CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC Mathématiques 1 PC 2025
Proposition de corrigé.

Partie A - Autour du principe d'incertitude d'Heisenberg

I - Valeurs propres de l'opérateur dérivée seconde

Q1. Pour tout $f \in E$, f est deux fois dérivable et $-f''$ appartient encore à E donc ℓ est bien définie de E dans E.

Par linéarité de la dérivation, ℓ est linéaire. C'est donc un endomorphisme de E.

Q2. • Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in E$. f est solution de $\ell(f) = \lambda f$ si et seulement si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle à coefficients constants $y'' + \lambda y = 0$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto A\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, qui sont bien de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc λ est valeur propre de ℓ et le sous-espace propre associé est

$$E_\lambda(\ell) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}\,x), x \mapsto \sin(\sqrt{\lambda}\,x)\right).$$

La famille $\left(x \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}\,x), x \mapsto \sin(\sqrt{\lambda}\,x)\right)$ étant libre, elle forme une base de ce sous-espace propre.

• Une fonction $f \in E$ vérifie $\ell(f) = 0$ si et seulement si $f'' = 0$ donc si et seulement si f est affine. Ainsi 0 est valeur propre de ℓ et

$$E_0(\ell) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto x, x \mapsto 1\right).$$

La famille libre $\left(x \mapsto x, x \mapsto 1\right)$ est une base de $E_0(\ell)$.

II - Cas des fonctions gaussiennes

Q3. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $|G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}| = G_a(t)$, or la fonction positive G_a est par intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé, donc $t \mapsto G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}$ l'est aussi.

Q4. On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

Considérons : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(\xi, t) \mapsto G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}$.

• On vient de voir que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(\xi, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Soit $t \in \mathbb{R}$. $\xi \mapsto f(\xi, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\xi \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t) = -itG_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}$.

• Soit $\xi \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ d'après l'expression précédente.

• Soit $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t)\right| = |t|\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2}.$$

$t \mapsto |t|\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$a > 0$ donc au voisinage de $+\infty$, $t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2} = \dfrac{1}{t^2}$ par croissance comparée. Par comparaison à un exemple de Riemann intégrable en $+\infty$, $t \mapsto |t|\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2}$ est intégrable en $+\infty$.

Par parité, elle l'est également en $-\infty$ donc finalement sur $\mathbb{R}$.

L'hypothèse de domination est vérifiée, et on conclut par le théorème du cours que $\widehat{G_a}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\widehat{G_a}' : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} -it\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2}\mathrm{e}^{-i\xi t}\mathrm{d}t.$$

Q5. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On intègre par parties dans $\widehat{G_a}'(\xi)$ en primitivant $t \mapsto -t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2}$ en $t \mapsto \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2}$.

$u : t \mapsto \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2}$ et le second facteur $v : t \mapsto i\mathrm{e}^{-i\xi t}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $|u(t)v(t)| = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u(t)v(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ et le crochet est bien défini.

On a donc par intégration par parties (avec convergence assurée de la seconde intégrale)

$$\widehat{G_a}'(\xi) = \left[\frac{i}{a}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2}\mathrm{e}^{-i\xi t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} -i\xi\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2}\mathrm{e}^{-i\xi t}\mathrm{d}t = -\frac{\xi}{a}\widehat{G_a}(xi).$$

$\widehat{G_a}$ est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \dfrac{\xi}{a}\,y = 0$.

Par le cours, il existe donc $K \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\, \widehat{G}_a(\xi) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}\xi^2} = KG_{\frac{1}{a}}(\xi.)$$

Par ailleurs $\widehat{G_a}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} = KG_{\frac{1}{a}}(0) = K$ donc $\boxed{\widehat{G}_a = \sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}\; G_{\frac{1}{a}}}$.

Q6. $G_a^2 = G_{2a}$ donc par l'énoncé $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(u)\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$.

$u\mathrm{e}^{-au^2} \underset{u\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée ($a > 0$) donc une intégration parties analogue à la précédente nous donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2G_a^2(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} u\,\mathrm{e}^{-au^2}\times u\mathrm{d}u = \left[-\frac{u}{2a}\,\mathrm{e}^{-au^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-au^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(u)\mathrm{d}u = \boxed{\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}.$$

Q7. $\widehat{G}_a = \sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}\; G_{\frac{1}{a}}$ donc par la question précédente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\widehat{G}^2(u)\mathrm{d}u = \frac{2\pi}{a} \times \frac{a}{2}\sqrt{\pi a} = \pi\sqrt{\pi a}.$$

Il vient donc

$$\sigma_F^2(G_a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \times \pi\sqrt{\pi a} = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \sigma_T^2(G_a) = \frac{1}{2a} = \frac{1}{4\sigma_F^2(G_a)}.$$

Partie B - Laplacien d'une matrice

I - Étude d'un élément de $\mathcal{G}$

Q8. $L_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes C_1 et C_2 de L_B forment une famille libre ; par ailleurs $C_3 = -C_2$ et $C_4 = -C_1$ donc L_B est de rang 2.

Q9. On calcule $L_B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2L_B$.

$X(X-2)$ est annulateur de L_B donc $\mathrm{Sp}(L_B) \subset \{0, 2\}$.

L_B est symétrique réelle, donc diagonalisable. Si son spectre était un singleton, elle serait semblable à une matrice scalaire, donc égale à une matrice scalaire, ce qui n'est pas. Son spectre est donc la paire $\{0, 2\}$.

Le rang de L_B est 2 donc par le théorème du rang, $\mathbf{dim}\,(E_0(L_B)) = 4 - 2 = 2$.

L_B étant diagonalisable, $\mathbf{dim}\,(E_2(L_B)) = 4 - \mathbf{dim}\,(E_0(L_B)) = 2$.

Q10. L_B est symétrique réelle et $\mathrm{Sp}(L_b) \subset \mathbb{R}_+$ donc par caractérisation spectrale $L_B \in \mathcal{S}_4^+(\mathbb{R})$.

Cependant 0 est valeur propre de L_B donc par caractérisation spectrale $L_B \notin \mathcal{S}_4^{++}(\mathbb{R})$

II - Étude du noyau des éléments de $\mathcal{G}$

Q11. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$(L_A \mathbb{1}_N)_i = (\delta(A)\mathbb{1}_N)_i - (A\mathbb{1}_N)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 0$$

donc $L_A \mathbb{1}_N = 0$ et $\mathbb{1}_N \in \operatorname{Ker}(L_A)$. $\operatorname{Ker}(L_A)$ étant un sous-espace, $\boxed{\operatorname{Vect}(\mathbb{1}_N) \subset \operatorname{Ker}(L_A)}$.

On a vu dans **Q9** que L_B possède un noyau de dimension 2 donc il n'y a pas nécessairement égalité.

Q12. $\delta(A)$ est diagonale donc

$$x^T \delta(A) x = \sum_{i=1}^{n} x_i (\delta(A)x)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (\delta(A)_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i^2 = \sum_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2} a_{i,j} x_i^2.$$

Q13.

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} x_i (Ax)_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2} a_{i,j} x_i x_j$$

donc

$$x^T L_A x = x^T \delta(A) x - x^T A x = \sum_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2} a_{i,j} (x_i^2 - x_i x_j)$$

$(i,j) \mapsto (j,i)$ est bijective de $[\![1,n]\!]^2$ dans lui-même donc on a aussi

$$x^T L_A x = \sum_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2} a_{j,i} (x_j^2 - x_j x_i) = \sum_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2} a_{j,i} (x_j^2 - x_j x_i) \text{ car } A \text{ est symétrique}$$

Alors en sommant les deux expressions

$$\begin{aligned} 2x^T L_A x &= \sum_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2} a_{i,j} (x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2) \\ &= \sum_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2} a_{i,j} (x_i - x_j)^2 \end{aligned}$$

En remarquant que $a_{i,j}(x_i - x_j)^2 = 0$ si $i = j$ et que $a_{i,j}(x_i - x_j)^2 = a_{j,i}(x_j - x_i)^2$ on obtient

$$\begin{aligned} x^T L_A x &= \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2} a_{i,j} (x_i - x_j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} a_{i,j} (x_i - x_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant N} a_{i,j} (x_i - x_j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} a_{i,j} (x_i - x_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} a_{j,i} (x_j - x_i)^2 \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} a_{i,j} (x_i - x_j)^2 \end{aligned}$$

donc les égalités de l'énoncé sont démontrées.

Q14. L_A est symétrique réelle et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on a

$$x^T L_A x = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \underbrace{a_{i,j}}_{\geqslant 0} \underbrace{(x_i - x_j)^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

donc $L_A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ par caractérisation spectrale.

Q15. On sait déjà que $\mathrm{Vect}(\mathbb{1}_N) \subset \mathrm{Ker}(L_A)$ par **Q11**. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(L_A)$. On a alors $x^T L_A x = 0$ donc $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2} a_{i,j}(x_i - x_j)^2 = 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

A vérifie la condition (Γ) donc il existe un entier $n \geqslant 2$ et des éléments deux à deux distincts $i_1, i_2, \dots, i_n$ de $[\![1,N]\!]$, vérifiant :

$$i_1 = i, \quad \forall k \in [\![1, n-1]\!], a_{i_k,i_{k+1}} = 1 \quad \text{ et } i_n = j.$$

On a alors par positivité des termes de la somme et du fait que les couples (i_k, i_{k+1}) sont deux à deux distincts :

$$0 = \sum_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2} a_{i,j}(x_i - x_j)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_{i_k,i_{k+1}}(x_{i_k} - x_{i_{k+1}})^2 \geqslant 0$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_{i_k,i_{k+1}}(x_{i_k} - x_{i_{k+1}})^2 = 0$ et par positivité des termes

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ a_{i_k,i_{k+1}}(x_{i_k} - x_{i_{k+1}})^2 = 0.$$

Or pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{i_k,i_{k+1}} = 1$ donc $x_{i_k} = x_{i_{k+1}}$.

Comme $i_1 = i$ et $i_n = j$ on en déduit que $x_i = x_j$, et finalement que $x \in \mathrm{Vect}(\mathbb{1}_N)$.

Par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Vect}(\mathbb{1}_N) = \mathrm{Ker}(L_A)}$.

Partie C - Région de faisabilité, courbe d'incertitude

I - Définitions de σ^2_{M} et σ^2_{S}

Q16. A est bien symétrique réelle, à coefficients dans $\{0,1\}$ donc $A \in \mathcal{G}$.

Montrons que A vérifie la condition (Γ).

Pour $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on note $\mathcal{P}(i,j)$ l'assertion « il existe un entier $n \geqslant 2$ et des éléments deux à deux distincts $i_1, i_2, \dots, i_n$ de $[\![1,N]\!]$, vérifiant :

$$i_1 = i, \quad \forall k \in [\![1, n-1]\!], a_{i_k,i_{k+1}} = 1 \quad \text{ et } i_n = j. \text{ »}$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

• Supposons que $i = 1$. Alors $j > 1$ donc $a_{i,j} = 1$ et on peut prendre $n = 2$, $i_1 = i$ et $i_2 = j$. L'assertion $\mathcal{P}(i,j)$ est donc vraie.

• Supposons que $i \in [\![2,N]\!]$ et que $j = 1$. On prend là encore $n = 2$, $i_1 = i$, $i_2 = j$ et comme $a_{i,j} = 1$ l'assertion $\mathcal{P}(i,j)$ est vraie.

• Supposons en dernier lieu que $i \in [\![2,N]\!]$ et $j > 1$. On pose alors $i_1 = i$, $i_2 = 1$ et $i_3 = j$ et on vérifie que $a_{i_1,i_2} = a_{i,1} = 1$ et que $a_{i_2,i_3} = a_{1,j} = 1$ donc l'assertion $\mathcal{P}(i,j)$ est vraie.

Par exhaustion de cas, $\mathcal{P}(i,j)$ est vraie pour $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ tel que $i \neq j$, donc A vérifie la condition (Γ).

Q17. A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ par le théorème spectral.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ son spectre ordonné dans l'ordre croissant, chaque valeur propre étant répétée autant de fois que sa multiplicité.

$A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ par **Q14** donc $\lambda_1 \geqslant 0$. Par ailleurs $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ par **Q11** donc $\lambda_1 \leqslant 0$ et finalement $\lambda_1 = 0$.

A vérifie (Γ) donc par **Q15** son noyau est de dimension 1, ce qui implique (puisque A est diagonalisable) que 1 est valeur propre simple de A, donc que $\lambda_2 > \lambda_1$.

Q18. Le calcul de $\delta(A)$ est immédiat et donne $L_A = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$L_A - I_N = \begin{pmatrix} N-2 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc possède par le théorème du rang un noyau de dimension $N-2>0$.

On en déduit que 1 est valeur propre de L_A et que le sous-espace propre associé est de dimension $N-2$ (qui est aussi la multiplicité de la valeur propre 1 puisque L_A, symétrique réelle, est diagonalisable).

La trace de L_A est la somme de ses valeurs propres donc la dernière valeur propre de L_A est $\mathrm{tr}(A) - 1\times 0 - (N-2)\times 1 = 2N-2-(N-2) = N$.

Puisque $N>1$ on en déduit que $\lambda_N = N$, et λ_N étant valeur propre simple, **dim** $((E_{\lambda_N}(L_A)) = 1$.

Q19. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1,\dots,e_N)$ de $\mathbb{R}^N$ constituée de vecteurs propres de L_A, et on peut par permutation des vecteurs la choisir de sorte que e_i soit associé à la valeur propre λ_i pour tout $i\in [\![1,N]\!]$.

Notons $(a_1\dots a_n)^T$ le vecteur des coordonnées de x dans cette base.

Il vient $L_A x = \displaystyle\sum_{i=1}^N a_i L_A e_i = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i e_i$, et la base étant orthonormée

$$x^T L_A x = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i^2.$$

Pour tout $i\in[\![1,N]\!]$ on a $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_N$, donc $\lambda_1 a_1^2 \leqslant \lambda_i a_i^2 \leqslant \lambda_N a_i^2$ et en sommant on obtient

$$\sum_{i=1}^N \lambda_1 a_i^2 = \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant x^T L_A x \leqslant \sum_{i=1}^N \lambda_N a_i^2 = \lambda_N \|x\|^2$$

$x\neq 0$ donc $\|x\|>0$ et on obtient donc finalement en divisant par $\|x\|^2$:

$$\lambda_1 \leqslant \sigma_S^2(x) \leqslant \lambda_N.$$

• Montrons *i)* : Soit $\mu\in\mathbb{R}^*$. Alors $\mu x\neq 0$ et $\|\mu x\|^2 = \mu^2\|x\|^2$, puis $(\mu x)^T L_A(\mu x) = \mu^2(x^T L_A x)$, d'où $\sigma_S^2(\mu x) = \sigma_S^2(x)$.
• Montrons *ii)* : Si $x\in E_{\lambda_1}(L_A)$ alors $x^T L_A x = x^T(\lambda_1 x) = \lambda_1 x^T x = \lambda_1\|x\|^2$, donc $\sigma_S^2(x) = \lambda_1 = 0$.
Réciproquement, supposons que $\sigma_S^2(x) = \lambda_1$.

Alors $x^T L_A x = \lambda_1 \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^N \lambda_1 a_i^2$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^N \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)a_i^2}_{\geqslant 0} = 0$, ce qui amène $(\lambda_i-\lambda_1)a_i^2 = 0$ pour tout $i\in[\![1,N]\!]$. Or pour tout $i\in[\![2,N]\!]$ on a $\lambda_i > \lambda_1$ donc $a_i^2 = 0$ i.e. $a_i = 0$, et on conclut que $x\in\mathrm{Vect}(e_1) = E_{\lambda_1}(L_A)$.

II – Région de faisabilité

Q20. Soit $(s,m)\in\mathcal{R}$. Il existe donc $x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ tel que $\sigma_S^2(x) = s$ et $\sigma_M^2(x) = m$.

Par **Q19** on a déjà $\lambda_1\leqslant s\leqslant\lambda_N$, i.e. $s\in[0,\lambda_N] = [0,N]$.

Par ailleurs $x^T D x = \displaystyle\sum_{i=2}^N x_i^2 \in \left[0, \sum_{i=1}^N x_i^2\right] = \left[0,\|x\|^2\right]$, donc $m\in[0,1]$.

On a donc $\boxed{\mathcal{R}\subset[0,\lambda_N]\times[0,1]}$.

Q21. • Par hypothèse $\sigma_S^2(x) = 0$ donc par **Q19** on a $x \in E_{\lambda_1}(L_A) = \mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Vect}(\mathbb{1}_N)$. Il existe donc $\alpha \neq 0$ tel que $x = \alpha \mathbb{1}_N$, ce qui entraîne $x^T D x = \alpha^2(N-1)$ et $\|x\|^2 = \alpha^2 N$, d'où $\sigma_M^2(x) = \dfrac{N-1}{N}$.

L'intersection de $\mathcal{R}$ et de la droite d'équation $s = 0$ est donc incluse dans le singleton $\{(0, \frac{N-1}{N})\}$. Elle est égale à ce singleton puisque $\mathcal{R}$ contient le point $(\sigma_S^2(\mathbb{1}_N), \sigma_M^2(\mathbb{1}_N)) = (0, \frac{N-1}{N})$.

Q22. • Soit $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. Par **Q19**, $\sigma_S^2(x) = \lambda_N$ si et seulement si $x \in E_{\lambda_N}(L_A)$.

$E_{\lambda_N}(L_A)$ est une droite vectorielle. Soit u un vecteur directeur de cette droite et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

On a $\sigma_M^2(\alpha u) = \dfrac{\alpha^2 u^T D u}{\alpha^2 \|u\|^2} = \dfrac{u^T D u}{\|u\|^2}$, indépendant du choix de α donc $\mathcal{R}$ rencontre la droite d'équation $s = \lambda_N$ en l'unique point $\left(\lambda_N, \dfrac{u^T D u}{\|u\|^2}\right)$. On détermine le sous-espace propre $E_{\lambda_N}(L_A) = E_N(L_A)$.

Soit $x = (x_1 \dots x_N)^T \in \mathbb{R}^N$.

$$L_A x = Nx \Leftrightarrow \begin{cases} -x1 - x_2 - \cdots - x_N = 0 \\ -x_1 - (N-1)x_2 = 0 \\ \vdots \\ -x_1 - (N-1)x_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{N-1}x_1 \\ \vdots \\ x_N = -\dfrac{1}{N-1}x_1 \end{cases}$$

$u = (N-1, -1, \dots, -1)$ engendre donc $E_{\lambda_N}(L_A)$. On calcule alors $\dfrac{u^T D u}{\|u\|^2} = \dfrac{N-1}{(N-1)^2 + N - 1} = \dfrac{1}{N}$.

$\mathcal{R}$ intersecte donc la droite d'équation $s = \lambda_N$ en l'unique point $(N, \frac{1}{N})$.

• Soit $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. $\sigma_M^2(x) = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=2}^{N} x_i^2 = 0$ donc si et seulement si x est colinéaire à $v = (1, 0 \dots, 0)$.

Par **Q19** $\mathcal{R}$ rencontre donc la droite d'équation $m = 0$ en l'unique point $(\sigma_S^2(v), 0)$, c'est-à-dire $(N-1, 0)$.

• L'énoncé ne le demande pas mais on pourrait montrer de même que l'intersection de $\mathcal{R}$ et de la droite d'équation $m = 1$ est l'unique point $(1, 1)$.

III – La courbe d'incertitude γ_-

Q23. (e_1, e_N) sont vecteurs propres de L_A associés à des valeurs propres distinctes donc la famille (e_1, e_N) est libre. Pour tout $t \in [0, 1]$, $(t, 1-t) \neq (0, 0)$ donc $x_t = (1-t)e_1 + te_N \neq 0$ et $\sigma_S^2(x_t)$ est bien défini.

$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est donc bien définie sur } [0,1].}$

Pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) = \dfrac{x_t^T D x_t}{\|x_t\|^2}$ est quotient de deux expressions polynomiales en t donc φ est continue sur $[0, 1]$, et est bien sûr à valeurs réelles.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi([0, 1])$ est un intervalle. Or $\varphi(0) = \sigma_S^2(e_1) = 0$ et $\varphi(1) = \sigma_S^2(e_N) = \lambda_N$ donc $\varphi([0, 1]) \subset [0, \lambda_N]$.

L'inclusion réciproque est donnée par **Q19** donc $\varphi([0, 1]) = [0, \lambda_N]$.

Pour tout $s \in [0, \lambda_N]$ il existe donc $t \in [0, 1]$ tel que $\sigma_S^2(x_t) = s$, et donc $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ tel que $\sigma_S^2(x) = s$.

On remarque pour la suite que l'on peut prendre x dans $E_{\lambda_1}(L_A) \oplus E_{\lambda_N}(L_A)$.

Q24. Soit $s \in [0, \lambda_N]$. Posons $K_s = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = 1, \sigma_S^2(x) = s\}$. Par la question précédente il existe $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ tel que $\sigma_S^2(x) = s$ et par **Q19** on a alors $\dfrac{1}{\|x\|} x \in K_s$ donc K_s est non vide. K_s est bornée (c'est une partie de la sphère unité). Montrons qu'elle est aussi fermée.

Soit $(a_p)_{p \geqslant 0}$ une suite d'éléments de K_s convergeant vers $x \in \mathbb{R}^N$. Par continuité de la norme on a $\|x\| = \lim\limits_{p \to +\infty} \|a_p\| = 1$, et σ_S^2 étant continue sur $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ (car rationnelle en les coordonnées) on a aussi $\sigma_S^2(x) = \lim\limits_{p \to +\infty} \sigma_S^2(a_p) = s$, d'où $x \in K_s$. Par caractérisation séquentielle, K_s est fermée.

Enfin σ_M^2 est continue sur $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ (car rationnelle en les coordonnées), à valeurs réelles et $\mathbb{R}^N$ est de dimension finie donc le théorème des bornes atteintes s'applique et permet d'affirmer que σ_M^2 est bornée sur K_s et atteint ses bornes.

Le réel $\min\{\sigma_M^2(x),\ \|x\| = 1, \sigma_S^2(x) = s\}$ est donc bien défini.

Q25. Soient $(a, b) \in [0, \lambda_N]^2$ et $t \in [0, 1]$. On note $A = (a, \gamma_-(a))$ et $B = (b, \gamma_-(b))$. Alors A et B sont deux points de $\mathcal{R}$, et $\mathcal{R}$ étant convexe on a $(1-t)A + tB \in \mathcal{R}$.

Il existe donc $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ tel que $\sigma_S^2(x) = (1-t)a + tb$ et $\sigma_M^2(x) = (1-t)\gamma_-(a) + t\gamma_-(b)$. Posant $s = \sigma_S^2(x)$ on a $s \in [0, \lambda_N]$ et $\gamma_-(s) = \min\{\sigma_M^2(y),\ y \in K_s\}$ or $\dfrac{x}{\|x\|} \in K_s$ donc $\gamma_-(s) \leqslant \sigma_M^2\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) = \sigma_M^2(x)$, d'où

$$\gamma_-((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)\gamma_-(a) + t\gamma_-(b).$$

La fonction γ_- est donc convexe.

Partie D - Formule explicite pour la courbe d'incertitude γ_-

Q26. Posons $s = \sigma_S^2(y)$. Soit $x \in K_s$. En reprenant le calcul mené en **Q19**, mais cette fois avec la matrice symétrique réelle $M(\alpha)$, on a

$$\mu_\alpha^- \leqslant x^T M(\alpha) x \leqslant \mu_\alpha^+$$

et comme $y \in E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha))$ et $\|y\| = 1$, on a aussi $y^T M(\alpha) y = \mu_\alpha^-$.

On en déduit que $y^T(D - \alpha L_A)y \leqslant x^T(D - \alpha L_A)x$, or $y^T L_A y = x^T L_A x = s$ donc $y^T D y \leqslant x^T D x$.

Puisque $\|x\| = \|y\| = 1$, on a montré que $\sigma_M^2(y) \leqslant \sigma_M^2(x)$.

Ainsi $\sigma_M^2(y) = \min\{\sigma_M^2(x),\ x \in K_s\} = \gamma_-(s) = \gamma_-(\sigma_S^2(y))$.

Q27. $M(\alpha) - (1-\alpha)I_N = D - I_n - \alpha(L_A - I_n) = \begin{pmatrix} -1-\alpha(N-2) & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car ses deux premières colonnes sont non colinéaires ($\alpha \neq 0$) et ses colonnes d'indices 2 à N sont égales.

Son noyau est donc de dimension $N - 2 > 0$, donc $1 - \alpha$ est valeur propre de $M(\alpha)$, de multiplicité $N - 2$ car $M(\alpha)$ est diagonalisable en tant qu'élément de $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

Par définition de μ_α^- et de μ_α^+ on a donc $\mu_\alpha^- \leqslant 1 - \alpha \leqslant \mu_\alpha^+$.

Q28. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant du trinôme du second degré

$$P_{a,b,c} = (X-a)(X-b) + \lambda(X-c) = X^2 + (\lambda - a - b)X + (ab - \lambda c)$$

est

$$\Delta = (\lambda - a - b)^2 - 4(ab - \lambda c) = \lambda^2 + 2(2c - a - b)\lambda + (a-b)^2$$

$P_{a,b,c}$ est à racines réelles donc $\Delta \geqslant 0$. C'est vrai pour tout réel λ donc le discriminant du trinôme du second degré $T = X^2 + 2(2c - a - b)X + (a-b)^2$ est négatif.

On a donc $(2c - a - b)^2 - (a-b)^2 \leqslant 0$, i.e. $4(c-a)(c-b) \leqslant 0$, d'où $c \in [a, b]$.

Q29. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\chi_{N(\lambda)}(X) = \det(XI_N - M(\alpha) + \lambda E_{1,1}) = \begin{vmatrix} X + \alpha(N-1) + \lambda & -\alpha & -\alpha & \dots & -\alpha \\ -\alpha & X - (\alpha - 1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X - (1-\alpha) & 0 \\ -\alpha & 0 & \dots & 0 & X - (1-\alpha) \end{vmatrix}$$

Par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne on a

$$\chi_{N(\lambda)}(X) = \begin{vmatrix} \lambda & -\alpha & -\alpha & \dots & -\alpha \\ 0 & X-(\alpha-1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X-(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X-(1-\alpha) \end{vmatrix} + \chi_{M(\alpha)}(X)$$

En développant le premier déterminant selon la première colonne on obtient

$$\chi_{N(\lambda)}(X) = \lambda(X-(1-\alpha))^{N-1} + \chi_{M(\alpha)}(X).$$

$1-\alpha$ est valeur propre de multiplicité $N-2$ de $M(\alpha)$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ distincts de $1-\alpha$ tels que $\chi_{M(\alpha)}(X) = (X-(1-\alpha))^{N-2}(X-a)(X-b)$. On peut choisir $a \leqslant b$. On a donc

$$\chi_{N(\lambda)}(X) = \lambda(X-(1-\alpha))^{N-2}(\lambda(X-(1-\alpha)) + (X-a)(X-b).$$

$N(\lambda)$ étant symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles, donc $\chi_{N(\lambda)}(X)$ n'a que des racines réelles, et c'est donc aussi le cas de $\lambda(X-(1-\alpha)) + (X-a)(X-b)$.

C'est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ donc par **Q28** on a $a \leqslant 1-\alpha \leqslant b$, mais comme $a \neq 1-\alpha$ et que $b \neq 1-\alpha$ on conclut que $a < 1-\alpha < b$.

a est donc la plus petite valeur propre de $M(\alpha)$ et b la plus grande. Finalement $\boxed{\mu_\alpha^- < 1-\alpha < \mu_\alpha^+}$.

Q30. Soit $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Pour tout $i \in [\![3, N]\!]$ posons $\varepsilon_i = (0, -1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ la composante égale à 1 étant la composante d'indice i.

On a $v \in V \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -\displaystyle\sum_{i=3}^{N} v_i \end{cases} \Leftrightarrow v = \displaystyle\sum_{i=3}^{N} v_i \varepsilon_i$, donc $V = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3, \dots, \varepsilon_N)$.

V est donc un sous-espace de $\mathbb{R}^N$ et la famille libre $(\varepsilon_3, \dots, \varepsilon_N)$ en est une base.

Q31. Pour tout $i \in [\![3, N]\!]$ on a $M(\alpha)\varepsilon_i = D\varepsilon_i - \alpha L_A \varepsilon_i = \varepsilon_i - \alpha\varepsilon_i = (1-\alpha)\varepsilon_i$.

On a donc $V \subset E_{1-\alpha}(M(\alpha))$, or ces sous-espaces sont de même dimension $N-2$ donc $V = E_{1-\alpha}(M(\alpha))$.

Les sous-espaces propres de la matrice symétrique réelle $M(\alpha)$ sont deux à deux orthogonaux et supplémentaires donc

$$E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_\alpha^+}(M(\alpha)) = (E_{1-\alpha}(M(\alpha)))^\perp = V^\perp.$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

$$\begin{aligned} x \in V^\perp &\Leftrightarrow \forall i \in [\![3, N]\!],\ x^T \varepsilon_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![3, N]\!],\ -x_2 + x_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![3, N]\!],\ x_i = x_2. \end{aligned}$$

On conclut que $E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_\alpha^+}(M(\alpha)) = \{(x_1, x_2, \dots, x_2),\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Q32. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_2) \in E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_\alpha^+}(M(\alpha))$.

Par la formule $(\star)$ de **Q13** on a

$$\begin{aligned} x^T L_A x &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} a_{i,j}(x_i - x_j)^2 \qquad \text{or } x_i - x_j = 0 si 2 \leqslant i < j \\ &= \sum_{j=2}^{N} a_{1,j}(x_1 - x_2)^2 \qquad \text{or } a_{1,j} = 1 \text{ pour } 2 \leqslant j \leqslant N \\ &= (N-1)(x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

En appliquant ce résultat à $x(\theta)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\sigma_S^2(x(\theta)) &= (N-1)\left(\cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{N-1}}\right)^2 \\
&= (N-1)\left(\cos^2(\theta) - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{N-1}} + \frac{\sin^2(\theta)}{N-1}\right) \\
&= (N-1)\frac{1+\cos(2\theta)}{2} - \sqrt{N-1}\,\sin(2\theta) + \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \\
&= \frac{N}{2} + \frac{N-2}{2}\cos(2\theta) - \sqrt{N-1}\sin(2\theta).
\end{aligned}$$

Q33. De ce qui précède on tire : $-\sin(2\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{N-1}}\left(\sigma_S^2(x(\theta)) - \dfrac{N}{2} - \dfrac{N-2}{2}\cos(2\theta)\right)$,

puis on calcule $\sigma_M^2(x(\theta)) = x(\theta)^T D x(\theta) = (N-1)\dfrac{\sin^2(\theta)}{N-1} = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, et on en déduit que

$$\begin{aligned}
-\sin(2\theta) &= \frac{1}{\sqrt{N-1}}\left(\sigma_S^2(x(\theta)) - \frac{N}{2} + (N-2)\left(\sigma_M^2(x(\theta)) - \tfrac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N-1}}\left(\sigma_S^2(x(\theta)) + (N-2)\sigma_M^2(x(\theta)) - (N-1)\right)
\end{aligned}$$

Q34. On remarque que $(1-2\sigma_M^2(x(\theta))^2 = \cos^2(2\theta)$ et puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$ il vient par **Q33**

$$(1-2\sigma_M^2(x(\theta))^2 + \frac{1}{N-1}\left(\sigma_S^2(x(\theta)) + (N-2)\sigma_M^2(x(\theta)) - (N-1)\right)^2 = 1$$

d'où $\boxed{(N-1)(1-2\sigma_M^2(x(\theta))^2 + \left(\sigma_S^2(x(\theta)) + (N-2)\sigma_M^2(x(\theta)) - (N-1)\right)^2 = N-1}$.

Q35. La voie proposée par l'énoncé me paraît impraticable. La démarche naturelle serait, pour $s \in [0, \lambda_N]$ donné, de montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma_S^2(x(\theta)) = s$, puis de montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x(\theta) \in E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha))$. Alors par **Q26** on aurait $\sigma_M^2(x(\theta)) = \gamma_-(\sigma_S^2(x(\theta))) = \gamma_-(s)$. Si cela était acquis, on conclurait de la manière suivante :

Pour simplifier les écritures posons $t = \sigma_M^2(x(\theta)) = \gamma_-(s)$.

Par la question précédente on a

$$(N-1)(1-2t)^2 + (s + (N-2)t - (N-1))^2 = N-1,$$

donc en développant t vérifie l'équation du second degré :

$$N^2t^2 - 2(N(N-1) - (N-2)s)t + (s-(N-1))^2 = 0.$$

Le discriminant réduit de cette équation est

$$\begin{aligned}
\Delta' &= (N(N-1) - (N-2)s)^2 - N^2(s-(N-1))^2 \\
&= \big(N(N-1) - (N-2)s + N(s-(N-1))\big)\big(N(N-1) - (N-2)s - N(s-(N-1))\big) \\
&= 4s(N^2 - (s+1)N + s) = 4s(N-1)(N-s) \geqslant 0
\end{aligned}$$

On a donc $t = \dfrac{N(N-1) - (N-2)s \pm 2\sqrt{s(N-1)(N-s)}}{N^2}$.

Pour trancher sur le signe devant le radical, remarquons que la quantité $\sqrt{s(N-1)(N-s)}$ ne s'annule pas sur $]0, \lambda_N[=]0, N[$ et que γ_- est continue sur cet intervalle car convexe sur $[0, N]$.

Le signe devant le radical est donc toujours $+$ ou toujours $-$, car un changement de signe sur $]0, N[$ induirait une discontinuité (en 0 et en N le radical s'annule donc le signe est indifférent).

Or $\gamma_-(N-1) = 0$ par **Q22**, donc le signe devant le radical est $-$, et on a donc pour tout $s \in [0, \lambda_N]$,

$$\gamma_-(t) = \frac{N(N-1) - (N-2)s - 2\sqrt{s(N-1)(N-s)}}{N^2}.$$

Malheureusement montrer l'existence d'un θ convenable m'échappe totalement.

Je propose donc une démarche différente :

Soit $s \in [0, \lambda_N]$.

Par **Q23** on peut trouver x non nul dans $E_{\lambda_1}(L_A) \oplus E_{\lambda_N}(L_A)$ tel que $\sigma_S^2(x) = s$. Par **Q19** on peut choisir x unitaire. Remarquons que $V = E_1(L_A)$ (calcul sans difficulté) et les trois sous-espaces propres de L_A étant supplémentaires orthogonaux on a :

$$E_{\lambda_1}(L_A) \oplus E_{\lambda_N}(L_A) = V^T = \{(x_1, x_2, \dots, x_2),\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}\} = E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_\alpha^+}(M(\alpha)).$$

La droite vectorielle $E_{\lambda_1}(L_A)$ est engendrée par le vecteur unitaire $u = \dfrac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{1}_N$ et la droite vectorielle $E_{\lambda_N}(L_A)$ est engendrée par le vecteur unitaire $v = \dfrac{1}{\sqrt{N(N-1}}(N-1, -1, \dots, -1)$.

(u, v) forme une base orthonormée du plan $E_{\lambda_1}(L_A) \oplus E_{\lambda_N}(L_A)$.

Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $x = au + bv$.

Alors, puisque $L_A u = 0$ et $L_A v = Nv$, et que x, u et v sont unitaires,

$$\begin{aligned}\sigma_S^2(x) &= x^T L_A x = a^2 u^T L_A u + 2ab u^T L_A v + b^2 v^T L_A v \\ &= b^2 v^T L_A v = N b^2\end{aligned}$$

d'où $b = \pm\sqrt{\dfrac{s}{N}}$ et $a = \pm\sqrt{\dfrac{N-s}{N}}$.

On calcule alors

$$\begin{aligned}x^T D x = a^2 u^T D u + 2ab u^T D v + b^2 v^T D v &= \frac{N-1}{N}a^2 - 2ab\frac{\sqrt{N-1}}{N} + b^2\frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{N^2}\left((N-1)(N-s) \pm 2\sqrt{s(N-1)(N-s)} + s\right) \\ &= \frac{1}{N^2}\left(N(N-1) - (N-2)s \pm 2\sqrt{s(N-1)(N-s)}\right)\end{aligned}$$

En prenant $a = \sqrt{\dfrac{N-s}{N}}$ et $b = \sqrt{\dfrac{s}{N}}$, on a donc trouvé $x \in E_{\lambda_1}(L_A) \oplus E_{\lambda_N}(L_A)$ tel que

$$\sigma_S^2(x) = s \quad \text{et} \quad \sigma_M^2(x) = \frac{1}{N^2}\left(N(N-1) - (N-2)s - 2\sqrt{s(N-1)(N-s)}\right).$$

Notons alors $x = (x_1, x_2, \dots, x_2)$.

On a $x_1 = \dfrac{\sqrt{N-s}}{N} + \dfrac{\sqrt{s(N-1)}}{N}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{N-s}}{N} - \dfrac{\sqrt{s}}{N\sqrt{N-1}}$.

Montrons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que x soit vecteur propre de $M(\alpha)$ associé à la valeur propre μ_α^-.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}M(\alpha)x = \lambda x \Leftrightarrow Dx - \alpha L_A x = \lambda x &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} (N-1)(x_1 - x_2) \\ -(x_1 - x_2) \\ \vdots \\ -(x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1\lambda + (N-1)(x_1 - x_2)\alpha = 0 \\ x_2\lambda - (x_1 - x_2)\alpha = x_2 \end{cases} \qquad (S)\end{aligned}$$

$x_1 = x_2$ si et seulement si $s = 0$ et on sait que $\gamma_-(0) = \dfrac{N-1}{N}$ par **Q21**, donc l'expression de l'énoncé est correcte pour $s = 0$ et on peut considérer que $x_1 \neq x_2$.

$x_1 + (N-1)x_2 = 0$ si et seulement si $x \in E_{\lambda_N}(L_A)$, donc si et seulement si $s = N$ et on sait que $\gamma_-(N) = \dfrac{1}{N}$ par **Q21**, donc l'expression de l'énoncé est correcte pour $s = N$ et on peut considérer que $x_1 + (N-1)x_2 \neq 0$.

Alors

$$(S) \Leftrightarrow \lambda = \frac{(N-1)x_2}{x_1 + (N-1)x_2} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{-x_1x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 + (N-1)x_2)}$$

$x_1 \neq 0$ car $s = 0$ et $s = N$ est impossible. De plus $x_2 = 0 \Leftrightarrow s = N-1$ or on a vu en **Q22** que $\gamma_-(N-1) = 0$ donc l'expression de l'énoncé convient pour $s = N-1$.

On peut donc supposer que $s \neq N-1$ et on a $x_2 \neq 0$.

Alors $\alpha = \dfrac{-x_1x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 + (N-1)x_2)} \neq 0$ et x est vecteur propre de $M(\alpha)$ associé à la valeur propre $\lambda = \dfrac{(N-1)x_2}{x_1 + (N-1)x_2}$.

On calcule alors $\lambda - (1-\alpha)$ pour montrer que $\lambda = \mu_\alpha^-$:

$$\begin{aligned}
\lambda - (1-\alpha) &= \frac{(N-1)x_2}{x_1 + (N-1)x_2} - 1 + \frac{-x_1x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 + (N-1)x_2)} \\
&= \frac{(N-1)x_2(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)(x_1 + (N-1)x_2) - x_1x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 + (N-1)x_2)} \\
&= \frac{-x_1^2}{(x_1 - x_2)(x_1 + (N-1)x_2)}
\end{aligned}$$

or $x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{s(N-1)}}{N} + \dfrac{\sqrt{s}}{N\sqrt{N-1}} > 0$

et $x_1 + (N-1)x_2 = \sqrt{N-s} > 0$ donc $\lambda - (1-\alpha) < 0$ et $\lambda = \mu_\alpha^-$ par **Q29**.

On conclut par **Q26** que $\gamma_-(s) = \gamma_-(\sigma_S^2(x)) = \sigma_M^2(x) = \dfrac{1}{N^2}\left(N(N-1) - (N-2)s - 2\sqrt{s(N-1)(N-s)}\right)$, ce qui achève la démonstration.