Épreuve de mathématiques II
Correction

Exercice I

Q1.

```
def estPremier(n):
    d=2
    while d*d<=n:
        if n%d==0:
            return False
        d=d+1
    return True
```

Q2.

```
def liste_premiers(n):
    L=[]
    for i in range(2,n+1):
        if estPremier(i):L.append(i)
    return L
```

Q3.

```
def valuation_p_adique(n,p):
    k=0
    while n%p==0:k+=1;n=n//p
    return k
```

Q4.

```
def val(n,p):
    if n%p!=0:
        return 0
    return 1+val(n//p,p)
```

Q5.

```
def decomposition_facteurs_premiers(n):
    L=[]
    for p in liste_premiers(n):
        if val(n,p)!=0:
            L.append([p,val(n,p)])
    return L
#-------------------------------------------
n=int(input("donner la valeur de n = "))
print("Liste des nombre premier <    n sont :",end="")
print(liste_premiers(n))
print(valuation_p_adique(140,2))
print(valuation_p_adique(40,5))
print(valuation_p_adique(27,3))
```

```
print(valuation_p_adique(40,7))
print()
print(val(140,2))
print(val(40,5))
print(val(27,3))
print(valuation_p_adique(40,7))
print()
print(decomposition_facteurs_premiers(n))
```

Exercice II

Q6. Supposons que $\dim E \geq 2$ et soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormale de E. Considérons l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = e_2, \;\; u(e_2) = -e_1 \text{ et } \forall i \geq 3, u(e_i) = 0.$$

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. On a

$$(U(x)|x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \left(x_1 e_2 - x_2 e_1 | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = -x_1 x_2 + x_1 x_2 = 0,$$

cependant u est non nulle.
Si $\dim E = 1$, alors pour tout endomorphisme u de E, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in E, \;\; u(x) = \alpha x$$

et donc

$$\forall x \in E, \;\; (u(x)|x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, \;\; \alpha \|x\|^2 = 0$$

et donc $\alpha = 0$, ou encore u est nul.

Q7. $i \Rightarrow ii$ – Soit $(x, y) \in E^2$, par définition on a : $(u(x)|u(y)) = (x|v \circ u(y))$ et on a aussi $(v(x)|v(y)) = (x|u \circ v(y)$. Donc, d'après l'hypothèse, $(u(x)|u(y)) = (v(x)|v(y))$.
$ii \Rightarrow iii$ – Il suffit de prendre $y = x$.
$iii \Rightarrow ii$ – En utilisant la formule de polaire :

$$\forall x, y \in E^2, \;\; (x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in E^2, \;\; (u(x)|u(y)) &= \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|v(x+y)\|^2 - \|v(x)\|^2 - \|v(y)\|^2\right) \\
&= (v(x)|v(y))
\end{aligned}$$

$ii \Rightarrow i$ – $\forall (x, y) \in E^2$, on a :

$$(u(x)|u(y)) = (v(x)|v(y)) \Leftrightarrow (x|v \circ u(y)) = (u \circ v(y)|x) \Leftrightarrow (x| \left[v \circ u - u \circ v\right](y)).$$

D'où $\left[v \circ u - u \circ v\right](y) \in E^{\perp} = \{0\}$ et ceci pour tout $y \in E$, donc $v \circ u - u \circ v = 0$.

PROBLÈME

Partie I- Étude de quelques exemples

Q8. Soit A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

D'où

$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(P^{-1}AP) = \mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$, $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$,

de plus pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_n - B) = \det\left[P(\lambda I_n - A)P^{-1}\right] = \det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda)$$

où χ_A désigne le polynôme caractéristique de A. Ainsi $\chi_A = \chi_B$.

Q9. On a :

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 5; & \\ \det(A) = \det(B) = 4; & \\ \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 3 & \text{A et B sont invrsibles;} \\ \chi_A = \chi_B = (X-2)^2(X-1) & \text{A et B sont triangualaires.} \end{cases}$$

Notons $E_2(A)$ (resp. $E_2(B)$) le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

$$(x, y, z) \in E_2(A) \Leftrightarrow x - y - z = 0$$

Donc $E_2(A)$ est un hyperplan, donc A est diagonalisable.

$$(x, y, z) \in E_2(B) \Leftrightarrow x = z = 0.$$

Donc $E_2(B)$ est une droite vectorielle et donc $\dim E_2(B)$ strictement inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2 dans le polynôme caractéristique χ_B. Donc B n'est pas diagonalisable.

A est donc semblable à $\mathrm{diag}(1, 2, 2)$. Si les deux matrices A et B sont semblables, par transitivité de la similitude, B serait semblables à $\mathrm{diag}(1, 2, 2)$, c'est-à-dire B est diagonalisable, ce qui est absurde. Donc A et B ne sont pas semblables

Q10. *Première méthode :* On a :

$$\begin{cases} u(e_1) = e_2 + 2e_3; \\ u(e_2) = e_1 + e_3; \\ u(e_3) = e_1. \end{cases}$$

Posons $\varepsilon_1 = e_2, \varepsilon_2 = e_1, \varepsilon_3 = e_3$. Il est clair que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E et

$$\begin{cases} u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3; \\ u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2. \end{cases}$$

Donc B n'est autre que la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, donc A est B sont semblables.

Deuxième méthode : Les calculs montrent que $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = x^3 - 3x - 1.$$

L'étude de la fonction φ montre qu'elle s'annule 3 fois sur $\mathbb{R}$, autrement dit A (resp. B) admet trois valeurs propres distinctes, donc A et B sont diagonalisables et les deux sont semblables à $\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$, donc par transitivité elles sont semblables.

Q11. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à u. $\mathrm{rg}(u) = 1$, donc $\dim \ker(u) = n - 1$, soit donc $(e_1, e_2, ..., e_{n-1})$ une base de $\ker u$ et e un vecteur tel que $(e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e)$ soit une base de E (théorème de la base incomplète). Notons $a_1, a_2, ..., a_n$ les coordonnées de $u(e)$ dans cette base. La matrice de u dans cette base est donc de la forme

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Q12. *Application* : On a $u^2(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $u^2(e) = u\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j + a_n e\right) = a_n u(e)$, donc $u^2 = a_n u$. Donc le polynôme $X^2 - a_n X = X(X - a_n)$ est un polynôme annulateur de u, donc u est diagonalisable si, et seulement si, les racines de $X(X - a_n)$ sont distinctes, ou encore si, et seulement si, $a_n \neq 0$, cette dernière condition est équivalent à $U^2 \neq 0$.

Q13. Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$\begin{cases} u(e_1) = ie_1 + e_2; \\ u(e_2) = e_1 - ie_2; \\ u(e_i) = e_i & \text{si } i \in [\![2, n]\!]. \end{cases}$$

Q14. Notons C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A. On remarque que $C_3 = C_1$ et $C_4 = C_2$ et que C_1 et C_2 ne sont pas proportionnels, donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2) = 2$. D'après le théorème de rang $\dim \ker u = 2$ (u l'endomorphisme canoniquement associé à A), donc 0 est une valeur propre de A.
On a

$$u(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 2(\alpha + \beta)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

et

$$u(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) = 2(\alpha - \beta)(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$$

donc $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont des valeurs propres de A.
Notons $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ. On a :

$$\dim E_0(A) + \dim E_{2(\alpha+\beta)}(A) + \dim E_{2(\alpha-\beta)}(A) \geq 4,$$

donc A est diagonalisable. On remarque aussi que $u(e_1 - e_3) = u(e_2 - e_4) = 0$, donc $(e_1 - e_3, e_2 - e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$ est une base de vecteurs propre de A.

Q15. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme canoniquement associé A. Posons $\varepsilon_1 = \dfrac{a}{b}e_1$ et $\varepsilon_2 = e_2$. Il est clair que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, de plus

$$u(\varepsilon_1) = \frac{a}{b}u(e_1) = \frac{a}{b}\lambda e_1 = \lambda\varepsilon_1$$

et

$$u(\varepsilon_2) = u(e_2) = ae_1 + \lambda e_2 = b\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2.$$

Donc B n'est autre la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, donc les deux matrices A et B sont semblables.

Partie II- Démonstration d'un résultat

Q16. On a

$$PB = AP \Leftrightarrow (R + iS)B = A(R + iS) \Leftrightarrow RB + iSB = AR + iAS.$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient : $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q17. On a $RB = AR$ et $SB = AS$ et donc plus généralement pour tout réel x, $(R + xS)B = A(R + xS)$. Maintenant, $\det(R + xS)$ est un polynôme à coefficients réels en x mais n'est pas le polynôme nul car sa valeur en i est $\det(P) \neq 0$. Donc il n'existe qu'un nombre fini de réels x tels que $\det(Q + xR) = 0$. En particulier, il existe au moins un réel x tel que la matrice $P = R + xS$ soit inversible.

Q18. P est une matrice réelle inversible telle que $PA = BP$ et A et B sont bien semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q19. *Application :* On vérifie facilement que $\chi_B = \chi_A = X^3 + X = X(X - i)(X + i)$, donc les deux matrices sont diagonalisables et sont semblables à $D = \operatorname{diag}(0, i, -i)$, donc par transitivité elles sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, et donc dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie III

Q20. Soient A et B des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \pi_A = \pi_B \end{cases}$

• Supposons $\chi_A = \chi_B = (X - \lambda)(X - \mu)$ avec $\lambda \neq \mu$. Dans ce cas les deux matrices sont semblables à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, donc elles sont semblables.

• Supposons maintenant $\lambda = \mu$, deux cas sont possibles si $\pi_A = \pi_B = X - \lambda$, alors dans ce cas $A = B = \lambda I_2$. Si $\pi_A = \pi_B = (X - \lambda)^2$, alors A et B sont trigonalisables et semblables respectiveemnt à $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$), donc A et B sont semblables d'après la question **Q15**.

Q21. Considérons les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A = \chi_B = X^4$ et $\pi_A = \pi_B = X^2$, cependant les deux matrices ne sont pas semblables, puisque $\operatorname{rg}(A) = 1 \neq 2 = \operatorname{rg}(B)$. Donc la propriété P_n n'est pas vraie pour $n = 4$.

• • • • • • • • • •