 1]$.

b. Soit b_i la restriction de b à $[x_i, x_{i+1}]$. En utilisant la question II.2.e. de la deuxième partie, donner un majorant de l'erreur $\sup_{[x_i, x_{i+1}]} (|a(x) - b_i(x)|)$. En déduire un majorant de l'erreur $\|a - b\|$.

- c. Dédire de ce qui précède et du fait que a est à valeurs strictement positives que, pour n assez grand, la fonction b construite ci-dessus est à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$.
- d. Dédire de ce qui précède et du fait que $\|a\| < 2$ que, pour n assez grand, la fonction b vérifie $\|b\| < 2$.

Les deux conditions sur n définies par c. et d. seront supposées réalisées par la suite.

2. Étude d'une approximation de E_a .

- a. On désigne par v la solution du problème E_n . v vérifie donc :

$$\begin{cases} v'' - b v = 0 & \text{sur } [0, 1] \\ v(0) = c \\ v'(1) = 0. \end{cases}$$

Justifier l'existence et l'unicité de v . On ne cherchera pas à l'expliciter.

Pour tout x élément de $[0, 1]$ on pose :

$$\psi(x) = \int_0^x \left[\int_1^t b(\theta) v(\theta) d\theta \right] dt.$$

Calculer $\psi'(x)$, $\psi''(x)$. En déduire que, pour tout x élément de $[0, 1]$, $v(x) = \psi(x) + c$.

- b. Montrer que, pour tout x élément de $[0, 1]$,

$$|v(x)| \leq \|b\| \|v\| \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + |c|.$$

En déduire l'existence d'un nombre strictement positif k_1 , indépendant de n , tel que $\|v\| \leq k_1$.

3. Comparaison de u et de v .

- a. u et v étant les solutions respectives de E_a et de E_b , montrer que, pour tout x élément de $[0, 1]$,

$$u(x) - v(x) = \int_0^x \left[\int_1^t (a(\theta) u(\theta) - b(\theta) v(\theta)) d\theta \right] dt.$$

- b. En déduire qu'il existe un nombre strictement positif k_2 , indépendant de n , tel que :

$$\|u - v\| \leq k_2 \|a - b\|.$$

On exprimera k_2 à l'aide de k_1 et de $\|a\|$.

- c. En utilisant la question II.1.b. de cette troisième partie, montrer qu'il existe un réel k positif indépendant de n , tel que :

$$\|u - v\| \leq \frac{k}{n^3}.$$