GROUPE CONCOURS POLYTECHNIQUES

EPREUVE COMMUNE AUX CONCOURS PH-M, PH-P, CH-P, CH-P'

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée dans le cadre des dispositions de la circulaire 86228 du 28-07-1986.

1 Questions préliminaires

Dans tout le problème, n désigne un entier fixé, supérieur ou égal à 2.
Dans $\mathbb{R}^n$, considéré comme un espace vectoriel normé, on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ la base canonique et $\vec{e} = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i$.
On rappelle que :

1. Un sous-ensemble $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si il vérifie la propriété suivante :

$$\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{K}^2, \ \ \forall\lambda \in [0,1], \ \ \lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in \mathcal{K}.$$

2. Les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les sous-ensembles fermés et bornés.

Soit $\mathcal{K}$ un sous-ensemble <u>convexe</u> et <u>compact</u> de $\mathbb{R}^n$. Soit f une application <u>linéaire</u> de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$f(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}.$$

A tout élément $\vec{a}$ de $\mathcal{K}$, on associe la suite $\vec{u}_k$ définie par :

$$\vec{u}_0 = \vec{a}$$

$$\vec{u}_k = \frac{1}{k+1}\left(\vec{a} + f(\vec{a}) + f^2(\vec{a}) + \cdots + f^k(\vec{a})\right), k \geq 1,$$

où f^k représente f composée k fois.

Question 1.1
Montrer par récurrence que la suite $\{\vec{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{K}$. En déduire qu'elle possède au moins une sous-suite convergeant vers un élément de $\mathcal{K}$.

Question 1.2
Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \left(f(\vec{u}_k) - \vec{u}_k\right) = 0.$$

En déduire qu'il existe un élément de $\mathcal{K}$ invariant par f.

On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ 0 \leq x_i \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2,\ 0 \leq p_{i,j};$$

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\},\ \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = 1.$$

Objectif du problème :

Le sujet porte sur l'étude d'itérations dans $\mathcal{K}_n$ du type :

$$\vec{x}(k+1) = P\vec{x}(k) \qquad (*)$$

avec $\vec{x}(0)$ élément de $\mathcal{K}_n$ et P matrice donnée de $\mathcal{S}_n$. On s'intéressera plus particulièrement au comportement asymptotique de la suite :
- Sous quelles conditions la suite $\vec{x}(k)$ converge-t-elle ?
- Quelle est la structure algébrique de l'ensemble de ses valeurs d'adhérence (si elle ne converge pas) ?
- Dans le cas de convergence, quelle est la vitesse de convergence ?

2 Convergence de la suite $\vec{x}(k)$

Dans toute cette partie, $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est un élément fixé quelconque de $\mathcal{S}_n$.

Question 2.1
1) Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un sous-ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathcal{K}_n$, alors $P\vec{x}$ est encore dans $\mathcal{K}_n$.
3) Conclure qu'il existe $\vec{x}$ dans $\mathcal{K}_n$ vérifiant :

$$P\vec{x} = \vec{x}.$$

(Un tel vecteur $\vec{x}$ sera appelé un vecteur invariant par P.)

Question 2.2
Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, donner un exemple de matrice de $\mathcal{S}_n$ ayant plusieurs vecteurs invariants dans $\mathcal{K}_n$.
Donner un exemple de matrice de $\mathcal{S}_2$ pour lequel la suite $\vec{x}(k)$ définie par $(*)$ ne converge pas.

Soit ${}^tP$ la matrice transposée de P. Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$m(\vec{x}) = \min_{1 \leq i \leq n} x_i \text{ et } M(\vec{x}) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i.$$

Question 2.3
Montrer que :

$$m(\vec{x}) \leq m({}^tP\vec{x}) \text{ et } M(\vec{x}) \geq M({}^tP\vec{x}).$$

Soit

$$\omega = \min_{1\le i,j\le n} p_{i,j}.$$

Question 2.4
Montrer que

$$(1-\omega)m(\vec{x}) + \omega M(\vec{x}) \le m({}^t P\vec{x}) \text{ et } M({}^t P\vec{x}) \le (1-\omega)M(\vec{x}) + \omega m(\vec{x}).$$

(on pourra utiliser la monotonie de $f(t) = at + b(1-t)$, a et b étant deux éléments de $\mathbb{R}$ fixés).
En déduire que

$$M({}^t P\vec{x}) - m({}^t P\vec{x}) \le (1-2\omega)(M(\vec{x}) - m(\vec{x})).$$

Question 2.5
On suppose $0 < \omega < \frac{1}{2}$.
Montrer qu'alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe un réel $h(\vec{x})$ tel que :

$$\lim_{k\to+\infty} {}^t P^k \vec{x} = h(\vec{x})\vec{e}.$$

En déduire que la suite de matrices ${}^t P^k$ converge vers une limite que l'on déterminera en fonction de $h(\vec{e}_1), \cdots, h(\vec{e}_n)$.

Question 2.6
En conclure que pour toute matrice P de $\mathcal{S}_n$ à coefficients strictement positifs, il existe un unique vecteur $\vec{x}(\infty)$ dans $\mathcal{K}_n$ tel que pour toute valeur initiale $\vec{x}(0)$ élément de $\mathcal{K}_n$, la suite $\vec{x}(k)$ définie par la récurrence $\vec{x}(k+1) = P\vec{x}(k)$ converge vers $\vec{x}(\infty)$ (on exprimera $\vec{x}(\infty)$ en fonction de $h(\vec{e}_1), \cdots, h(\vec{e}_n)$).

Question 2.7
Montrer que l'on peut remplacer dans la question précédente l'hypothèse
- "tous les coefficients de P sont strictement positifs"

par
- "il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que tous les coefficients de P^q sont strictement positifs".

3 Décomposition des matrices de $\mathcal{S}_n$

Cette partie est indépendante des deux premières.

Dans la partie précédente, nous avons vu que la convergence de la suite définie par $(*)$ est assurée s'il existe une puissance de P dont les coefficients sont tous strictement positifs. Dans le but d'étendre notre étude à des matrices quelconques de $\mathcal{S}_n$, nous allons introduire dans cette partie la notion de matrice irréductible.

Dans toute cette partie, P est un élément fixé quelconque de $\mathcal{S}_n$.

Pour tout entier positif α, on note $P^\alpha = (p_{i,j}^{(\alpha)})_{1\le i,j\le n}$ la puissance $\alpha^{\text{ième}}$ de la matrice P, par convention $P^0 = Id$.

Question 3.1
Montrer par récurrence sur α que pour tout couple (i,j) et pour tout $\alpha \ge 2$:

$$p_{i,j}^{(\alpha)} = \sum_{(i_1,i_2,\cdots i_{\alpha-1})\in\{1,\cdots,n\}^{\alpha-1}} p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{\alpha-2},i_{\alpha-1}} p_{i_{\alpha-1},j}.$$

déduire que pour toute matrice $P \in S_n$, on a :

$$\left(p_{i,j}^{(\alpha)} > 0\right) \Longleftrightarrow \left(\exists (i_1, i_2, \cdots i_{\alpha-1}) \in \{1, \cdots, n\}^{\alpha-1} \ / \ p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{\alpha-2},i_{\alpha-1}} p_{i_{\alpha-1},j} > 0\right),$$

et

$$p_{i,j}^{(\alpha)} > 0, \ \alpha \geq n \ \Rightarrow \ \exists \beta < n \ / \ p_{i,j}^{(\beta)} > 0.$$

(On pourra remarquer que dans le $(\alpha+1)$-uplet $(i, i_1, i_2, \cdots i_{\alpha-1}, j)$, deux indices au moins sont égaux.)

Rappels
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On rappelle que la relation $\mathcal{R}$ est :

- un préordre si et seulement si elle est réflexive et transitive ;
- une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive ;
- une relation d'ordre si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Soit $(E, \prec)$ un ensemble ordonné (i.e. muni d'une relation d'ordre). S'il existe un élément a dans E tel que :

$$\forall x \in E, \quad x \prec a \Longrightarrow x = a,$$

on dit que a est un élément minimal de E.

Définition 1
On définit la relation $\rightsquigarrow$ sur l'ensemble des entiers $\{1, \cdots, n\}$ par :

$$(i \rightsquigarrow j) \Longleftrightarrow \left(\exists \alpha \in \{0, \cdots, (n-1)\} \ / \ p_{j,i}^{(\alpha)} > 0\right).$$

Question 3.2
Montrer que la relation $\rightsquigarrow$ est un préordre (on pourra remarquer que $p_{i,i}^{(0)} > 0$).

Définition 2
On définit la relation $\sim$ sur $\{1, \cdots, n\}$ par :

$i \sim j$ si et seulement si $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow i$.

Question 3.3
Montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur $\{1, \cdots, n\}$.

Définition 3
On notera $C(i)$ la classe d'équivalence de [illegible]
des classes d'équivalence (ensem[illegible]
induit une relation $\prec$ sur l'ens[illegible]

$$(C(j) \prec C(i)) \Longleftrightarrow (i \rightsquigarrow j).$$

Question 3.4
Montrer que $\prec$ définit une relation d'ordre sur l'ensemble C.

Définition 4
Une classe d'équivalence $C(i)$ sera dite <u>irréductible</u> si et seulement si :

$$\forall k \in C(i), \ \text{on a} : \forall j \in \{1, \cdots, n\} \ \ (k \rightsquigarrow j \Rightarrow j \in C(i)).$$

Question 3.5
Montrer que $C(i)$ est irréductible si et seulement si $C(i)$ est un élément minimal dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{C}, \prec)$. En déduire qu'il existe au moins une classe d'équivalence irréductible.

Définition 5
On dira que la matrice P est <u>irréductible</u> si et seulement si $\mathcal{C}$ ne contient qu'une seule classe d'équivalence.

Question 3.6
Pour $C(i)$ classe d'équivalence irréductible, montrer que P' la sous-matrice de P obtenue en supprimant les lignes et les colonnes de P dont les indices ne sont pas dans $C(i)$ est une matrice de S_q (q cardinal de $C(i)$), irréductible au sens de l'équivalence sur $\{1, \cdots, q\}$ définie à l'aide de P' comme dans la définition 2.

4 Algorithme de calcul des classes irréductibles

On attire l'attention des candidats sur le fait qu'il n'est pas indispensable d'avoir su parfaitement résoudre les questions qui précèdent pour répondre de façon pertinente aux questions algorithmiques qui suivent.

On suppose données les parties de programme suivantes :

```
CONST n=50; (* dimension de l'espace vectoriel *)
TYPE
   matrice = ARRAY[1..n,1..n] OF REAL;
   matrice-bool = ARRAY[1..n,1..n] OF BOOLEAN;
PROCEDURE init-elts-non-nuls(p : matrice; VAR b : matrice-bool);
VAR i,j : INTEGER;
BEGIN
   FOR i := 1 TO n DO
      FOR j := 1 TO n DO
         b[i,j] := ( p[i,j] > 0 )
END;
(* Rappel : les éléments des matrices étudiées sont positifs ou nuls ! *)
PROCEDURE produit-non-nul(a,b: matrice-bool; VAR d: matrice-bool);
(* Si a (respectivement b) représente les éléments non-nuls de P (respectivement Q), alors d
représente les éléments non nuls de P × Q *)
VAR
   i,j,k: INTEGER; (* Variables auxiliaires locales à la procédure *)
   bool: BOOLEAN;
BEGIN
   ⋮
END;
```

Question 4.1
Que fait la procédure init-elts-non-nuls *? Ecrire le corps de la procédure* produit-non-nul.

Question 4.2
Ecrire la procédure relation *qui, à partir d'une matrice* p *dans S_n, génère une matrice booléenne* r *avec* r[i,j]= TRUE *si* i⇝j *et* r[i,j]= FALSE *sinon.*

Question 4.3
Ecrire la procédure classe *qui, à partir de la matrice* r *générée ci-dessus, construit une matrice booléenne* c *avec* c[i,j]= TRUE *si* i∼j *et* c[i,j]= FALSE *sinon. Finalement, écrire une fonction testant si la classe d'un élément* i *est irréductible.*

5 Période d'une matrice irréductible

Dans cette partie, on supposera que la matrice P est une matrice irréductible de $\mathcal{S}_n$.

Définition 6
On définit la période de i, notée $d(i)$, comme étant le plus grand commun diviseur des entiers $\alpha \geq 1$ tels que $p_{i,i}^{(\alpha)} > 0$.

Question 5.1
Montrer que pour tout i dans $\{1, \cdots, n\}$, il existe α dans $\{1, \cdots, (n-1)\}$ tel que $p_{i,i}^{(\alpha)} > 0$. En déduire que la période est bien définie.

Question 5.2
Dans cette question, on suppose $i \neq j$.
Montrer qu'il existe β et γ dans $\{1, \cdots, n\}$ tels que $p_{i,j}^{(\beta)} p_{j,i}^{(\gamma)} > 0$.
Montrer ensuite que :

$$\lambda \in I\!N^*,\ p_{j,j}^{(\lambda)} > 0 \Longrightarrow d(i) \text{ divise } \lambda.$$

(On pourra remarquer que : $\forall \lambda \in I\!N,\ p_{i,i}^{(\lambda+\beta+\gamma)} \geq p_{i,j}^{(\beta)} p_{j,j}^{(\lambda)} p_{j,i}^{(\gamma)}$.)
En conclure que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2,\ d(i) = d(j).$$

Ce résultat justifie le fait que l'on puisse parler de période d'une matrice irréductible.

La suite de l'étude consiste à établir que pour une matrice irréductible et apériodique (i.e. de période 1), il existe effectivement un entier q tel que tous les éléments de P^q soient strictement positifs. Dans le cas d'une matrice irréductible, mais périodique de période d ($d > 1$), alors on montre que la relation d'équivalence associée à la matrice P^d partitionne $\{1, \cdots, n\}$ en d classes irréductibles et apériodiques. (On ne demande pas de démontrer ces résultats.)

6 Conclusion

A partir d'une matrice quelconque P de $\mathcal{S}_n$, on calcule l'ensemble de ses classes irréductibles.
A chaque classe irréductible C, on associe la matrice P' obtenue à la question 3.6 et sa période d_C. Soit $\vec{v}_C$ le vecteur invariant associé à l'une des classes irréductibles et apériodiques de P'^{d_C}. Soit D le plus petit commun multiple des périodes d_C, lorsque C parcourt l'ensemble des classes irréductibles.
On obtient alors le résultat suivant :

Pour $\vec{x}(0)$ donné, la suite $\vec{x}(kD)$ converge vers un vecteur $\vec{y}$ de la forme :

$$\vec{y} = \sum_{C \text{ irréductible}} \sum_{j=0}^{d_C - 1} \beta_C(j) P^j \vec{v}_C,$$

avec les coefficients $\beta_C(j)$ positifs, de somme 1, fonction de la condition initiale $\vec{x}(0)$.
On prouve également que pour $0 \leq r < D$, la suite $\vec{x}(kD + r)$ converge vers le vecteur $P^r \vec{y}$ et que la convergence se fait à vitesse exponentielle (Question 2.4).

On achève ainsi l'analyse qualitative du comportement de ces suites.

Fin de l'énoncé.