

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES PC 2 MINES 2001
PREMIÈRE PARTIE

I-1. Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle :

- a. Soit $f_\lambda : x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ solution de E_λ sur $] -R, R[$, alors sur cet intervalle, f_λ est de classe C^∞ et sa dérivée première est la somme de la série dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, sa dérivée seconde est la somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

On a donc

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) = 0$$

ce qui après arrangement donne : $\sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda) a_n \right) x^n - \lambda + a_1 = 0$

D'où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie par $\begin{cases} a_1 = \lambda \\ \forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} a_n \end{cases}$; on a donc pour tout $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k+\lambda)}{(n!)^2} \lambda$$

On aura en particulier :

$$f_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$f_0 = 1$$

$$f_{-1}(x) = 1 - x$$

$$f_{-2}(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

- b. f_λ est un polynôme si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. D'après l'expression de a_n précédemment déterminée, on en déduit que f_λ est un polynôme si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n + \lambda = 0$;

d'où f_λ est un polynôme si et seulement si $-\lambda \in \mathbb{N}$

Lorsque $\lambda = -p$, avec $p \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k-p)}{(n!)^2} (-p)$, donc

si $p \geq 1$, alors $a_p = (-1)^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p!)^2} (-p) = \frac{(-1)^p}{p!}$, formule qui reste valable si $p = 0$, puisqu'alors $a_0 = 1$,

d'où $a_p \neq 0$, et $a_{p+1} = 0$, puis $\forall n \geq p+1$, $a_n = 0$,

d'où f_{-p} est un polynôme de degré p et de coefficient dominant $\frac{(-1)^p}{p!}$

- c. Supposons que f_λ ne soit pas polynomiale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ (car d'après l'expression trouvée pour a_n , la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang si et seulement si il existe un entier n pour lequel $a_n = 0$)

et on a alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; la règle de d'Alembert permet alors d'affirmer que la série entière

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R = \infty$

I-2. Solution de l'équation différentielle E_1 :

- a. On effectue le changement de fonction inconnue $z = y' - y$; l'équation E_1 se transforme en une équation différentielle linéaire du premier ordre en z :

$$xz' + z = 0$$

Sur $]0, \infty[$, cette équation est résolue en z , et a pour solutions les fonction du type $x \mapsto a e^{-\int \frac{dx}{x}}$, soit $x \mapsto \frac{a}{x}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

On revient alors en y : $y' - y = \frac{a}{x}$; c'est encore une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue en y , mais qui n'est plus homogène ; on applique la méthode de variation de la constante, en

cherchant y sous la forme $\varphi(x)e^x$, ce qui conduit à l'équation $\varphi'(x) = \frac{ae^{-x}}{x}$.

Finalement, on peut conclure que f_1 est une fonction du type $x \mapsto ae^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + be^x$, où a et b sont des réels quelconques.

Autre méthode : on remarque que $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation et on cherche les solutions sous la forme $x \mapsto z(x)e^x$.

b. La résolution sur $] -\infty, 0[$ est la même, et on obtient les solutions sous la forme

$$x \mapsto \alpha e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \beta e^x \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels quelconques.}$$

c. $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1[$ et $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$, donc lorsque $x \rightarrow 0$, on a : $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$, et donc $\lim_{x \rightarrow 0} e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty$; de même, $\lim_{x \rightarrow 0} e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty$;

Si φ est solution de E_1 sur \mathbb{R} , sa restriction à $]0, +\infty[$ est solution de E_1 sur $]0, +\infty[$, sa restriction à $] -\infty, 0[$ est solution de E_1 sur $] -\infty, 0[$, et de plus φ est continue en 0, d'où si φ est solution sur \mathbb{R} , alors nécessairement il existe un réel a tel que $\varphi : x \mapsto ae^x$ sur \mathbb{R}^* et donc aussi en 0 par continuité. Réciproquement, il est aisé de vérifier que les fonctions $x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont solutions de E_1 sur \mathbb{R} .

Conclusion : $\boxed{\text{les solutions de } E_1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x \mapsto ae^x \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$

I-3. Relation entre les fonctions f_λ :

a. f_λ est solution de $E_\lambda : xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0$ sur \mathbb{R} .

g_λ est définie par $g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x)$, donc g_λ est deux fois continûment dérivable, et on a :

$f_\lambda(x) = e^x g_\lambda(-x)$, $f'_\lambda(x) = e^x (g_\lambda(-x) - g'_\lambda(-x))$, $f''_\lambda(x) = e^x (g_\lambda(-x) - 2g'_\lambda(-x) + g''_\lambda(-x))$
on a donc la relation :

$$\begin{aligned} -x(g_\lambda(x) - 2g'_\lambda(x) + g''_\lambda(x)) + (1+x)(g_\lambda(x) - g'_\lambda(x)) - \lambda g_\lambda(x) &= 0 \text{ ou encore :} \\ xg''_\lambda(x) + (1-x)g'_\lambda(x) + (\lambda-1)g_\lambda(x) &= 0 \end{aligned}$$

ainsi, g_λ est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\boxed{xy'' + (1-x)y' - (1-\lambda)y = 0}$$

b. Ce qui signifie que g_λ est solution sur \mathbb{R} de l'équation $E_{1-\lambda}$, or $g_\lambda(0) = f_\lambda(0) = 1$, de plus g_λ est produit de deux fonctions développables en séries entières sur \mathbb{R} , donc g_λ est développable en séries entières sur \mathbb{R} . Ainsi, g_λ est solution développable en séries entières sur \mathbb{R} de E_λ telle que $g_\lambda(0) = 1$, donc par unicité (admise dans l'énoncé) on peut affirmer $g_\lambda = f_{1-\lambda}$, ce qui démontre la relation vérifiée par tous réels λ et x :

$$\boxed{f_1 - \lambda(x) = e^x f_\lambda(-x)}$$

c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$;

D'après la relation précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$;

or d'après **I-1.** f_{1-p} est la fonction polynomiale $x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{p-1} a_n x^n$ où $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1-p)}{(n!)^2} = (-1)^n \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!(n!)^2}$, d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f_p(x) = e^x + \sum_n = 1^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!(n!)^2} x^n e^x}$$

en particulier pour tout réel x :

$$\boxed{f_2(x) = e^x + xe^x \text{ et } f_3(x) = e^x + 2xe^x + \frac{1}{2}x^2 e^x}$$

d. Soit p un entier supérieur ou égal à 1, alors pour tout réel x : $f_{p+1}(x) = e^x f_{-p}(-x)$ et $f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$, de plus, f_{-p} et f_{1-p} , sont des polynômes de degré respectif p et $p-1$, donc au voisinage de $+\infty$, $x f_p(x)$ ne s'annule pas et ainsi l'expression $\frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)}$ est correctement définie. D'après **I-1.b.** on peut alors préciser :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{(-1)^p}{p!} x^p}{\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} x^p}$$

$$\text{d'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)} = \frac{-1}{p}}$$

I-4. Application à une équation aux dérivées partielles :

On pose $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\lambda(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, alors on a : $\frac{\partial r}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{r}$
 $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{1}{2} x r^{-\frac{5}{2}} f_\lambda(r) + x r^{-\frac{3}{2}} f'_\lambda(r) = x r^{-\frac{5}{2}} \left(-\frac{1}{2} f_\lambda(r) + r f'_\lambda(r)\right)$, puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y, z) &= x r^{-\frac{5}{2}} \left(-\frac{x}{2r} f'_\lambda(r) + \frac{x}{r} f'_\lambda(r) + x f''_\lambda(r)\right) + \left(r^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2} \frac{x^2}{r} r^{-\frac{7}{2}}\right) \left(-\frac{1}{2} f_\lambda(r) + r f'_\lambda(r)\right) \\ &= \left(x^2 r^{-\frac{5}{2}}\right) f''_\lambda(r) + \left(\frac{x^2}{2} r^{-\frac{7}{2}} + r^{-\frac{3}{2}} - \frac{5}{2} x^2 r^{-\frac{7}{2}}\right) f'_\lambda(r) + \left(r^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2} x^2 r^{-\frac{9}{2}}\right) \left(-\frac{1}{2} f_\lambda(r)\right) \\ &= \left(x^2 r^{-\frac{5}{2}}\right) f''_\lambda(r) + \left(r^{-\frac{3}{2}} - 2x^2 r^{-\frac{7}{2}}\right) f'_\lambda(r) + \left(r^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2} x^2 r^{-\frac{9}{2}}\right) \left(-\frac{1}{2} f_\lambda(r)\right) \end{aligned}$$

on en déduit par symétrie que :

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f''_\lambda(r) + \frac{1}{r\sqrt{r}} f'_\lambda(r) - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2 \sqrt{r}} f_\lambda(r)$$

puis $-\frac{r}{z} \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{r\sqrt{r}} \left(\frac{1}{2} f_\lambda(r) - r f'_\lambda(r)\right)$ et $\frac{1}{4r^2} F(x, y, z) = \frac{1}{4r^2 \sqrt{r}} f_\lambda(r)$, d'où

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{r}{z} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{4r^2} F\right)(x, y, z) \\ &= \frac{1}{r\sqrt{r}} r f''_\lambda(r) + \frac{1}{r\sqrt{r}} (1-r) f'_\lambda(r) + \frac{1}{r\sqrt{r}} \left(\frac{1}{2} f_\lambda(r)\right) \\ &= \frac{1}{r\sqrt{r}} \left(r f''_\lambda(r) + (1-r) f'_\lambda(r) + \frac{1}{2} f_\lambda(r)\right) \end{aligned}$$

donc si F est solution de l'équation aux dérivées partielles (P) alors $r f''_\lambda(r) + (1-r) f'_\lambda(r) + \frac{1}{2} f_\lambda(r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, d'où on choisit $\boxed{\lambda = \frac{-1}{2}}$

SECONDE PARTIE

II-1. Classique : $I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2+2p} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = I_p - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta \cos^2 \theta d\theta$;

or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta \cos^2 \theta d\theta = \left[\frac{\sin^{2p+1} \theta}{2p+1} \cos \theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2p+2} \theta}{2p+1} d\theta = \frac{1}{2p+1} I_{p+1}$; d'où $\boxed{I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p}$; par ailleurs $I_0 = \frac{\pi}{2}$, donc une récurrence élémentaire permet d'établir que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad I_p = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}}$$

II-2. Relations entre les fonctions φ et $f_{1/2}$:

a. La fonction $(x, \theta) \mapsto e^{x \sin^2 \theta}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}]$, donc φ est définie continue sur \mathbb{R} .

On a en fait : $(x, \theta) \mapsto e^{x \sin^2 \theta}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}]$, donc φ est également de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et de plus

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(e^{x \sin^2 \theta}\right) d\theta = \varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \theta e^{x \sin^2 \theta} d\theta.$$

b. Déterminons déjà le développement en séries entières de $x \mapsto e^{x \sin^2 \theta}$:

$e^{x \sin^2 \theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{2n} \theta}{n!} x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, or cette série est normalement convergente en θ et ceci pour tout x , puisque $\left\| \theta \mapsto \frac{\sin^{2n} \theta}{n!} x^n \right\|_\infty = \frac{x^n}{n!}$, donc par intégration en θ , il vient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n.}$$

Posons $\alpha_n = \frac{I_n}{n!}$, alors $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{2n+1}{2n+2}}{n+1} = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)^2}$, donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence, et on a $\alpha_n = \frac{\pi}{2} a_n$ (en regardant au rang initial $n=0$) ; d'où $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} f_{1/2}}$

II-3. Encadrement de $\varphi(x)$:

- a. Par convexité de \exp , $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$ (le graphe de \exp est situé au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente en $(0, 1)$)
et donc pour tout réel $u < 1$, $e^{-u} \geq 1 - u > 0$, d'où en inversant :

$$\boxed{\forall u < 1, \quad e^u \leq \frac{1}{1-u}}$$

N.B. On peut aussi faire une étude sommaire de $x \mapsto (1-x)e^x - 1$

- b. Notons déjà que l'hypothèse $x < 1$ assure que $\theta \mapsto 1 - x \sin^2 \theta$ ne s'annule pas et donc que $\theta \mapsto \frac{1}{1-x \sin^2 \theta}$ est définie continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui justifie l'existence de $J(x)$.
Ensuite, les règles de Bioche invitent à effectuer le changement de variable $t = \tan \theta$, ce qui est justifié par le fait que $\theta \mapsto \tan \theta$ est \mathcal{C}^1 -bijectif de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$
Alors il vient $J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x(1-\frac{1}{1+t^2})} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2(1-x)}$; enfin on utilise encore le \mathcal{C}^1 -difféomorphisme : $v = t\sqrt{1-x}$ et on obtient : $J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dv}{\sqrt{1-x}}}{1+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} [\arctan v]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; finalement, on a démontré :

$$\boxed{J(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

- c. D'après **II-3.a**, pour tout réel $x < 1$, $e^{x \sin^2 \theta} \leq \frac{1}{1-x \sin^2 \theta}$, d'où par croissance de l'intégrale, pour tout réel $x < 1$, $\varphi(x) \leq J(x)$; par ailleurs, \exp étant à valeurs strictement positives, on a pour tout réel x , $0 \leq \varphi(x)$, et donc en utilisant le résultat de **II-3.b** :

$$\boxed{\forall x < 1 \quad 0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

- d. Posons $u = \sin \theta$, \mathcal{C}^1 -bijectif de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, 1[$ alors $\varphi(x) = \int_0^1 e^{xu^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, puis on effectue le changement \mathcal{C}^1 -bijectif $v = \sqrt{-x}u$, alors $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{x}}} dv$, et $1 + \frac{v^2}{x} \leq 1$ puisque $x \leq 0$
donc $\int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{x}}} dv \geq \int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2} dv$; de plus, puisque $x \leq -1$, on a $\int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2} dv \geq \int_0^1 e^{-v^2} dv$;
posons alors $A = \int_0^1 e^{-v^2} dv$, $A > 0$ et on peut conclure pour tout réel $x \leq -1$: $\varphi(x) \geq \frac{A}{\sqrt{-x}}$
- e. $f_{1/2} = \frac{2}{\pi} \varphi$; or pour tout réel x strictement inférieur à 1 : $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, donc
 $\forall x < 1 \quad 0 \leq f_{1/2}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, d'où le théorème d'encadrement des limites assure que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{1/2}(x) = 0$$

Cependant la minoration $\varphi(x) \geq \frac{A}{\sqrt{-x}}$ pour $x \leq -1$ montre que φ n'est pas intégrable sur $] -\infty, -1]$, donc $f_{1/2}$ n'est pas intégrable sur $] -\infty, -1]$

II-4. Etude d'une fonction h :

- a. On a en fait $h(x) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin^2 \theta} d\theta$ d'après les questions précédentes.
D'où

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}(1-2\sin^2 \theta)} d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2} \cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{2} \cos t} dt \quad (\text{changement } t = 2\theta) \end{aligned}$$

puis $\int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{2} \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2} \cos t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{x}{2} \cos t} dt$, mais $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{x}{2} \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{2} \cos u} du$ (en ayant posé $u = \pi - t$), donc $h(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2} \cos t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{2} \cos u} du \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ch} \left(\frac{x}{2} \cos \theta \right) d\theta$; en particulier, cela démontre que h est paire et de plus on a obtenu pour tout réel x : $h(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ch} \left(\frac{x}{2} \cos \theta \right) d\theta$

- b. Pour tout réel positif x et tout réel $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\text{ch} \left(x \frac{\cos \theta}{2} \right) \geq \frac{1}{2} e^{x \frac{\cos \theta}{2}} > 0$, donc
 $h(x) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x \frac{\cos \theta}{2}} d\theta \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x \frac{\sqrt{2}}{4}} d\theta \geq \frac{1}{4} e^{x \frac{\sqrt{2}}{4}}$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$

- c. Pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto \text{ch}\left(\frac{x \cos \theta}{2}\right)$ est croissante sur \mathbb{R}_+ (par croissance de ch sur \mathbb{R}^+).
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que h est croissante sur \mathbb{R}_+ (donc décroissante sur \mathbb{R}_- par parité de h) ; h est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , donc $h'(0) = 0$

