

Partie I

I.A.1.1 S est symétrique réelle donc S est diagonalisable donc s est diagonalisable.
 $S^2 = I_4$.

I.A.1.2 S est symétrique donc ${}^tSS = S^2 = I_4$, donc S est une matrice orthogonale or $\mathcal{B}$ est une base orthonormale donc s est un automorphisme orthogonal.

s est diagonalisable donc $\text{Sp}(s) \neq \emptyset$.

Si $\text{Sp}(s) = \{1\}$, alors $\exists P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $S = PI_4P^{-1} = I_4$: absurde, donc $\text{Sp}(s) \neq \{1\}$.

De même $\text{Sp}(s) \neq \{-1\}$, donc $\text{Sp}(s) = \{-1, 1\}$.

I.A.1.3 $\text{tr}(s) = \text{tr}(S) = 0$.

En notant m_i les ordres de multiplicité de E_i pour $i = 1$ ou 2 , et D une matrice diagonale semblable à S , on a $\text{tr}(S) = \text{tr}(D) = m_1 \times 1 + m_{-1} \times (-1)$, donc $m_1 - m_{-1} = 0$, or $m_1 + m_{-1} = \text{ordre}(S) = 4$, donc finalement $m_1 = 2$ et $m_{-1} = 2$.

I.A.2.1 Par un calcul matriciel ou avec la linéarité de s , $s(u_1) = u_1$ et $s(u_2) = u_2$, donc $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_1$.

De plus, u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc (u_1, u_2) est libre, or $\dim E_1 = 2$, donc (u_1, u_2) est une base de E_1 .

Orthonormalisation de Schmidt : on pose $\varepsilon_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4)$,

$\varepsilon'_2 = u_2 - (\varepsilon_1 | u_2) \varepsilon_1 = e_2 - e_3 + e_4$

et $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon'_2}{\|\varepsilon'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 - e_3 + e_4)$.

$(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$ est une base orthonormale de E_1 .

$$\text{I.A.2.2} \quad \begin{cases} (u_4 | u_1) = 0 \\ (u_4 | u_2) = 0 \\ (u_4 | u_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c + d = 0 \\ a + b + 2d = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -d \\ b = -d(d \in \mathbb{R}) \\ c = 0(c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Par exemple, pour $d = -1$, $u_4 = e_1 + e_2 - e_4$ convient.

On a donc $u_4 \in E_1^\perp$.

Or S est symétrique et $\mathcal{B}$ est orthonormale donc s est symétrique, donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux donc $E_1 \perp E_{-1}$, or $E = E_1 \oplus E_{-1}$: E_{-1} est donc le supplémentaire orthogonal de E_1 , donc $E_{-1} = E_1^\perp$, donc $u_4 \in E_{-1}$.

On remarque que $(u_3 | u_1) = (u_3 | u_2) = 0$ donc de même, $u_3 \in E_{-1}$.

On sait que $u_3 \perp u_4$ or ces 2 vecteurs sont non nuls, donc (u_3, u_4) est libre, or $\dim E_{-1} = 2$, donc (u_3, u_4) forme une base orthogonale de E_{-1} .

I.A.3.1 $\forall k \in \mathbb{N}$, $s^k(x) = s^k(y) + s^k(z)$, or on sait que si $s(u) = \lambda u$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $s^k(u) = \lambda^k u$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $s^k(x) = y + (-1)^k z : \alpha_k = (-1)^k$.

$$\begin{aligned} \text{On a donc } S_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (y + (-1)^k z) = \frac{1}{n} (ny + (\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k) z) = y + \frac{1}{n} \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} z \\ &= y + \frac{1}{2n} (1 + (-1)^{n+1}) : \quad \underline{\beta_n = \frac{1}{2n} (1 + (-1)^{n+1})}. \end{aligned}$$

I.A.3.2 $(1 + (-1)^{n+1})_n$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$, donc

$$\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = y = \frac{1}{2}(x + s(x)) \text{ car } \begin{cases} x = y + z \\ s(x) = y - z \end{cases}}$$

I.B.1.1 $\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - ((\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}c)^2 + (\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}d)^2 + (\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}c)^2 + (\frac{1}{4}b + \frac{3}{4}d)^2) :$

$$\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2 = \frac{3}{8}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \frac{3}{4}(ac + bd) = \frac{3}{8}[(a-c)^2 + (b-d)^2].$$

donc $\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2 \geq 0$, donc $\|\ell(u)\|^2 \leq \|u\|^2$, or $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\|\ell(u)\| \leq \|u\|$.

I.B.1.2

$$\|\ell(u)\| = \|u\| \iff \|\ell(u)\|^2 = \|u\|^2 \iff \frac{3}{8}[(a-c)^2 + (b-d)^2] = 0 \iff (a-c)^2 = 0 \text{ et } (b-d)^2 = 0,$$

donc $\|\ell(u)\| = \|u\| \iff a = c \text{ et } b = d$.

Soit $u \in E$.

$$u \in E_1(\ell) \implies \ell(u) = u \implies \|\ell(u)\| = \|u\| \implies a = c \text{ et } b = d \quad (c \in \mathbb{R} \text{ et } d \in \mathbb{R})$$

$$\implies u = c(e_1 + e_3) + d(e_2 + e_4) \implies u \in F = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4),$$

donc $E_1(\ell) \subset F$.

Réciproquement, si on note $v_1 = e_1 + e_3$ et $v_2 = e_2 + e_4$, on vérifie que $\ell(v_1) = v_1$ et que $\ell(v_2) = v_2$, donc $(v_1, v_2) \in E_1(\ell)^2$, donc $F \subset E_1(\ell)$, donc finalement $E_1(\ell) = F$, or (v_1, v_2) est libre et par définition de F , ils forment une famille génératrice de F , donc (v_1, v_2) est une base de $F = E_1(\ell)$: $\dim E_1(\ell) = 2 \geq 0$, donc 1 est valeur propre de ℓ .

I.B.2.1 $\dim E_1(\ell) = 2$ et ℓ est diagonalisable (car L est symétrique réelle), donc 1 est racine double de P_ℓ qui est scindé. De plus $\deg P_\ell = 4$ et il est de la forme $P_\ell(x) = (-1)^4 x^4 + (-1)^3 \text{tr}(\ell) x^3 + \dots + \det(\ell)$. On calcule : $\det(\ell) = \frac{1}{4}$ et $\text{tr}(\ell) = 3$.

D'après son degré, il admet 2 autres racines, notées λ_1 et λ_2 , et comme il est unitaire, on a : $P_\ell(x) = (x-1)^2(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, on développe et on identifie :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2 = 3 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont les racines de } x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2,$$

$$\text{donc } \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} : \underline{P_\ell(x) = (x-1)^2(x - \frac{1}{2})^2}.$$

Autre méthode : on calcule $P_\ell(x) = \det(L - xI_4)$ en commençant par la transformation $C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^4 C_i$

puis pour i variant de 2 à 4, $L_i \leftarrow L_i - L_1$, on peut ensuite développer suivant la 1ère colonne, 2 fois de suite et on factorise au maximum.

I.B.2.2 Les valeurs propres de ℓ sont les racines de P_ℓ , donc $\frac{1}{2}$ est aussi valeur propre de ℓ .

On a vu au 1. que ℓ est diagonalisable, et comme $\text{Sp}(\ell) = \{1, \frac{1}{2}\}$, G_1 et $G_{\frac{1}{2}}$ sont supplémentaires dans E .

I.B.3.1 $\forall k \in \mathbb{N}, \ell^k(x) = \ell^k(y) + \ell^k(z) = y + (\frac{1}{2})^k z$

I.B.3.2 $L_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (y + (\frac{1}{2})^k z) = y + \frac{1}{n} \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = y + \frac{1}{n} (2 - (\frac{1}{2})^{n-1}) z.$

$$|\frac{1}{2}| < 1, \text{ donc } \underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(x) = y = 2s(x) - x} \text{ car } \begin{cases} x = y + z \\ s(x) = y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

I.C.1 ${}^t T T = I_4$ donc T est orthogonale.

I.C.2.1 $t(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_3 - e_4)$ (voir 1ère colonne de T), et $t(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t(e_3) + t(e_4)) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1 + e_3 + e_4).$

On remarque que : $t(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - \sqrt{2}\varepsilon_1) \in F_1$ et $t(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1 + \sqrt{2}\varepsilon_1) \in F_1$, donc F_1 est stable par t . (e_1, ε_1) est libre, donc c'est une base de F_1 : $\dim F_1 = 2$.

I.C.2.2 On sait que F_1 est stable par t , donc $F_1^\perp$ est stable par $t^* = t^{-1}$: F_2 est stable par t^{-1} , soit $t^{-1}(F_2) \subset F_2$. Or t étant un isomorphisme, $\dim t(F_2) = \dim F_2$, donc $t^{-1}(F_2) = F_2$, donc $t(F_2) = F_2$: F_2 est stable par t .

$(e_2|e_1)=(e_2|\varepsilon_1)=0$, donc $e_2 \in F_1^\perp = F_2$.

$(\varepsilon_2|e_1)=(\varepsilon_2|\varepsilon_1)=0$ donc $e_2 \in F_2$.

Il est clair que (e_2, ε_2) est libre et comme E est de dimension finie, $\dim F_1^\perp = \dim E - \dim F_1$, donc $\dim F_2 = 2$.

En conclusion, (e_2, ε_2) est une base de F_2 .

I.C.3.1 Les vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont orthogonaux 2 à 2 et de norme 1, donc $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E , or t est orthogonale donc T' est orthogonale.

On connaît déjà $t(e_1)$ et $t(\varepsilon_1)$. De plus, $t(e_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + e_3 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + \sqrt{2}\varepsilon_2)$, et $t(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_2 + e_3 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_2 + \sqrt{2}\varepsilon_2)$, donc $T' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

I.C.3.2 $\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$. De plus, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, or $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos \theta \geq 0$ donc $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\text{donc } T' = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Pour $i=1$ ou 2 , on note $b_i = (e_i, \varepsilon_i)$ et t_i l'endomorphisme de F_i induit par t , alors

$$\text{Mat}_{b_1}(t_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \text{ donc } \underline{t_1 \text{ est la rotation d'angle } -\theta}.$$

De même, $\underline{t_2 \text{ est la rotation d'angle } \theta}$.

I.C.3.3 $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(t^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(t))^k = T'^k = \begin{pmatrix} A_1^k & (0) \\ (0) & A_1^k \end{pmatrix}$, où $A_i = \text{Mat}_{b_i}(t_i)$, et $(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (puissance d'une matrice triangulaire par blocs), or t_1^k est la rotation d'angle $k(-\theta)$, de même pour t_2^k ,

$$\text{donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(t^k) = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta & 0 & 0 \\ -\sin k\theta & \cos k\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\theta & -\sin k\theta \\ 0 & 0 & \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

$$\textbf{I.C.4 } \zeta_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\omega})^k.$$

Si $e^{i\omega} = 1$, soit $\omega = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$, alors $\zeta_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$, donc $(\zeta_n(\omega))_n$ n'est pas bornée.

Si $\omega \neq 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$, alors $\zeta_n(\omega) = \frac{1 - (e^{i\omega})^n}{1 - e^{i\omega}} = \frac{1 - e^{in\omega}}{1 - e^{i\omega}}$, donc $|\zeta_n(\omega)| \leq \frac{|1| + |e^{in\omega}|}{1 - |e^{i\omega}|} = \frac{2}{1 - |e^{i\omega}|}$: $(\zeta_n(\omega))_n$ est bornée.

Finalement, $(\zeta_n(\omega))_n$ est bornée $\iff \forall p \in \mathbb{Z}, \omega \neq 2p\pi$.

I.C.5.1 $\underline{F_1 \text{ est stable par } t}$ donc par t^k pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, donc par T_n .

I.C.5.2 On reprend les notations du C.3.2, et on note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, alors $t^k(y)$ a pour matrice colonne de coordonnées dans b_1 : $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = A_1^k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, donc $V_k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$

$T_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k(y)$ a donc pour matrice colonne de coordonnées dans b_1 :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_k \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ donc } U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_k \text{ et si on note}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\theta \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin k\theta, \text{ alors on a } U_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ -v_n & u_n \end{pmatrix}$$

$$\theta = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \neq 2p\pi \text{ donc } e^{\frac{in\theta}{2}} \zeta_n(\theta) = \frac{e^{i0} - e^{in\theta}}{e^{i0} - e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{in\theta}{2}}(e^{-\frac{in\theta}{2}} - e^{\frac{in\theta}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})} = (e^{\frac{i(n-1)\theta}{2}}) \frac{-2i \sin \frac{n\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}}, \text{ donc}$$

$$u_n = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{(n-1)\theta}{2} \text{ et } v_n = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{(n-1)\theta}{2}.$$

Mais il suffit peut-être de répondre $u_n = \text{Re}(\zeta_n(\theta))$ et $v_n = \text{Im}(\zeta_n(\theta))$

I.C.5.2 $(\zeta_n(\omega))_n$ étant bornée, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ aussi donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(y) = 0$.

I.C.5.3 On a le même résultat pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(z)$ (le signe devant v_n ne change pas la limite, donc, comme $T_n(x) = T_n(y) + T_n(z)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = 0$).

Partie II

II.A.1. Soient $x \in \ker(\ell - id)$ et $y \in \text{Im}(\ell - id)$, alors $\ell(x) = x$, et $\exists \alpha \in E$ tel que $y = (\ell - id)(\alpha)$, donc $(x|y) = (x|\ell(\alpha) - \alpha) = (x|\ell(\alpha)) - (x|\alpha) = (\ell(x)|\ell(\alpha)) - (x|\alpha) = 0$ car $\ell \in O(E)$ donc ℓ conserve le produit scalaire. On a donc toujours $x \perp y$: $\ker(\ell - id)$ et $\text{Im}(\ell - id)$ sont donc orthogonaux.

On en déduit que $\ker(\ell - id) \subset \text{Im}(\ell - id)^\perp$.

De plus, E étant un espace euclidien, il est de dimension finie, donc en notant $F = \text{Im}(\ell - id)$, on a $E = F \oplus F^\perp$, donc $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.

D'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim F + \dim \ker(\ell - id)$.

On obtient donc $\dim \ker(\ell - id) = \dim F^\perp$, et d'après l'inclusion précédente, $\ker(\ell - id) = F^\perp$, or $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E , donc $\ker(\ell - id)$ et $\text{Im}(\ell - id)$ sont supplémentaires dans E .

II.A.2 $y \in \ker(\ell - id)$, donc $\ell(y) = y$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\ell^k(y) = y$, donc

$$\ell^k(x) = y + \ell^k(\ell(z) - z) = y + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z).$$

On a donc $L_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (y + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z)) = y + \frac{1}{n}(\ell^n(z) - \ell^0(z))$, donc $L_n(x) = y + \frac{1}{n}(\ell^n(z) - z)$

II.A.3 On a donc : $\|L_n(x) - y\| = \left\| \frac{1}{n}(\ell^n(z) - z) \right\| \leq \frac{1}{n}(\|\ell^n(z)\| + \|z\|)$ d'après l'inégalité triangulaire.

De plus, ℓ conserve la norme donc $\|\ell^n(z)\| = \|z\|$, donc $0 \leq \|L_n(x) - y\| \leq \frac{1}{n}2\|z\|$ et d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n(x) - y\| = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(x) = y$.

II.B.1 Soit $f \in B(E)$, et soit $x \in E$, alors

$$\|f^*(x)\|^2 = (f^*(x)|f^*(x)) = (x, f(f^*(x))) \leq \|x\| \|f(f^*(x))\| \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.}$$

Or $f \in B(E)$ donc $\forall y \in E$, $\|f(y)\| \leq \|y\|$ donc $\|f^*(x)\|^2 \leq \|x\| \|f^*(x)\|$ (avec $y = f^*(x)$).

* Si $\|f^*(x)\| \neq 0$, alors $\|f^*(x)\| > 0$, donc en multipliant par $\frac{1}{\|f^*(x)\|}$, on obtient $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$.

* Si $\|f^*(x)\| = 0$, alors, comme $\|x\| \geq 0$, on a aussi $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$.

Dans tous les cas : $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$: $f^* \in B(E)$.

II.B.2 Soit $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

$$\|f^*(x) - x\|^2 = \|f^*(x)\|^2 - 2(f^*(x)|x) + \|x\|^2 \leq \|x\|^2 - 2(f^*(x)|x) + \|x\|^2 \text{ car } f^* \in B(E).$$

Or $(f^*(x)|x) = (x|f(x)) = (x|x) = \|x\|^2$, donc l'inégalité précédente devient : $\|f^*(x) - x\|^2 \leq 0$.

Or $\|f^*(x) - x\|^2 \geq 0$ donc $\|f^*(x) - x\|^2 = 0$ donc $f^*(x) = x$: on vient donc de montrer que

[si $x \in \ker(f - id)$, alors $x \in \ker(f^* - id)$], donc $\ker(f - id) \subset \ker(f^* - id)$.

De plus, $\dim \ker(f^* - id) = \dim \ker(f^* - id^*) = \ker(f - id)^* = \dim E - \text{rg}(f - id)^* = \dim E - \text{rg}(f - id)$ d'après le théorème du rang, donc $\dim \ker(f^* - id) = \dim E - \text{rg}(f - id) = \dim \ker(f - id)$, donc avec l'inclusion précédente, $\ker(f - id) = \ker(f^* - id)$.

II.B.3 Pour $\varphi = (f - id)$, on obtient : $\ker(f^* - id) = (\text{Im}(f - id))^\perp$, or en notant $F = \text{Im}(f - id)$, $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E (:de dimension finie), donc $\ker(f^* - id)$ et $\text{Im}(f - id)$ sont supplémentaires dans E et d'après II.B.2, $\ker(f - id)$ et $\text{Im}(f - id)$ sont supplémentaires dans E .

II.C.1 (Remarque : on n'a plus les résultats du B car il manque l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Soit $x \in \ker(\ell - id) \cap \text{Im}(\ell - id) (\subset \text{Im}(f - id))$, et soit $y \in E$ tel que $x = \ell(y) - y$, alors

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \ell^k(x) = \ell^{k+1}(y) - \ell^k(y) : \text{on somme d'où } \sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \ell^{k+1}(y) - \ell^k(y) = \ell^n(y) - \ell^0(y) = \ell^n(y) - y.$$

Or on sait aussi que $x \in \ker(\ell - id)$, donc $\ell(x) = x$, donc $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \ell^k(x) = x$ et l'égalité précédente devient : $\sum_{k=0}^{n-1} x = \ell^n(y) - y$, donc $\ell^n(y) = nx + y$.

On a donc : $\|nx\| = \|\ell^n(y) - y\| \leq \|\ell^n(y)\| + \|y\|$, or $\|\ell^n(y)\| = \|y\|$, et en divisant par $n > 0$, on obtient : $0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{n} 2\|y\|$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\| = 0$, or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\| = \|x\|$ donc $\|x\| = 0$ donc $x = 0$: on vient de montrer que $\ker(\ell - id) \cap \text{Im}(\ell - id) = \{0\}$, et à l'aide du théorème du rang appliqué à $\ell - id$, on obtient : $\ker(\ell - id)$ et $\text{Im}(\ell - id)$ sont supplémentaires dans E .

II.C.2 On a donc, comme au II.A, $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(x) = y$.

Partie III

III.1 $\sigma_e(e) = e - 2 \frac{\|e\|^2}{\|e\|^2} e : \underline{\sigma_e(e) = -e}$.

Soit x orthogonal à e , alors $\sigma_e(x) = x - 0 : \underline{\sigma_e(x) = x}$.

On note $u_1 = \frac{e}{\|e\|}$, et $(u_2, u_3, \dots, u_n)$ une base ortonormée de $\text{Vect}(e)^\perp$, alors $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ est une base ortonormée de E et dans cette base, la matrice de σ_e est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont -1, et 1 répétés $n-1$ fois : cette matrice étant clairement orthogonale, σ_e est un automorphisme orthogonal de E .

III.2.1 Par définition, $e = (\ell - id)(u)$, donc $e \in \text{Im}(\ell - id)$, or d'après II.A.1), W et $\text{Im}(\ell - id)$ sont orthogonaux, donc $e \in W^\perp : \underline{e \text{ est orthogonal à } W}$.

III.2.2 $\sigma_e(\ell(u) - u) = \sigma_e(e) = -e$ d'après III.1), donc $\underline{\sigma_e(\ell(u) - u) = u - \ell(u)}$.

On remarque que $(\ell(u) - u, \ell(u) + u) = \|\ell(u)\|^2 - \|u\|^2 = \|u\|^2 - \|u\|^2 = 0$, car $\ell \in O(E)$, donc $\ell(u) + u \perp e$, donc d'après III.2.1), $\underline{\sigma_e(\ell(u) + u) = \ell(u) + u}$.

σ_e étant linéaire, on obtient : $\begin{cases} \sigma_e(\ell(u)) - \sigma_e(u) = u - \ell(u) \\ \sigma_e(\ell(u)) + \sigma_e(u) = \ell(u) + u \end{cases}$, donc $\begin{cases} \sigma_e(\ell(u)) = u \\ \sigma_e(u) = \ell(u) \end{cases}$

III.2.3 Soit $x \in \text{Vect}(u, W)$, alors $\exists(\alpha, w) \in \mathbb{R} \times W / x = \alpha u + w$,

or $(\sigma_e \circ \ell - id)(u) = \sigma_e(\ell(u)) - u = 0$ d'après III.2.2), et

comme $w \in W$, on a : $\ell(w) = w$, donc $(\sigma_e \circ \ell - id)(w) = \sigma_e(w) - w$, or $w \in W$ et $e \in \text{Im}(\ell - id)$, donc d'après II.A.1), $w \perp e$, et d'après III.1), $\sigma_e(w) = w$, donc finalement $(\sigma_e \circ \ell - id)(w) = 0$, donc par linéarité de σ_e , $(\sigma_e \circ \ell - id)(x) = 0$, donc $x \in \ker(\sigma_e \circ \ell - id)$.

On a montré que $\text{Vect}(u, W) \subset \ker(\sigma_e \circ \ell - id)$.

Réciproquement soit $x \in \ker(\sigma_e \circ \ell - id)$, alors $\sigma_e(\ell(x)) = x$.

* Analyse : on suppose que $\exists(\alpha, w) \in \mathbb{R} \times W / x = \alpha u + w$, alors $\ell(x) = \alpha \ell(u) + w$, donc $\ell(x) - x = \alpha e$.

Une fois que α sera déterminé, on pourra poser $w = x - \alpha u$.

* Synthèse : on pose $y = \ell(x) - x$, alors $\sigma_e(y) = x - \sigma_e(x)$.

Or σ_e étant une réflexion (donc une symétrie), et comme $\sigma_e(\ell(x)) = x$, on obtient en appliquant σ_e : $\sigma_e(x) = \ell(x)$, donc finalement $\sigma_e(y) = x - \ell(x) = -y : y \in E_{-1}(\sigma_e)$, or σ_e étant une réflexion, son sous-espace propre associé à -1 est de dimension 1 : c'est $\text{Vect}(e)$, donc $y \in \text{Vect}(e)$, donc $\exists \alpha \mathbb{R} / y = \alpha e$, donc $\ell(x) - x = \alpha e$.

On pose $w = x - \alpha u$, alors $\ell(w) = \ell(x) - \alpha \ell(u) = (x + \alpha e) - \alpha \ell(u) = x + \alpha(\ell(u) - u) - \alpha \ell(u)$, donc $\ell(w) = w : w \in W$.

Or $w = x - \alpha u$, donc $x = w + \alpha u \in \text{Vect}(u, W)$.

On a montré que $\ker(\sigma_e \circ \ell - id) \subset \text{Vect}(u, W)$.

Finalement : $\text{Vect}(u, W) = \ker(\sigma_e \circ \ell - id)$.

III.2.4 On remarque que $\dim \text{Vect}(u, W) = 1 + \dim W$ (: en fait $\text{Vect}(u, W) = \text{Vect} u \oplus W$)

Si $\ker(\sigma_e \circ \ell - id) \neq E$ (c'est à dire si $1 + \dim W < n$), on recommence le 3) avec $\sigma_e \circ \ell$, qui est bien un automorphisme orthogonal car σ_e et ℓ le sont.

Si $\dim W = k$, on pourra faire cette étape $n - k$ fois, et en notant $u_1 = u$, le vecteur trouvé à la question III.2.3) et $e_1 = \ell(u_1) - u_1$, on obtient par récurrence :

$\text{Vect}(u_{n-k}, \dots, u_2, u_1, W) = \ker(\sigma_{e_{n-k}} \circ \dots \circ \sigma_{e_1} \circ \ell - id)$ avec $\dim \text{Vect}(u_{n-k}, \dots, u_2, u_1, W) = n$, donc $\text{Vect}(u_{n-k}, \dots, u_2, u_1, W) = E$, donc, en notant $g = \sigma_{e_{n-k}} \circ \dots \circ \sigma_{e_1} \circ \ell$, on a : $\ker(g - id) = E$, donc $g - id = 0$, donc $g = id$, et en composant à gauche par les symétries dans l'ordre rencontré, on obtient $g = \sigma_{e_1} \circ \sigma_{e_2} \circ \dots \circ \sigma_{e_{n-k}}$:

ℓ peut se décomposer en produit de $n - k$ réflexions.

Pour les courageux, l'hypothèse de récurrence est, pour $p \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$,

$H_p : \text{"} \exists(u_1, u_2, \dots, u_p) \in E^p / \text{Vect}(u_p, \dots, u_2, u_1, W) = \ker(\sigma_{e_p} \circ \dots \circ \sigma_{e_1} \circ \ell - id), \text{ où } e_i = \ell(u_i) - u_i \text{"}$