École polytechnique Maths B MP 2022

Corrigé proposé par

Khoutaibi Abdelaziz [1]

Première partie

1a. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, posons $g_0(x) = \dfrac{1}{x}$ et et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $g_n(x) = \left(\dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}\right)$, alors on a $\forall n \geqslant 1, g_n(x) = \dfrac{2x}{x^2-n^2}$, donc $g_n(x) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$, et par suite $\sum g_n(x)$ est absolument convergente.

1b. f est impaire comme rapport d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Chacune des fonctions g_n est impaire, donc g est impaire.

1c. En notant alors S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum g_n$, on a $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$, d'où

$$S_n(x+1) = S_n(x) + \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n} \ ,$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, g(x+1) = g(x)$. Donc g est 1-périodique.

1d. Soit $a, b \in \left]0,1\right[$ tel que $a < b$. Sur $[a, b]$, pour $n \geqslant 1$, la majoration $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{2}{n^2-b^2}$ prouve que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[a, b]$. Les fonctions g_n étant continues sur $\left]0,1\right[$, il en est de même de g, qui est donc continue sur $\left]0,1\right[$, et donc sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par périodicité. La fonction $f : x \mapsto \pi \operatorname{cotan} \pi x$ est aussi définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc D aussi.

2.a Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \pi\frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2})} + \pi\frac{\cos(\frac{\pi(x+1)}{2})}{\sin(\frac{\pi(x+1)}{2})} = \pi\frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2})} - \pi\frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})} \\ &= \pi\frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2}) - \sin^2(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})\sin(\frac{\pi x}{2})} = 2\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 2f(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2f(x). \tag{1}$$

2.b En utilisant encore la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum g_n$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \qquad S_n(x) + S_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\, S_{2n}(x) + \frac{1}{n + \dfrac{x+1}{2}} \ .$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2g(x) \tag{2}$$

1. Professeur agrégé en CPGE (lycée d'Excellence de Benguérir)

3a. Au voisinage de zéro, on a

$$\pi\ \operatorname{cotan}\pi x = \pi\frac{1+O(x^2)}{\pi x+O(x^3)} = \frac{1}{x}\frac{1+O(x^2)}{1+O(x^2)} = \frac{1}{x}(1+O(x^2)) = \frac{1}{x}+O(x).$$

De plus,

$$g(x) = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2-n^2}\ ,$$

la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{x^2-n^2}$ convergeant normalement sur tout intervalle $[-\eta,\eta]$ avec $0<\eta<1$ grâce à la majoration

$$\left|\frac{1}{x^2-n^2}\right| = \frac{1}{n^2-x^2} \leqslant \frac{1}{n^2-\eta^2}\ .$$

On en déduit que sa fonction somme $h : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2-n^2}$ est continue en 0. Donc au voisinage de 0, on a $h(x)=h(0)+o(1)=-\frac{\pi^2}{6}+o(1)$ et par suite $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{\pi^2}{3}x+o(x)=\frac{1}{x}+O(x)$, donc $D(x)=O(x)$ au voisinage de 0, elle est donc prolongeable par continuité en zéro, avec $g(0)=0$. Etant 1-périodique, elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

3b. La fonction $\widetilde{D}(\alpha)$ est continue sur $[0,1]$, donc $\widetilde{D}(\alpha)$ admet un maximum M sur ce segment, atteint en un point α. Des relations relation (1) et (2), on déduit qu'on a aussi

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \widetilde{D}\left(\frac{x}{2}\right)+\widetilde{D}\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2\widetilde{D}(x), \tag{3}$$

ce qui entraine que

$$2M = 2\widetilde{D}(\alpha) = \widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\widetilde{D}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \leqslant 2M\ .$$

Donc

$$M\leqslant 2M-\widetilde{D}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\leqslant \widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leqslant M$$

Il en résulte que $\widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=M$, puis, par une récurrence immédiate, que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)=M$$

4. La continuité de $\widetilde{D}$ en zéro donne alors $M=\widetilde{D}(0)=0$. La fonction $\widetilde{D}$ est nulle sur $[0,1]$ et, par périodicité, sur $\mathbb{R}$ tout entier. Finalement :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\quad \pi x\operatorname{cotan}(\pi x) = 1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2} \tag{4}$$

5a. En remplacant x par $\frac{x}{2\pi}$, avec $x\in]-2\pi,2\pi[\backslash\{0\}$, la relation (4) devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) &= 1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\frac{x}{2n\pi})^2}{1-(\frac{x}{2n\pi})^2}\\ &= 1-\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}n^{2k}}\end{aligned}$$

5b. Soit $x \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\}$. D'après la question précédente on a, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}n^{2k}}\right) = \frac{1-\frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)}{2}$, donc la suite double $\left(\dfrac{x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}n^{2k}}\right)_{k,n\geqslant 1}$ est sommable par paquets et par conséquent sommable parce qu'elle est à termes positifs. Par permutation des deux sommations, on obtient pour $x \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\}$

$$\frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}n^{2k}} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}n^{2k}}.$$

Finalement, la relation $\dfrac{ix}{e^{ix}-1} + \dfrac{ix}{2} = \operatorname{cotan}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, entraine que

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\}, \quad \frac{ix}{e^{ix}-1} = 1 - \frac{ix}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k}.$$

6. D'après la question 5), si $|z| < 2\pi$, alors la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}z^{2k}$ est absolument convergente, donc la série entière $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}z^{2k}$ a un rayon de converge $R \geqslant 2\pi$ et $\forall z \in \mathbb{C}, e^z - 1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$. Donc par produit de Cauchy, il existe une suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $|z| < 2\pi$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n = (e^z-1)\left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}z^{2k}\right).$$

En particulier, pour $x \in]-2\pi, 2\pi[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_n i^n x^n = \left(e^{ix}-1\right)\left(1 - \frac{ix}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\cdot x^{2k}\right)$. Ce qui donne d'après la question 5)b) que

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, \sum_{n=0}^{+\infty}c_n i^n x^n = ix.$$

D'où $c_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}, c_n = 0$. Finalement on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2\pi$,

$$z = (e^z-1)\left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}z^{2k}\right). \tag{5}$$

7a. D'après (5), on a $\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, h(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k}$. Donc h est C^∞ sur $]-2\pi, 2\pi[$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 2\pi$. Comme h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, puisque le développement en série entière de h au voisinage de zéro coïncide avec la série de Taylor $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{h^n(0)}{n!}x^n$, alors on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\zeta(2n)$$

7b. Puisque $\forall z \in \mathbb{C}^*, \dfrac{e^z-1}{z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$, alors par produit de Cauchy, l'égalité (5) s'écrit

$$\forall z \in]-2\pi, 2\pi[, \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n,$$

où

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!}.$$

Par unicité du développement en série entière, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases} \tag{6}$$

7c. Pour calculer b_2, b_4 et b_6, on écrit l'égalité (6) pour $n = 2$,4 et 6, on obtient :
$\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{b_2}{2} = 0$, donc $b_2 = \dfrac{1}{6}$, puis par un calcul similaire, $b_4 = -\dfrac{1}{30}$ et $b_6 = \dfrac{1}{42}$.
A l'aide de la relation $b_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!\zeta(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$ on obtient

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \text{ et } \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Deuxième partie

8a. Soit $\mu \in \mathscr{M}(E)$, alors μ est une fonction de $\mathscr{P}(E)$ vers $\mathbb{R}$ et pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on a $0 \leqslant \mu(A) \leqslant 1$, donc $\mu \in \mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$.

8b.
- Déjà, l'application $f \mapsto \|f\|$ est bien définie sur $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$, car pour tout toute fonction $f \in \mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$, l'application $A \mapsto |f(A)|$ est bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc la borne supérieure de l'ensemble $\{|f(A)|, A \in \mathscr{P}(E)\}$ existe. De plus, il s'agit de la borne supérieure d'un ensemble de nombres positifs, elle est donc positive.
- Puisque pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$ on a $|f(A)| \leqslant \|f\|$, si $\|f\| = 0$ alors $f = 0$;
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \mathscr{P}(E)$ on a $|\lambda f(A)| = |\lambda||f(A)|$, donc $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$.
- Enfin, si $f, g \in \mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$, on a :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), |f(A) + g(A)| \leqslant |f(A)| + |g(A)| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

$$\text{donc } \|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

On conclut que $\|\cdot\|$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$.

9. Par définition de la norme $\|\cdot\|$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\mu_n(x)| - \mu(x)| \leqslant \|\mu_n - \mu\|$$

Donc si $\|\mu_n - \mu\| \to 0$ quand $n \to +\infty$, il en est de même de $|\mu_n(x)| - \mu(x)|$ pour tout $x \in E$, c.à.d que

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n \to +\infty} \mu_n(x) = \mu(x).$$

10a. Notons pour tout $n \geqslant 1$, $A_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors la suite d'ensembles $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante et de réunion égale à E. Donc par continuité monotone on a $1 = \mu(E) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu(A_n)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_0, \mu(A_n) \geqslant 1 - \varepsilon$. On pose $F_\varepsilon = A_{N_0} = \{x_1, \cdots, x_{N_0}\}$,

alors pour tout $i \in [\![1, N_0]\!]$, il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant k_i$, $|\mu_n(x_i) - \mu(x_i| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{N_0}$.
Posant $N_\varepsilon = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant N_0} k_i$, et sommant les inégalités précédentes on obtient

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| = \sum_{i=1}^{N_0} |\mu_n(x_i) - \mu(x_i)| \leqslant N_0 . \frac{\varepsilon}{N_0} = \varepsilon$$

10b. Par σ-additivité de μ et μ_n on a pour tonte partie A de E,

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap F_\varepsilon\right) + \mu\left(A \cap \left(E \setminus F_\varepsilon\right)\right) \leqslant \mu\left(A \cap F_\varepsilon\right) + \mu\left(E \backslash F_\varepsilon\right)$$

et

$$\mu(A) = \mu_n\left(A \cap F_\varepsilon\right) + \mu\left(A \cap \left(E \setminus F_\varepsilon\right)\right) \leqslant \mu\left(A \cap F_\varepsilon\right) + \mu\left(E \backslash F_\varepsilon\right)$$

D'où

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leqslant \left|\mu_n\left(A \cap F_\varepsilon\right) - \mu\left(A \cap F_\varepsilon\right)\right| + \mu\left(E \backslash F_\varepsilon\right) + \mu_n\left(E \backslash F_\varepsilon\right)$$

Soit $n \geqslant N_\varepsilon$, alors on a

$$\begin{aligned} \left|\mu_n\left(A \cap F_\varepsilon\right) - \mu\left(A \cap F_\varepsilon\right)\right| &= \left|\sum_{x \in A \cap F_\varepsilon} (\mu_n(x) - \mu(x)\right| \\ &\leqslant \sum_{x \in A \cap F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| \\ &\leqslant \sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| \leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

$\mu\left(E \backslash F_\varepsilon\right) = 1 - \mu(F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, et

$$\begin{aligned} \mu_n\left(E \backslash F_\varepsilon\right) &= \left|\mu_n\left(E \backslash F_\varepsilon\right) - \mu\left(E \backslash F_\varepsilon\right) + \mu\left(E \backslash F_\varepsilon\right)\right| \\ &= \left|\mu_n\left(F_\varepsilon\right) - \mu\left(\left(F_\varepsilon\right)\right) + \mu\left(E \backslash F_\varepsilon\right)\right| \leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

D'où $\mu\left(E \backslash F_\varepsilon\right) + \mu_n\left(E \backslash F_\varepsilon\right) \leqslant 3\varepsilon$ et par suite

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leqslant 4\varepsilon.$$

10c. Le sens direct a été montré dans la question 8)a). Pour le sens inverse, on a d'après la question précédente, et en remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{4}$ que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, \forall A \in \mathscr{P}(E), |\mu_n(A) - \mu(A| \leqslant \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, \|\mu_n - \mu\| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $k \geqslant n, \delta_k(x_n) = 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \delta(x_n) = 0$. Donc si $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers μ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu(x_n) = 0$ et par suite $\mu(E) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(x_n) = 0$. Ce qui est absurde car $\mu(E) = 1$. Ainsi $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est divergente dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$.

12a. On va construire les termes de la suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence.

- Pour $k = 1$, $(\mu_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$, étant une suite bornée de $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite convergente, c.à.d qu'il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\left(\mu_{\varphi_1(n)}(x_1)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

- Soit $k \geqslant 2$, supposons avoir construit $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$ et construisons φ_k.
La suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots o \varphi_{k-1}(n)}\left(x_k\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est réelle bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe $\varphi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots o \varphi_k(n)}\left(x_k\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit convergente. De plus pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots o \varphi_k(n)}\left(x_i\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est extraite de la suite convergente $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots o \varphi_{k-1}(n)}\left(x_i\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, donc elle converge. La récurrence est ainsi achevée.

12b. La suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots o \varphi_i(n)}\left(x_i\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite $\mu_{\infty}\left(x_i\right)$. Comme pour tout $k \geqslant i$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots o \varphi_k(n)}\left(x_i\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est extraite de la suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots o \varphi_i(n)}\left(x_i\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ alors elle converge aussi vers $\mu_{\infty}\left(x_i\right)$.

12.c On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{k+1}(k+1) \geqslant k+1 > k$, et comme $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k$ est strictement positif alors $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_{k+1}(k+1) > \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(k)$, ce qui prouve la stricte croissance de ψ.
Soit $i \in \mathbb{N}$, $k \geqslant i$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\left(\mu_{\varphi_1(n)}\left(x_i\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\mu_{\infty}\left(x_i\right)$, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \left|\mu_{\varphi_1(n)}\left(x_i\right) - \mu_{\infty}(x_i)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Comme pour tout $k \geqslant 2$, $\varphi_2 \circ \cdots \varphi_k(k) \geqslant k$, alors

$$\forall k \geqslant n_1, \left|\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots o \varphi_k(k)}\left(x_i\right) - \mu_{\infty}(x_i)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui prouve que la suite $\left(\mu_{\psi(k)}\left(x_i\right)\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\mu_{\infty}\left(x_i\right)$.

12d. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mu_{\psi(k)}(x_i) \geqslant 0$. En passant à la limite lorsque $k \rightarrow +\infty$, on obtient alors que $\mu_{\infty}(x_i) \geqslant 0$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $A_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_{\psi(k)}(x_i) = \mu_{\psi(k)}(A_n) \leqslant 1$. En passant à la limite lorsque $k \rightarrow +\infty$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_{\infty}(x_i) \leqslant 1$, puis en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on trouve $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\infty}\left(x_i\right) \leqslant 1$.

12e Puisque pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$ la famille $(\mu_{\infty}(x))_{x \in A}$ est sommable comme sous famille de la famille sommable de nombres réels positifs $(\mu_{\infty}(x))_{x \in E}$, alors on pose pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $\mu_{\infty}(A) = \displaystyle\sum_{x \in A} \mu_{\infty}(x)$. Montrons qu'on définit ainsi un élément de $\mathscr{M}(E)$.

- On a $\forall x \in E, \mu_{\infty} \geqslant 0$ et $\forall A \in \mathcal{P}(E), \mu_{\infty}(A) = \displaystyle\sum_{x \in A} \mu_{\infty}(x) \leqslant \sum_{x \in E} \mu_{\infty}(x) = 1$. Donc μ_{∞} est à valeurs dans $[0, 1]$.
- On a déjà montré dans la question précédente que $\mu_{\infty}(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\infty}\left(x_i\right) \leqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$, alors puisque (μ_n) est tendue, il existe une partie finie F_{ε} de E tell que $\mu_{\infty}(F_{\varepsilon}) \geqslant 1 - \varepsilon$. Alors $\mu_{\infty}(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\infty}\left(x_i\right) \geqslant \sum_{x \in F_{\varepsilon}} \mu_{\infty}\left(x_i\right) = \mu_{\infty}(F_{\varepsilon}) \geqslant 1 - \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0^+, on obtient alors que $\mu_{\infty}(E) \geqslant 1$ et finalement $\mu_{\infty}(E) = 1$.
- Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de parties deux à deux disjointes de E et $A = \displaystyle\bigcup_{n \geqslant 1} A_n$. Alors la famille de nombres réels positifs $(\mu_{\infty}(x))_{x \in A}$ est sommable. D'après le théorème de sommation par paquets, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{x \in A_n} \mu_{\infty}(x)\right)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{x \in A} \mu_{\infty}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{x \in A_n} \mu_{\infty}(x)\right)$, c.à.d que $\mu_{\infty}(A) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_{\infty}(A_n)$. D'où la σ- additivité de μ_{∞}.

Troisième partie

13. - L'application μ_X est définie sur $\mathscr{P}(E)$ et à valeurs dans $[0,1]$.
    - De $\{X \in E\} = \Omega$, on déduit $\mu_X(E) = 1$.
    - Si (A_n) est une suite de parties deux à deux disjointes de E, alors les ensembles $\{X \in A_n\}$ sont également deux à deux disjoints et :

$$\left\{X \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \in A_n\}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mu_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{X \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \in A_n\}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\{X \in A_n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_X\left(A_n\right).\end{aligned}$$

14. Posons $Z = \left|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}\right|$. Alors Z est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ comme fonction des variables aléatoires discrètes $\mathbb{1}_{\{X\in A\}}$ et $\mathbb{1}_{\{Y\in A\}}$ et $Z(\Omega) = \{0,1\}$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}\right|\right) &= P(Z=1) = P\left((X \in A) \cap (Y \notin A)\right) + P\left((X \notin A) \cap (Y \in A)\right) \\ &= P\left(C\right),\end{aligned}$$

où $C = ((X \in A) \cap (Y \notin A)) \cup ((X \notin A) \cap (Y \in A))$, car les deux évènements $(X \in A) \cap (Y \notin A)$ et $(X \notin A) \cap (Y \in A)$ sont incompatibles.
D'autre part on a

$$\mu_X(A) = P(X \in A) = P\left((X \in A) \cap (Y \in A)\right) + P\left((X \in A) \cap (Y \notin A)\right)$$

et

$$\mu_Y(A) = P(Y \in A) = P\left((X \in A) \cap (Y \in A)\right) + P\left((X \notin A) \cap (Y \in A)\right)$$

D'où

$$\begin{aligned}|\mu_X(A) - \mu_Y(A)| = |P(X \in A) - P(Y \in A)| &= \left|P\left((X \in A) \cap (Y \notin A)\right) - P\left((X \notin A) \cap (Y \in A)\right)\right| \\ &\leqslant P\left((X \in A) \cap (Y \notin A)\right) + P\left((X \notin A) \cap (Y \in A)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}\right|\right)\end{aligned}$$

Comme $C \subset (X \neq Y)$, alors pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on a $|\mu_X(A - \mu_Y(A)| \leqslant P(X \neq Y)$. D'où

$$\|\mu_X - \mu_Y\| \leqslant P(X \neq Y).$$

15a. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n(\omega) \neq X(\omega)$, alors l'ensemble $G_\omega := \{n \in \mathbb{N}, X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$ est une partie non vide et majorée car la suite $X_n(\omega)$ est stationnaire à $X(\omega)$, donc G_ω admet un plus grand élément. Ce qui prouve que L est bien définie.

15b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(X_n \neq X) = \{\omega \in \Omega / X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \subset \{\omega \in \Omega / L(\omega) \geqslant n)\}$. Donc

$$P\left(X_n \neq X\right) \leqslant P(L \geqslant n).$$

15c. D'après la question 14) on a $\|\mu_{X_n} - \mu_X\| \leqslant P(X_n \neq X) \leqslant P(L \geqslant n)$. Et puisque la suite $(L \geqslant n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et $\bigcap_{n\geqslant 1}(L \geqslant n) = \emptyset$, alors d'après le théorème de la continuité monotone on a $\lim_{n\to+\infty} P(L \geqslant n) = P\left(\bigcap_{n\geqslant 1}(L \geqslant n)\right) = P(\emptyset) = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \|\mu_{X_n} - \mu_X\| = 0$.

16. Soit $\omega \in \Omega$, alors $X(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

- Si $X(\omega) = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \psi_n(X(\omega)) = 1$, donc $(\psi_n(X)(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur $X(\omega)$)
- Si $X(\omega) \geqslant 2$, alors il existe $r \geqslant 1$ tel que $X(\omega) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_{p_i}(x)}$. Par unicité du développement en facteur premiers on a alors $\forall i \geqslant r, \nu_{p_i} = 0$ et donc $\psi_n(X(\omega)) = X(\omega)$.

Ainsi pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(\psi_n(X)(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge vers $X(\omega)$, donc d'après la question 15) la suite la suite $\left(\mu_{\psi_n((X)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers μ_X dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E),\mathbb{R})$. Et par suite

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = x) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\psi_n(X) = x\right)$$

Quatrième partie

17a. Puisque $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i \subset \mathbb{N}^* r p_{n+1}$, alors on a

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i \cup \mathbb{N}^* r p_{n+1} \;\; = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) \cup \left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right).$$

Comme $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i$, alors on a bien

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) \cup \left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) \tag{7}$$

17b. On va raisonner par récurrence sur n. Notons $(\mathcal{P}_n)$ l'assertion : pour tout $r \geqslant 1$

$$\mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_2\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right)$$

- Pour $n = 1$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ alors on a $\mathbb{N}^* r p_1 \subset \mathbb{N}^* r$, donc

$$\mu_1(\mathbb{N}^* r \setminus \mathbb{N}^* r p_1) = \mu_1(\mathbb{N}^* r) - \mu_1(\mathbb{N}^* r p_1) = \mu_2(\mathbb{N}^* r) - \mu_2(\mathbb{N}^* r p_1) = \mu_2(\mathbb{N}^* r \setminus \mathbb{N}^* r p_1)$$

- Soit $n \geqslant 1$, supposons $(\mathcal{P}_n)$ et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$. D'après la relation (7), on a

$$\mathbb{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i = \left(\mathbb{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) \setminus \left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right)$$

et comme

$$\left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) \subset \left(\mathbb{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right),$$

alors en utilisant $(\mathcal{P}_n)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu_1\left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^*rp_i\right) &= \mu_1\left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^*rp_i\right) - \mu_1\left(\mathbb{N}^*rp_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^*rp_{n+1}p_i\right)\\
&= \mu_2\left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^*rp_i\right) - \mu_2\left(\mathbb{N}^*rp_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^*rp_{n+1}p_i\right)\\
&= \mu_2\left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^*rp_i\right)
\end{aligned}$$

Et $(\mathcal{P}_{n+1})$ est ainsi vraie. Donc

$$\forall r \geqslant 1, \forall n \geqslant 1, \mu_1\left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^*rp_i\right) = \mu_2\left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^*rp_i\right) \text{‘} \tag{8}$$

17c. Pour conclure, , il suffit de montrer que $\forall r \geqslant 1, \mu_1(r) = \mu_2(r)$. Pour cela montrons d'abord que

$$\{r\} = \left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i \geqslant 1} \mathbb{N}^*rp_i\right),$$

En effet,

$$\begin{aligned}
n \in \left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i \geqslant 1} \mathbb{N}^*rp_i\right) &\Leftrightarrow r \mid n \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*, rp_i \nmid n\\
&\Leftrightarrow r \mid n \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*, p_i \nmid \frac{n}{r}\\
&\Leftrightarrow r \mid n \text{ et } \frac{n}{r} = 1\\
&\Leftrightarrow n = r
\end{aligned}$$

D'autre part on a $\left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i \geqslant 1} \mathbb{N}^*rp_i\right) = \bigcap_{n \geqslant 1} B_n$, où $B_n = \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^*rp_i$.

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans (8) et en remarquant que la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante, on obtient à l'aide du théorème de la continuité monotone que

$$\begin{aligned}
\mu_1(r) &= \mu\left(\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i \geqslant 1} \mathbb{N}^*rp_i\right)\\
&= \lim_{n \to +\infty} \mu_1(B_n)\\
&= \lim_{n \to +\infty} \mu_2(B_n)\\
&= \mu_2(r)
\end{aligned}$$

18. D'après la question on sait que la suite $(\mu_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence μ_∞ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$, c.à.d qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $\mu_{X_{\varphi(n)}}$ converge vers μ_∞. Comme d'après ii) on a $\lim_{n \to +\infty} P\left(r \mid X_{\varphi(n)}\right) = P(r \mid X)$, alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a $\mu_\infty(\mathbb{N}^*r) = \mu_X(\mathbb{N}^*r)$. Ce qui entraine d'après la question 17) que $\mu_\infty = \mu_X$. Pour montrer que

μ_{X_n} converge vers μ_X on va faire un raisonnement par l'absurde. Si on suppose le contraire, alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, \|\mu_{X_n} - \mu_X\| > \varepsilon.$$

Ainsi on peut construire une suite extraite $\left(\mu_{X_{\psi(n)}}\right)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\mu_{X_{\psi(n)}} - \mu_X\| > \varepsilon.$$

Comme $(\mu_{X_n})_{n\geqslant 1}$ est tendue, alors il en est de même de $\left(\mu_{X_{\psi(n)}}\right)$. De plus pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(r \mid X_{\psi(n)}\right) = P(r \mid X)$. Ainsi $\left(\mu_{X_{\psi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi les propriétés i) et ii) vérifiés par la suite $(\mu_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et par suite il existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mu_{X_{\psi\circ\sigma(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ_X. Ceci est en contradiction avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\mu_{X_{\psi\circ\sigma(n)}} - \mu_X\| > \varepsilon.$$

19. Pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, calculer $P\left(r \mid X_n^{(i)}\right)$ et montrer que $P\left(r \mid X_n^{(i)}\right) \leqslant \dfrac{1}{r}$.

Si $r > n$ alors $\left(r \mid X_n^{(i)}\right) = \emptyset$ et donc $P\left(r \mid X_n^{(i)}\right) = 0$.

Si $1 \leqslant r \leqslant n$, alors $\left(r \mid X_n^{(i)}\right) = \left(X_n^{(i)} \in \{1 \leqslant qr/ \leqslant n\}\right) = \left(X_n^{(i)} \in \{qr/1 \leqslant q \leqslant \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor\right)$. Donc $P\left(r \mid X_n^{(i)}\right) = \dfrac{1}{n}\left\lfloor \dfrac{n}{r} \right\rfloor$. Cette dernière formule reste encore valable pour $r > n$.

Observant que $\left(r \mid Z_n^{(s)}\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{s} \left(r \mid X_n^{(i)}\right)$ et utilisant que les variables aléatoires $X_n(i), 1 \leqslant i \leqslant s$ sont mutuellement indépendants, on obtient $P\left(r \mid Z_n^{(s)}\right) = \prod\limits_{i=1}^{s} P\left(r \mid X_n^{(i)}\right) = \left(\dfrac{1}{n}\left\lfloor \dfrac{n}{r} \right\rfloor\right)^s$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} = \dfrac{1}{n}\left\lfloor \dfrac{n}{r} \right\rfloor = \dfrac{1}{r}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(r \mid Z_n^{(s)}\right) = \frac{1}{r^s}$$

20a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ nous avons :

$$\begin{aligned} P(k \mid Z) = P\left(Z \in k\mathbb{N}^*\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = nk) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(nk)^s} \\ &= \frac{1}{\zeta(s)k^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$P\left(X \in k\mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{k^s}.$$

20b Soit $s \geqslant 2$ un entier.

On a pour tout $r \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(r \mid Z_n^{(s)}\right) = \dfrac{1}{r^s} = P(r \mid Z)$. Montrons que $Z_n^{(s)}$ est étendue. Soient $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $E_N = \{1, 2 \cdots, N\}$. On va montrer qu'il est possible de choisir N tel que que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu_{Z_n^{(s)}}(E_N) \geqslant 1 - \varepsilon$. Pour cela, on écrit

$$\mu_{Z_n^{(s)}}(\mathbb{N}^* \setminus E_N) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu_{Z_n^{(s)}}(k) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu_{Z_n^{(s)}}(\mathbb{N}^* k) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} P\left(k \mid Z_n^{(s)}\right) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \to 0$ quand $N \to +\infty$, alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu_{Z_n^{(s)}}(\mathbb{N}^* \setminus E_{N_\varepsilon}) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \leqslant \varepsilon.$$

En posant $F_\varepsilon = E_{N_\varepsilon}$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{Z_n^{(s)}}(F_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Nous déduisons de la question 18) que la suite $\left(\mu_{Z_n^{(s)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{B}\left(\mathscr{P}\left(\mathbb{N}^*\right), \mathbb{R}\right)$ vers μ_s.

21. Pour $1 \leqslant i \leqslant s$, on note $X_i^{(s)}$ la variable aléatoire égale à la valeur du i ème nombre tiré. Alors $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \ldots, X_n^{(s)}$ sont mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(s) = \mu_s(1) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(2) = \frac{1}{\zeta(s)} = \frac{6}{\pi^2},$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(4) = \frac{1}{\zeta(4)} = \frac{90}{\pi^4},$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(6) = \frac{1}{\zeta(4)} = \frac{945}{\pi^6}.$$