

Exercice 1

On considère l'ensemble U des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour un $u \in U$ les deux premiers termes u_0 et u_1 sont donnés.

La suite nulle définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ appartient à U .

1. Montrer que si $a \in U$, $b \in U$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $a + b \in U$ et $\alpha a \in U$.

En déduire que U est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Soient c et d les deux suites appartenant à U telles que $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$.

(a) Montrer que (c, d) est une base de U .

(b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel U ?

3. (a) Montrer qu'il existe deux réels distincts et non nuls ρ et σ que l'on calculera, avec $\rho < 0 < \sigma$, tels que les suites géométriques $(\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à U . On notera r et s les suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \rho^n$ et $s_n = \sigma^n$.

(b) Montrer que (r, s) est une autre base de U .

4. (a) Si v est la suite de U telle que $v_0 = x$, $v_1 = y$, donner en fonction de x et y les composantes de v dans la base (r, s) .

(b) En déduire une formule générale de v_n en fonction de n (sans utiliser la formule de récurrence).

Les deux questions d'informatique suivantes peuvent être rédigées au choix en pseudo-code ou en Scilab.

5. (a) Écrire une procédure informatique F ayant pour variables d'entrée deux réels x , y et un entier naturel n et qui renvoie le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 = x$ et $v_1 = y$.

La fonction F utilisera la relation de récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$ dans une boucle ou de manière récursive.

- (b) Écrire une procédure informatique G ayant également pour variable d'entrée deux réels x , y et un entier naturel n et qui renvoie aussi le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 = x$ et $v_1 = y$, mais sans faire de boucle (en utilisant la formule établie à la question 4.b).

- (c) Expliquez quelle est, entre F et G , la fonction la plus efficace pour calculer v_n .

Exercice 2

On considère un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et un endomorphisme f de E ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{U}$.

1. (a) Déterminer une base de l'image et du noyau de f .
(b) Déterminer le polynôme caractéristique de A .
(c) Déterminer les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 de A . On choisira $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
(d) Déterminer des vecteurs propres v_1 , v_2 et v_3 de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1 , λ_2 , λ_3 et tels que leur première composante soit égale à 1.
(e) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E .
2. (a) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
(b) Calculer l'inverse P^{-1} de P .
3. Calculer A^2 et A^3 .
4. Montrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$

où les a_n sont les termes consécutifs d'une même suite. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donner a_1 , a_2 et a_3 .

5. (a) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(b) Diagonaliser B en déterminant une matrice inversible Q et une matrice diagonale Δ avec $B = Q\Delta Q^{-1}$.
(c) Calculer l'inverse Q^{-1} de Q .
(d) Pour tout entier strictement positif n , calculer B^n en fonction de n .
6. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.
(b) Donner une expression de a_n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 3

Soit la fonction $f :]0; +\infty[\times]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{\ln(1 + xy^2)}{y^2}$$

et la fonction $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y) \, dy = \int_0^1 \frac{\ln(1 + xy^2)}{y^2} \, dy.$$

On se propose de calculer une expression de $g(x)$, puis de $g'(x)$. On calcule ensuite $\frac{\partial f}{\partial x}$ puis l'intégrale $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy$ que l'on comparera à $g'(x)$.

1. (a) Pour un x positif fixé, montrer que $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + xy^2)}{y^2} = x$.
 (b) Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale définissant f ?
2. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que l'on précisera, l'égalité :

$$g(x) = -\ln(1 + x) + 2x \int_0^1 \frac{dy}{1 + xy^2}.$$

- (b) À l'aide d'un changement de variable montrer qu'il existe deux fonctions à préciser a et b dépendant de x telles que :

$$\int_0^1 \frac{dy}{1 + xy^2} = a(x) \int_0^{b(x)} \frac{du}{1 + u^2}.$$

- (c) En déduire une expression de $g(x)$ sans intégrale.
- (d) En déduire une expression de $g'(x)$ (également sans intégrale).
3. (a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\ln(1 + xy^2)}{y^2} \right)$.
 (b) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy$.
 (c) Que remarque-t-on ?

Exercice 4

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, définie sur $] -\pi ; \pi]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{si } t \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction g entre -3π et 3π .
2. Quelle est la parité de la fonction g ? Justifier votre réponse.
3. La série de Fourier de g est notée $g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.

(a) Donner les coefficients b_n pour tout entier n strictement positif.

(b) Calculer a_0 et a_1 .

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

(d) En déduire que si n est impair et $n \neq 1$, alors $a_n = 0$.

(e) Montrer que si $n = 2p$ est un entier pair non nul, alors $a_{2p} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2 - 1)}$.

4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g .

(a) A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = Sg(t)$? Justifier précisément votre réponse.

(b) Montrer que

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos t = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2 - 1)} \cos(2pt).$$

(c) En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2 - 1}$.

5. (a) Appliquer l'identité de Parseval à la fonction g .

(b) En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4p^2 - 1}\right)^2$.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$ et la droite D d'équation $y = -x$.

Pour un point N de D de coordonnées $(t; -t)$, on considère la droite (BN) , la droite (AN) et la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN) .

Le point M est l'intersection, si elle existe, de la droite (BN) et de la droite Δ .

1. En fonction de t , donner une équation cartésienne de la droite (BN) .
2. En fonction de t , donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AN}$.
3. En fonction de t , donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à (AN) .
4. Pour quelles valeurs de t les droites (BN) et Δ sont-elles parallèles ? On trouvera deux valeurs notées dans la suite t_1 et t_2 .
5. Calculer en fonction de t les coordonnées du point L en résolvant un système formé par les équations des droites (BN) et Δ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$.

On appelle désormais G la courbe décrite par M quand N parcourt la droite D .

6. On note $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions telles que :

$$u(t) = \frac{t+1}{-t+1} = \frac{2}{-t+1} - 1 \text{ et } v(t) = \frac{-t+1}{t+1} = \frac{2}{t+1} - 1$$

- (a) Préciser les domaines de définition de u et v .
 - (b) Calculer les dérivées de u et v et préciser les sens de variation de u et v sur chaque intervalle où elles sont définies.
 - (c) Donner un tableau de variations conjointes de u et v en précisant leurs limites aux extrémités de chaque intervalle où elles sont définies.
- On ne demande pas de représentation de u et v .
7. (a) Le point A appartient-il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
(b) Le point B appartient-il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
 8. (a) Calculer $u(t)v(t)$. Que remarque-t-on ?
(b) On appelle H la courbe d'équation cartésienne $y = \frac{1}{x}$.

Peut-on déduire de ce qui précède que G est la courbe H dont on a retiré un ou plusieurs points ? Quel(s) point(s) retirer à H pour obtenir G ?

