SESSION 2000

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 1

Partie I

1. a. L'inégalité $\forall(i,j),\ \forall k,\ |a_{ij}(k)-b_{ij}| \leq \sup\limits_{ij} |a_{ij}(k)-b_{ij}| = \|A(k)-B\|$ prouve que $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{ij}(k) = b_{ij}$ si $A(k)$ converge vers B.

Réciproquement, si $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{ij}(k) = b_{ij}$ pour tout (i,j), on a en particulier $\lim\limits_{k\to+\infty} \sup\limits_{ij} |a_{ij}(k)-b_{ij}| = 0$, ce qui montre que $A(k)$ converge vers B.

Cette équivalence est vraie en particulier pour les matrices colonnes (ou vecteurs).

b. Pour $i \in \{1,2,3\}$, soit X_i la matrice colonne ayant 1 en ligne i et des 0 ailleurs.
• $A(k)X_i$ est la $i^{ème}$ colonne de la matrice $A(k)$. On a la même propriété avec BX_i et B.
Si, pour toute matrice colonne X, $A(k)X$ converge vers BX, alors $A(k)X_i$ converge élément par élément vers la $i^{ème}$ colonne de la matrice B, autrement dit, d'après l'équivalence de la question précédente, $A(k)$ converge vers B.

• Réciproquement, soit $X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3$ une matrice colonne 3x1 quelconque.

Notant $Y = \big(y_i(k)\big) = A(k)X$, on a : $y_i(k) = \sum\limits_{j=1}^{j=3} a_{ij}(k)x_j$. Alors, si $A(k)$ converge vers B, comme X est fixe, $\lim\limits_{k\to+\infty} y_i(k) = \sum\limits_{j=1}^{j=3} b_{ij}x_j$, ce qui est le terme général de BX : $A(k)X$ converge vers BX.

ou bien Le terme général de la matrice $Y(k) = A(k)X - BX$ est $y_i(k) = \sum\limits_{j=1}^{j=3} (a_{ij}(k)-b_{ij})x_j$. Donc :

$$|y_i(k)| \leq \sum_{j=1}^{j=3} |a_{ij}(k)-b_{ij}|\,|x_j| \leq \sum_{j=1}^{j=3} \|A(k)-B\|\,\|X\| = 3\,\|X\|\,\|A(k)-B\|.$$

Puis $\sup\limits_{i} |y_i(k)| = \|A(k)X - BX\| \leq 3\,\|X\|\,\|A(k)-B\|$, ce qui montre que $A(k)X$ converge vers BX si $A(k)$ converge vers B.

c. • Soit C une matrice 3x3 (inversible ou pas), de colonnes C_1, C_2 et C_3. La matrice $A(k)C$ a pour colonnes $A(k)C_1$, $A(k)C_2$ et $A(k)C_3$, colonnes qui convergent, d'après la question précédente, vers la matrice de colonnes BC_1, BC_2 et BC_3, c'est-à-dire la matrice BC.

• Réciproquement, soit C une matrice matrice 3x3 inversible. Si la matrice $A(k)C$ converge vers BC, d'après le résultat précédent, $\big(A(k)C\big)C^{-1}$ converge vers $(BC)C^{-1}$, c'est-à-dire $A(k)$ converge vers B.

d. $\forall(i,j),\ \big|\big(a_{ij}(k)+c_{ij}(k)\big) - \big(b_{ij}+d_{ij}\big)\big| \leq \big|a_{ij}(k)-b_{ij}\big| + \big|c_{ij}(k)-d_{ij}\big| \leq \|A(k)-B\| + \|C(k)-D\|$.
En prenant le $\sup\limits_{ij}$, cela donne : $\|(A(k)+C(k)) - (B+D)\| \leq \|A(k)-B\| + \|C(k)-D\|$, ce qui montre que, si $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k) = B$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} C(k) = D$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} (A(k)+C(k)) = B+D$.

2. a. Soit $C = AB = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} a_{ik}b_{kj}$ pour $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$.

Alors : $|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{k=3} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{k=3} \|A\|\,\|B\| = 3\,\|A\|\,\|B\|$. D'où : $\sup_{ij} |c_{ij}| = \|AB\| \leq 3\,\|A\|\,\|B\|$.

- Pour $k = 1$, $\|A\| = \left\|A^1\right\| = 3^0\,\|A\|$.

- Si, pour un entier naturel k non nul, $\left\|A^k\right\| \leq 3^{k-1}\,\|A\|^k$, alors :
$\left\|A^{k+1}\right\| = \left\|A^kA\right\| \leq 3\left\|A^k\right\|\|A\| \leq 3 \times 3^{k-1}\,\|A\|^k\,\|A\| = 3^k\,\|A\|^{k+1}$, ce qui est le résultat attendu pour $k+1$.

- Le théorème de récurrence permet de dire que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\left\|A^k\right\| \leq 3^{k-1}\,\|A\|^k$.

b. Si A est inversible, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, A^k est inversible et $\left(A^k\right)^{-1} = A^{-k}$.

Alors : $1 = \|I\| = \left\|A^{-k}A^k\right\| \leq 3\left\|A^{-k}\right\|\left\|A^k\right\| = 3\left\|\left(A^{-1}\right)^k\right\|\left\|A^k\right\| \leq 3\left\|A^k\right\| \times 3^{k-1}\left\|A^{-1}\right\|^k$, c'est-à-dire $1 \leq 3^k\left\|A^k\right\|\left\|A^{-1}\right\|^k$. Ainsi, $\left\|A^{-1}\right\| > 0$, $\left\|A^k\right\| > 0$ et $\left\|A^k\right\| \geq \dfrac{1}{3^k\left\|A^{-1}\right\|^k}$, puis : $\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \geq \dfrac{1}{3\left\|A^{-1}\right\|}$.

On suppose que $\lim_{k\to+\infty} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} = 0$. Si A était inversible, en prenant la limite quand k tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on aurait : $0 \geq \dfrac{1}{3\left\|A^{-1}\right\|} > 0$, ce qui est impossible. Ainsi, la matrice A n'est pas inversible si $\lim_{k\to+\infty} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} = 0$.

3. a. $(I-A)\left(\sum_{i=0}^{k} A^i\right) = \sum_{i=0}^{k} A^i - \sum_{i=0}^{k} A^{i+1} = \sum_{i=0}^{k} A^i - \sum_{i=1}^{k+1} A^i = I - A^{k+1}$.

b. En prenant $A(k) = A^k$, la question **1.b.** indique que, si A^k converge vers 0, alors pour toute matrice colonne 3x1 notée X, A^kX converge vers $0X = 0$.

Soit X une matrice colonne du noyau de $A - I$.
Comme I, A et ses puissances commutent entre elles, on a, pour tout entier naturel k :
$0 = \left(\sum_{i=0}^{k} A^i\right)(A-I)X = -(I-A)\left(\sum_{i=0}^{k} A^i\right)X = -(I-A^{k+1})X = A^{k+1}X - X$.

Comme $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$, le résultat précédent indique que $\lim_{k\to+\infty} A^{k+1}X = 0$. Puis, la question **1.c.** indique que $0 = \lim_{k\to+\infty} (A^{k+1}X - X) = 0 - X = -X$, c'est-à-dire que $X = 0$.

Ainsi, le noyau de $A - I$, matrice carrée, ne contient que la matrice colonne nulle : la matrice $A - I$ est inversible.

Avec le calcul de la question **3.a.**, on a donc : $-\sum_{i=0}^{k} A^i = (A-I)^{-1} - A^{k+1}(A-I)^{-1}$, puis les questions **1.c.** et **1.d.** indiquent que : $\lim_{k\to+\infty} \left((A-I)^{-1} - A^{k+1}(A-I)^{-1}\right) = (A-I)^{-1} - 0 = (A-I)^{-1}$, ce qui assure l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty} A^i$ et donne $(A-I)^{-1} = -\sum_{i=0}^{+\infty} A^i$.

4. Soit P une matrice inversible.

- En utilisant deux fois la question **2.a.**, la majoration
$\left\|P^{-1}A(k)P - P^{-1}BP\right\| = \left\|P^{-1}(A(k)-B)P\right\| \leq 9\left\|P^{-1}\right\|\|A(k)-B\|\,\|P\|$ montre que, si $\lim_{k\to+\infty} A(k) = B$, alors $\lim_{k\to+\infty} P^{-1}A(k)P = P^{-1}BP$.

- Le même raisonnement, avec $A(k) - B = P\left(P^{-1}A(k)P - P^{-1}BP\right)P^{-1}$, donne l'autre implication.

Le choix $A(k) = A^k$ et l'égalité $P^{-1}A^kP = \left(P^{-1}AP\right)^k$ donnent l'équivalence : $\lim_{k\to+\infty} A^k = B$ si et seulement si $\lim_{k\to+\infty} \left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}BP$.

5. **a.** La matrice A, à éléments complexes, est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Plus précisément, il existe une matrice de passage (donc inversible) P telle que $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Par récurrence, on montre que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & a_k & b_k \\ 0 & \lambda_2^k & c_k \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, comme $\lim_{k\to+\infty} A^k = B$, on a $\lim_{k\to+\infty} T^k = P^{-1}BP$.

D'après la forme triangulaire de T^k, pour que la limite de T^k existe quand k tend vers $+\infty$, il faut que les trois λ_i vaillent 1 ou aient un module strictement inférieur à 1. Puis, pour que la limite soit inversible, il faut que la limite des chacun de ses termes diagonaux ne soit pas pas nulle. Il est donc nécessaire que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

On doit donc avoir $T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Un calcul par récurrence donne alors : $T^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & kb + \frac{1}{2}k(k-1)ac \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $k \in \mathbf{N}$, ce qui montre que T^k n'a de limite que si $a = b = c = 0$.

Ainsi, $T = I$, donc $A = PTP^{-1} = I$ et $B = I$.

Réciproquement, si $A = I$, on a bien les résultats demandés.

b. Si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre (non nul) associé, on a : $AX = \lambda X$, puis, par récurrence, $A^kX = \lambda^kX$, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

Comme $\lim_{k\to+\infty} A^k = B$, d'après la question **1.b.**, $\lim_{k\to+\infty} A^kX = BX$. Donc λ^kX converge vers une matrice colonne BX. D'après la question **1.a.**, il y a convergence coefficient par coefficient, ce qui nécessite la convergence de λ^k puisque un coefficient (au moins) de X est non nul. Ainsi, $\lambda = 1$ ou $|\lambda| < 1$.

c. Comme A est diagonalisable, il existe une matrice P telle que $D = P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Alors $\left(P^{-1}AP\right)^k = D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k)$.

Comme $1 \notin \operatorname{Sp}(A)$, chaque λ_i est de module strictement inférieur à 1. Donc $\lim_{k\to+\infty} D^k = \operatorname{diag}(0,0,0) = 0$.

Comme, d'autre part, D^k tend vers $P^{-1}BP$, on en déduit que $P^{-1}BP = 0$, c'est-à-dire que B est nulle.

Si $1 \in \operatorname{Sp}(A)$, comme $A \neq I$, il y a 2 possibilités, en ordonnant les modules des valeurs propres :

- si $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| < |\lambda_3| = \lambda_3 = 1$, alors D^k tend vers $\operatorname{diag}(0,0,1) = P^{-1}BP$;
- si $0 \leq |\lambda_1| < |\lambda_2| = \lambda_2 = |\lambda_3| = \lambda_3 = 1$, alors D^k tend vers $\operatorname{diag}(0,1,1) = P^{-1}BP$.

Dans les deux cas, B est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(B) = \{0,1\}$.

6. Soit $V(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} B^i$. Avec $A = PBP^{-1}$, on a : $PV(k)P^{-1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} PB^iP^{-1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} A^i$.

Comme $\lim_{k\to+\infty} V(k) = \exp(B)$, la question **4.a.** indique que $\lim_{k\to+\infty} PV(k)P^{-1}$ existe et est $P\exp(B)P^{-1}$, ce qui assure l'existence de la limite de $\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} A^i$, c'est-à-dire l'existence de $\exp(A)$ et l'égalité : $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

Partie II

1. a. Avec $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, on obtient :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 2b \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix},\ M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 3b^2 \\ 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix} \text{ et } Q^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix},\ Q^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

b. Avec $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, un calcul par récurrence donne :

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a^k, b^k, c^k) \quad \text{pour } k \in \mathbf{N}^* \quad (\text{et pour } k = 0 \text{ si } abc \neq 0)$$

$$M^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & kb^{k-1} \\ 0 & 0 & b^k \end{pmatrix} \quad \text{pour } k \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\} \quad (\text{et pour } k = 1 \text{ si } b \neq 0)$$

$$Q^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} & \frac{1}{2}\,k(k-1)a^{k-2} \\ 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix} \quad \text{pour } k \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\} \quad (\text{et pour } k \in \mathbf{N} \text{ si } a \neq 0).$$

2. a. Ainsi, D^k converge si, et seulement si, les suites (a^k), (b^k) et (c^k) convergent, c'est-à-dire si, et seulement si, a, b et c valent 1 ou ont un module strictement inférieur à 1.

Dans ce cas : $\lim\limits_{k\to+\infty} D^k = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ où, par exemple, $\alpha = 1$ si $a = 1$ et $\alpha = 0$ si $|a| < 1$.

M^k converge si, et seulement si, les suites (a^k), (b^k) et (kb^{k-1}) convergent, c'est-à-dire si, et seulement si, $(a = 1$ ou $|a| < 1)$ et $|b| < 1$. Alors : $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha = 1$ si $a = 1$ et $\alpha = 0$ si $|a| < 1$.

Q^k converge si, et seulement si, les suites (a^k), (ka^{k-1}) et $\left(\frac{1}{2}\,k(k-1)a^{k-2}\right)$ convergent, c'est-à-dire si, et seulement si, $|a| < 1$. Dans ce cas : $\lim\limits_{k\to+\infty} Q^k = 0$.

b. On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} D^k = 0$, c'est-à-dire que $(|a|, |b|, |c|) \in [0, 1[^3$ (donc, par exemple, $a \neq 1$).

La question **I 3.b.** indique alors que $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} D^i = -(D - I)^{-1} = (I - D)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{1-a}, \dfrac{1}{1-b}, \dfrac{1}{1-c}\right)$.

c. On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = 0$, c'est-à-dire que $(|a|, |b|) \in [0, 1[^2$. La même question **I 3.b.** donne :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} M^i = (I - M)^{-1} = \frac{1}{(1-a)(1-b)^2} \begin{pmatrix} (1-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-a)(1-b) & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)(1-b) \end{pmatrix}.$$

d. On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} Q^k = 0$, c'est-à-dire que $|a| < 1$. La même question **I 3.b.** donne :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} Q^i = (I - Q)^{-1} = \frac{1}{(1-a)^3} \begin{pmatrix} (1-a)^2 & 1-a & 1 \\ 0 & (1-a)^2 & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $U(k) = \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{1}{i!}\, D^i = \operatorname{diag}\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{a^i}{i!}, 1 + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{b^i}{i!}, 1 + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{c^i}{i!}\right)$.

Par définition de la fonction exponentielle, on a, pour tout complexe z, $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{z^i}{i!}\right) = \exp(z) = e^z$.

Ceci assure la convergence de $U(k)$, c'est-à-dire l'existence de $\exp(D)$ et sa valeur : $\exp(D) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}\, D^i = \operatorname{diag}(e^a, e^b, e^c)$.

Pour $k \geq 2$, soit $V(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\, M^i = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & 0 & b_k \end{pmatrix}$.

D'après **II 1.b.** : $a_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{a^i}{i!}$, $b_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{b^i}{i!}$ et $c_k = 1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{ib^{i-1}}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b^i}{i!} = b_{k-1}$.

Pour tous a et b, $\lim_{k\to+\infty} a_k = e^a$, $\lim_{k\to+\infty} b_k = e^b = \lim_{k\to+\infty} c_k$.

Ainsi $V(k)$ converge, donc $\exp(M)$ existe et $\exp(M) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}\, M^i = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & e^b \\ 0 & 0 & e^b \end{pmatrix}$.

Pour $k \geq 3$, soit $W(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\, Q^i = \begin{pmatrix} a_k & b_k & c_k \\ 0 & a_k & b_k \\ 0 & 0 & a_k \end{pmatrix}$. La question **II 1.b.** donne : $a_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{a^i}{i!}$, $b_k = 1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{ia^{i-1}}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a^i}{i!}$ et $c_k = \frac{1}{2!} + \sum_{i=3}^{k} \frac{1}{2}\, \frac{i(i-1)a^{i-2}}{i!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-2} \frac{a^i}{i!} = \frac{1}{2}\Big(1 + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{a^i}{i!}\Big)$.

Pour tout a, $\lim_{k\to+\infty} a_k = e^a = \lim_{k\to+\infty} b_k$ et $\lim_{k\to+\infty} c_k = \frac{1}{2}\, e^a$.

Ainsi $W(k)$ converge, donc $\exp(Q)$ existe et $\exp(Q) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}\, Q^i = \begin{pmatrix} e^a & e^a & \frac{1}{2}\, e^a \\ 0 & e^a & e^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}$.

Partie III

1. a. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Comme N est nilpotente, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $N^n = 0$. Si λ est valeur propre de N et X matrice colonne propre associée (donc $X \neq 0$), alors $N^n X = \lambda^n X = 0$, avec $X \neq 0$, donc $\lambda^n = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$: $\operatorname{Sp}(N) = \{0\}$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ N est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{C}$. Comme les valeurs propres de N sont nulles, N est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.

$(iii) \Longrightarrow (iiii)$ Avec $T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $T^3 = 0$. Par conséquent, comme il existe P inversible telle que $N = PTP^{-1}$, on a : $N^3 = PT^3P^{-1} = P0P^{-1} = 0$.

$(iiii) \Longrightarrow (i)$ Comme $N^3 = 0$, N est nilpotente puisque $3 \geq 1$.

Supposons que l'équation $A^2 = N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, admette une solution A.

Comme $A^6 = N^3 = 0$, A est nilpotente. Donc $A^3 = 0$, d'après les équivalences précédentes, et, ainsi $A^4 = 0$. Or $A^4 = N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Par conséquent A n'existe pas : l'équation proposée n'a pas de solution.

b. On écrit $N = PTP^{-1}$ où T une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.
Ainsi $I - N = P(I-T)P^{-1}$ et $\det(I-N) = \det(I-T) = \det(I)$ puisque $I - T$ est triangulaire supérieure avec une diagonale de 1.

Comme $\det(I-N) = \det(I) = 1 \neq 0$, $I - N$ est inversible.

Comme $N^3 = 0$, $(I + N + N^2)(I - N) = (I - N)(I + N + N^2) = I - N^3 = I$; autrement dit : $(I-N)^{-1} = I + N + N^2$.

Le même calcul que pour $I - N$ donne, pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $\det(I - N - \lambda I) = \det\big((1-\lambda)I - N\big) = (1-\lambda)^3$, ce qui montre que $\mathrm{Sp}(N) = \{1\}$.

Si $I - N$ était diagonalisable, on aurait $I - N = PIP^{-1} = I$, c'est-à-dire $N = 0$, ce qui n'est pas vrai par hypothèse sur N. Donc $I - N$ n'est pas diagonalisable.

c. Comme $N^2 \neq 0$, il existe $X \in \mathbf{C}^3$ tel que $N^2 X \neq 0$ (on a donc aussi $X \neq 0$).
a, b et c étant trois complexes, en multipliant à gauche l'égalité $aX + bNX + cN^2X = 0$ par N^2, on obtient $aN^2X = 0$ (car $N^3 = N^4 = 0$), donc $a = 0$ puisque $N^2X \neq 0$.

Il reste $bNX + cN^2X = 0$, donc $bN^2X + cN^3X = 0$, c'est-à-dire $bN^2X = 0$, qui donne $b = 0$. On en déduit alors $c = 0$.

Ainsi, la famille (X, NX, N^2X) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbf{C}^3$, espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbf{C}$. Cette famille est donc une base de $\mathbf{C}^3$.

Comme $N(N^2X) = N^3X = 0$, dans cette base, l'endomorphisme N a pour matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{C}^3$ à la base (X, NX, N^2X), on a, par équivalences successives et en utilisant $P^{-1}NP = T$:
A commute avec $N \iff AN = NA$; A commute avec $N \iff (P^{-1}AP)(P^{-1}NP) = (P^{-1}NP)(P^{-1}AP)$;
A commute avec $N \iff BT = TB$ où $B = P^{-1}AP$.

Avec $B = (b_{ij})$, on a : $BT = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{32} & b_{33} & 0 \end{pmatrix}$ et $TB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ et la condition $BT = TB$ amène à $\begin{cases} b_{11} = b_{22} = b_{33} \\ b_{32} = b_{21} \\ b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire à B de la forme $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} = aI + bT + cT^2$.

Revenant à A, on en déduit que A commute avec N si, et seulement si $A = PBP^{-1} = (aI + bT + cT^2)P^{-1}$, c'est-à-dire si, et seulement si $A = aI + bN + cN^2$, c'est-à-dire si, et seulement si A est combinaison linéaire de I, N et N^2.

On a $\det(A) = \det(P^{-1}AP) = \det B$ et $\det(A - N) = \det(P^{-1}(A-N)P) = \det(B - T)$.

Comme $B = aI + bT + cT^2$ et $B - T = aI + (b-1)T + cT^2$ sont triangulaires inférieures avec des a sur la diagonale, on a : $\det(A - N) = \det(B - T) = a^3 = \det(B) = \det(A)$.

L'exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui donne $AN = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq NA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$A - N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det(A) = 0 \neq \det(A - N) = 1$, montre que la condition $AN = NA$ est nécessaire pour avoir $\det(A) = \det(A - N)$.

2. a. Comme N_1 et N_2 commutent, $(N_1N_2)^3 = N_1^3N_2^3 = 0 \times 0 = 0$; donc N_1N_2 est nilpotente.

N_1 et N_2 étant nilpotentes, $N_1^k = N_2^k = 0$ pour tout $k \geq 3$. Ainsi (N_1 et N_2 commutent), $(N_1 + N_2)^5 = N_1^5 + 5N_1^4N_2 + 10N_1^3N_2^2 + 10N_1^2N_2^3 + 5N_1N_2^4 + N_2^5 = 0$, ce qui montre que $N_1 + N_2$ est nilpotente.

b. Comme $(N_1+N_2)^3 = N_1^3+3(N_1^2N_2+N_1N_2^2)+N_2^3$, on a ainsi : $0 = N_1^2N_2+N_1N_2^2$ puisque N_1, N_2 et N_1+N_2 sont nilpotentes.

De même, $(N_1+N_2)^4 = N_1^4+4N_1^3N_2+6N_1^2N_2^2+4N_1N_2^3+N_2^4$ donne : $0 = N_1^2N_2^2$.

c. Comme les puissances d'une matrice N nilpotente sont nulles au plus à partir de son cube, l'exponentielle de N existe et est $\exp(N) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}\, N^i = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i!}\, N^i = I + N + \frac{1}{2}\, N^2$.

Ainsi, pour N_1 et N_2 nilpotentes, $\exp(N_1)\exp(N_2) = \Big(I+N_1+\dfrac{1}{2}\, N_1^2\Big)\Big(I+N_2+\dfrac{1}{2}\, N_2^2\Big)$

c'est-à-dire $\exp(N_1)\exp(N_2) = I+(N_1+N_2)+\dfrac{1}{2}\,(N_1^2+N_2^2+2N_1N_2)+\dfrac{1}{2}\,(N_1^2N_2+N_1N_2^2)+\dfrac{1}{4}\,(N_1^2N_2^2)$

c'est-à-dire $\exp(N_1)\exp(N_2) = I+(N_1+N_2)+\dfrac{1}{2}\,(N_1+N_2)^2$ puisque N_1 et N_2 commutent et avec les deux résultats de la question précédente.

Comme N_1+N_2 est nilpotente, on a bien : $\exp(N_1)\exp(N_2) = \exp(N_1+N_2)$.

d. Par définition de l'exponentielle d'une matrice, $\exp(0) = I$.

Ainsi, en prenant $N_1 = N$ et $N_2 = -N$ (qui est bien nilpotente car $(-N)^3 = -N^3 = 0$ et qui commute avec N), on a : $\exp(N-N) = I = \exp(N)\exp(-N)$ et $\exp(N-N) = \exp(-N+N) = I = \exp(-N)\exp(N)$, ce qui montre que $\exp(N)$ est inversible, d'inverse $\big(\exp(N)\big)^{-1} = \exp(-N)$.

3. a. Avec $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$: N est nilpotente.

b. La question **III 1.b.** donne : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} N^i = \sum_{i=0}^{2} N^i = I+N+N^2 = (I-N)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. $\exp(N) = I+N+\dfrac{1}{2}\,N^2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\exp(-N) = \big(\exp(N)\big)^{-1} = I-N+\dfrac{1}{2}\,N^2$ c'est-à-dire $\exp(-N) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie IV

1. a. Avec $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (qui est réelle symétrique, donc diagonalisable), et en remarquant que la somme des colonnes est toujours 3 (donc que la matrice colonne ne contenant que des 1 est propre pour la valeur propre 3), on obtient, après calcul : $\det(R-\lambda I) = (3-\lambda)^2(-3-\lambda)$.

Les valeurs propres de R sont -3, simple, et 3, double.

b. La recherche du sous-espace E_3 propre associé à la valeur propre 3 amène au plan vectoriel d'équation $x+y-2z = 0$, de base (U,V) où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui indique déjà que R est diagonalisable puisque $\dim(E_3) = 2$ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre 3.

La recherche du sous-espace E_{-3} propre associé à la valeur propre -3 amène à la droite vectorielle d'équations $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$, donc de base $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et R est semblable à $D = P^{-1}RP = \mathrm{diag}(3,3,-3)$.

La question **II 3.**, avec $(a,b,c) = (3,3,-3)$, indique que $\exp(D)$ existe et est $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^3, e^3, e^{-3})$. Puis la question **I 6.** assure l'existence de $\exp(R)$ et sa valeur : $\exp(R) = P\exp(D)P^{-1}$.

Avec $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, on obtient : $\exp(R) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5e^3+e^{-3} & -e^3+e^{-3} & 2e^3-2e^{-3} \\ -e^3+e^{-3} & 5e^3+e^{-3} & 2e^3-2e^{-3} \\ 2e^3-2e^{-3} & 2e^3-2e^{-3} & 2e^3+4e^{-3} \end{pmatrix}$.

2. a. Avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on obtient, après calcul : $\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$.

Les valeurs propres de M sont -1, double, et 1, simple.

b. La recherche du sous-espace E_1 propre associé à la valeur propre 1 amène à la droite vectorielle d'équations $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$, donc de base $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La recherche du sous-espace E_{-1} propre associé à la valeur propre -1 amène à la droite vectorielle d'équations $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$, donc de base $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui indique que M n'est pas diagonalisable puisque $\dim(E_{-1}) = 1$ n'est pas l'ordre de multiplicité de la valeur propre double -1.

c. La recherche d'une matrice colonne W telle que $(M+I)W = V$ amène au système $\begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases}$ dont une solution est $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de colonnes U, V, W, est inversible puisque son déterminant est $-4 \neq 0$.

Comme $MU = U$, $MV = -V$ et $MW = V - W$, on a : $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$.

La question **II 3.**, avec $(a,b) = (1,-1)$, indique que $\exp(T)$ existe et est $\exp(T) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$. Puis la question **I 6.** assure l'existence de $\exp(M)$ et sa valeur : $\exp(M) = P\exp(T)P^{-1}$.

Avec $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, on obtient : $\exp(M) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e-e^{-1} & 3e-5e^{-1} & 4e^{-1} \\ e+e^{-1} & e+5e^{-1} & -4e^{-1} \\ 2e-2e^{-1} & 2e-2e^{-1} & 4e^{-1} \end{pmatrix}$.

Fin du corrigé

D. Maillard - $1^{ère}$ année TSI - Saint-Nazaire