

A. Prolongement harmonique

1) f est continue sur le compact T donc elle est bornée, $\exists m \geq 0, \forall z \in T, |f(z)| \leq m$ d'où $|c_n| \leq m, \forall n \in \mathbb{Z}$ puisque $|f(e^{it})e^{-int}| \leq m$. Alors $\forall n \geq 0, |c_n z^n| \leq m|z|^n$ et $|c_{-n} \bar{z}^n| \leq m|z|^n$ et par suite les deux séries $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} c_{-n} \bar{z}^n$ sont absolument convergentes sur D donc convergentes.

2) Soit $(x_0, y_0) \in \tilde{D}$ on a : $y_0 \in]-1, 1[$ et $x_0 \in I =]-\sqrt{1-y_0^2}, \sqrt{1-y_0^2}[$
 L'application $h_n : x \mapsto a_n(x + iy_0)^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $\forall x \in I, \forall n \geq 0,$
 $h'_n(x) = na_n(x + iy_0)^{n-1}$, et la série $\sum_{n \geq 1} h'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[a, b]$ de I puisque $|x + iy_0|^2 \leq |c|^2 + |y_0|^2 < 1$, où $c = \max(a, b)$.

Alors $x \mapsto \tilde{S}(x + iy_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x + iy_0)^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I en particulier $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe

et vaut $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x_0 + iy_0)^{n-1}$ de plus $(x, y) \in \tilde{D} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x + iy)^{n-1}$ est continue sur \tilde{D} car

composée des deux fonctions continues $(x, y) \in \tilde{D} \mapsto x + iy$ et $z \in D \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$.

3) En raisonnant de la même manière que dans 2) sur $I =]-\sqrt{1-x_0^2}, \sqrt{1-x_0^2}[$ en fixant $x_0 \in]-1, 1[$, on montre que \tilde{S} admet une dérivée partielle par rapport à y en (x, y) et vaut $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x + iy)^{n-1}$ qui est continue sur \tilde{D} . On en déduit alors que \tilde{S} est de classe \mathcal{C}^1 sur \tilde{D} .

Maintenant si on pose $b_n = (n+1)a_{n+1}$ et $c_n = i(n+1)a_{n+1}$ on a : $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x + iy)^n$

$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x + iy)^n$. $S_1 = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ et $S_2 = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ sont les sommes de deux séries

entières de même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ qui est ≥ 1 , et donc d'après ce qui précède

\tilde{S}_1 et \tilde{S}_2 sont de classe \mathcal{C}^2 sur D . De plus :

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x + iy)^{n-1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} na_n(n-1)(x + iy)^{n-2} \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(i \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x + iy)^{n-1} \right) = - \sum_{n=2}^{\infty} na_n(n-1)(x + iy)^{n-2}.$$

Nous déduisons alors que $\forall z \in D, \Delta \tilde{S}(z) = 0$.

4) Si on note $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ et $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n$, on a S_1 et S_2 sont les sommes de séries entières

de rayon de convergence ≥ 1 donc sont de classe \mathcal{C}^2 sur D d'après 3)

et $\forall z \in D, \Delta S_1(z) = \Delta S_2(z) = 0$, et $\tilde{g}_f(x, y) = c_0 + \tilde{S}_1(x, y) + \tilde{S}_2(x, -y)$ donc \tilde{g}_f est \mathcal{C}^2 sur \tilde{D} et $\forall (x, y) \in \tilde{D}, \Delta \tilde{g}_f(x, y) = 0$ d'où $\forall z \in D, \Delta \tilde{g}_f(z) = 0$.

5) pour $z \in D$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} &= \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} = (1 + ze^{-it}) \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-int} \quad \text{car } |ze^{-it}| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-int} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} e^{-i(n+1)t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-int} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int} \end{aligned}$$

de même

$$\frac{e^{-it} + \bar{z}}{e^{-it} - \bar{z}} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n e^{int}$$

et alors $P_z(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-int} + \bar{z}^n e^{int})$ d'où :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_z(t) dt = c_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(e^{it}) z^n e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(e^{it}) \bar{z}^n e^{int} dt$$

reste à justifier l'intégration terme à terme :

$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(e^{it}) z^n e^{-int}| \leq m |z|^n$ et $\sum_{n \geq 1} m |z|^n$ converge car $|z| < 1$ donc

$\sum_{n \geq 1} f(e^{it}) z^n e^{-int}$ converge normalement donc uniformément sur $[-\pi, \pi]$ et par suite

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(e^{it}) z^n e^{-int} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

On prouve de même : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(e^{it}) \bar{z}^n e^{int} dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n.$

On a alors $g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_z(t) dt.$

6) les coefficients de Fourier de p_n sont $r \in \mathbb{Z}, \quad c_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-irt} dt = \delta_{n,r}$ alors :

$g_{p_n}(z) = c_n z^n = z^n$ de la même façon on trouve $g_{q_n}(z) = c_{-n} \bar{z}^n = \bar{z}^n$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) dt = g_{p_0}(z) = 1.$$

Si $u \in D, \quad \frac{1+u}{1-u} = \frac{(1+u)(1-\bar{u})}{|1-u|^2} = \frac{1+u-\bar{u}-|u|^2}{|1-u|^2}$ donc :

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1+u}{1-u} \right) = \frac{1-|u|^2}{|1-u|^2} > 0 \quad \text{car } u - \bar{u} \in i\mathbb{R}.$$

Si $t \in \mathbb{R} : \quad P_z(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right) > 0$ car ici $u = ze^{-it} \in D.$

7) Soit $z \in D$ (si g est continue sur T on notera $N(g) = \sup_{z \in T} |g(z)|$)

• si $z \in T, \quad |G_{f_n}(z) - G_f(z)| = |f_n(z) - f(z)| \leq N(f_n - f).$

- si $z \in D$

$$\begin{aligned}
|G_{f_n}(z) - G_f(z)| &= |g_{f_n}(z) - g_f(z)| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(e^{it}) - f(e^{it})) P_z(t) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(e^{it}) - f(e^{it})| P_z(t) dt \quad (P_z(t) \geq 0) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} N(f_n - f) \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) dt = N(f_n - f)
\end{aligned}$$

Alors $\forall z \in \overline{D}$, $|G_{f_n}(z) - G_f(z)| \leq N(f_n - f)$ d'où la convergence uniforme de G_{f_n} vers G_f .

- 8) L'application $h : t \mapsto f(e^{it})$ est continue sur \mathbb{R} 2π -périodique, d'après le deuxième théorème de Weierstrass il existe une suite $(h_n)_{n \geq 0}$ de polynômes trigonométriques 2π -périodique qui

converge uniformément vers h . On note pour $n \geq 0$ $h_n(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{d_n} a_k e^{ikt} + \sum_{k=0}^{d_n} b_k e^{-ikt}$.

Pour $z \in T$ on pose $f_n(z) = a_0 + \sum_{k=0}^{d_n} a_k z^k + \sum_{k=0}^{d_n} b_k \bar{z}^{-k}$, et soit $z \in T$ et $t \in \mathbb{R} : z = e^{it}$ on a :

$$|f_n(z) - f(z)| = |h_n(t) - h(t)| \leq \|h_n - h\|_{\infty} \text{ d'où } N(f_n - f) \leq \|h_n - h\|_{\infty} \text{ et donc :}$$

$(f_n)_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f , d'après 7) $(G_{f_n})_n$ converge uniformément sur \overline{D}

vers G_f et d'après 6) $G_{f_n} = f_n$ car $f_n = a_0 + \sum_{k=0}^{d_n} a_k p_k + \sum_{k=0}^{d_n} b_k q_k$ donc les G_{f_n} sont continues,

donc G_f est continue.

- 9) Soit $z = x + iy \in D$ comme $\Delta G(z) = 0$, $\Delta u(z) = 4\varepsilon > 0$

u est continue sur le compact \overline{D} à valeurs dans \mathbb{R} donc bornée et atteint ses bornes, en particulier, $\exists z_0 \in \overline{D} : u(z_0) = \max_{z \in \overline{D}} u(z)$. On pose $z_0 = a + ib$ et on suppose que $z_0 \in D$,

l'application $h : x \mapsto u(x + ib)$ définie sur $[-\sqrt{1-b^2}, \sqrt{1-b^2}]$ atteint son maximum en $a \in]-\sqrt{1-b^2}, \sqrt{1-b^2}[$ donc $h''(a) \leq 0$ (si $h''(a) > 0$, h serait strict convexe au voisinage de a et $h(a)$ ne serait pas maximum) on a alors $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, b) \leq 0$ on vérifie de même que $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a, b) \leq 0$

or $\Delta u(z) > 0$, absurde, alors $z_0 \in T$, et donc :

$$\forall z \in \overline{D}, \quad u(z) \leq u(z_0) = G(z_0) + \varepsilon |z_0| = f(z_0) + \varepsilon = \varepsilon.$$

- 10) On déduit de 9) que $\forall z \in \overline{D}$, $G(z) \leq G(z) + \varepsilon |z|^2 \leq \varepsilon$ et comme $-G$ vérifie aussi $(a_1), (a_2)$ et (a_3) , alors $\forall z \in \overline{D}$, $|G(z)| \leq \varepsilon$, ε est arbitraire donc $G = 0$.

Si G est à valeurs quelconques, $Re(G)$ et $Im(G)$ sont à valeurs réelles et vérifient $(a_1), (a_2)$ et (a_3) , d'après ce qui précède elles sont nulles et donc G est nulle.

Si maintenant f est quelconque et G vérifie $(a_1), (a_2)$ et (a_3) , alors $G - G_f$ vérifie aussi $(a_1), (a_2)$ et (a_3) , et sa restriction à T est nulle donc elle est nulle et $G = G_f$.

B. Deux applications

- 11) G est de classe \mathcal{C}^2 sur D et $\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cos y$, $\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \cos y$, d'où $\Delta G = 0$.

Pour tout $x + iy \in T$ on pose $f(x + iy) = e^x \cos y$, comme G vérifie $(a_1), (a_2)$ et (a_3) , alors $G = G_f$.

les coefficients de Fourier de f sont $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) e^{-int} dt$

d'autre part pour tout $z = x + iy \in D$:

$$g_f(z) = Re(e^{x+iy}) = \frac{1}{2}(e^{x+iy} + e^{x-iy}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!}$$

Alors $c_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{Z}^*$ $c_n = \frac{1}{|n|!}$

12) \implies Soit $\overline{D}(a, R) \subset U$, pour $z \in \overline{D}$ on pose $G(z) = u(a + Rz)$ et pour $z \in T$ $f(z) = u(a + Rz)$. On a puisque u est de classe \mathcal{C}^2 et $\Delta u = 0$ sur $D(a, R)$ donc $G = G_f$, et d'après 5) $\forall z \in D(a, R)$, $g_f\left(\frac{z-a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$ et donc :

$$u(z) = u\left(a + R\frac{z-a}{R}\right) = g_f\left(\frac{z-a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$$

\iff Nous allons prouver que u est de classe \mathcal{C}^2 sur tout disque $D(a, R) \subset U$ et que $\Delta u = 0$ sur $D(a, R)$ ce qui entrainera que u est de classe \mathcal{C}^2 sur U , et $\Delta u = 0$ sur U . Soit $D(a, R) \subset U$ l'application $f : z \mapsto u(a + Rz)$ est continue sur T d'après 5) :

$$\forall z \in D(a, R), \quad g_f\left(\frac{z-a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt = u(z)$$

et comme g_f est de classe \mathcal{C}^2 et $\Delta g_f = 0$ sur D , u est de classe \mathcal{C}^2 et $\Delta u = 0$ sur D .

13) Soit $a \in U, R > 0 : \overline{D}(a, R) \subset U$ on a : $u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + Re^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$ et :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (u_n(a + Re^{it}) - u(a + Re^{it})) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt \right| \leq \|u_n - u\|_{\infty} \longrightarrow 0$$

donc $u_n(z)$ converge vers $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$ de l'unicité de la limite on déduit

que : $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$ et d'après 12) u est de classe \mathcal{C}^2 et $\Delta u = 0$

C. Propriétés duales

14) (c_1) : Si c_n et c'_n sont les coefficients d'indice n de f_1 et f_2 respectivement, alors $\lambda c_n + c'_n$ est celui de $\lambda f_1 + f_2$ (linéarité de l'intégrale), donc φ_z est linéaire.

(c_2) et (c_3) se déduisent immédiatement de 6).

15) φ_z et φ coïncident sur $\{p_n, q_n/n \in \mathbb{N}\}$ donc sur $\text{vect}\{p_n, q_n/n \in \mathbb{N}\}$ et puisqu'elles sont linéaires et donc coïncident sur $\overline{\text{vect}\{p_n, q_n/n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{C}(T)$ puisqu'elles sont continues (linéaires en dim finie).

16) Soit $u \in T$

$$\begin{aligned} |h(u)|^2 &= (2f(u) - N(f) + i\lambda)(2f(u) - N(f) - i\lambda) \\ &= (2f(u) - N(f))^2 + \lambda^2 \\ &= 4f(u)^2 - 4f(u)N(f) + N(f)^2 + \lambda^2 \\ &\leq N(f)^2 + \lambda^2 \quad (f(u) \leq N(f)) \end{aligned}$$

$$\text{et donc : } \sup_{u \in T} |h(u)|^2 \leq N(f)^2 + \lambda^2$$

si on note $u_0 \in T : \sup_{u \in T} |f(u)| = f(u_0)$

$(f \geq 0)$ et le sup est atteint car f est continue sur le compact T

On vérifie que $|h(u_0)|^2 = N(f)^2 + \lambda^2$ et alors $\sup_{u \in T} |h(u)|^2 = N(f)^2 + \lambda^2$

17) On a $h = f + (-N(f) + i\lambda)p_0$ et comme φ est linéaire et $\varphi(p_0) = 1$ on a : $\varphi(h) = \varphi(f) - N(f) + i\lambda$ d'où en posant $\varphi(f) = a + ib$

$$\begin{aligned} |\varphi(h)|^2 &= (a - N(f) + i(\lambda + b))(a - N(f) - i(\lambda + b)) \\ &= (a - N(f))^2 + (\lambda + b)^2 \\ &= a^2 + N(f)^2 - 2aN(f) + \lambda^2 + 2\lambda b + b^2 \end{aligned}$$

Or φ vérifie (c_4) d'où on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + N(f)^2 - 2aN(f) + \lambda^2 + 2\lambda b + b^2 \leq N(h) = N(f)^2 + \lambda^2$$

c-à-d $\forall \lambda \in \mathbb{R} : 2\lambda b + a^2 - 2aN(f) + b^2 \leq 0$ d'où $b = 0$ et $a(a - 2N(f)) \leq 0$

donc $\varphi(f) \in \mathbb{R}$ et puisque φ vérifie (c_4) $a = \varphi(f) \leq N(f)$ donc $a - 2N(f) \leq 0$ et alors $a = \varphi(f) \geq 0$.

18) Si f est réelle $N(f) - f \geq 0$ donc $\varphi(N(f) - f)$ est un réel positif et donc $N(f) - \varphi(f) \in \mathbb{R}$ (φ est linéaire et $\varphi(p_0) = 1$.) On en déduit que $\varphi(f)$ est un réel.

Soit $f \in \mathcal{C}$ on pose $f = f_1 + if_2$ (f_i réelle)

$\overline{\varphi(f)} = \overline{\varphi(f_1 - if_2)} = \overline{\varphi(f_1) - i\varphi(f_2)} = \varphi(f_1) + i\varphi(f_2) = \varphi(f)$ les f_i sont réelles. En particulier $\overline{\varphi(q_n)} = \varphi(\overline{q_n}) = \varphi(p_n) = z^n$ d'où $\varphi(q_n) = \overline{z^n}$ alors φ vérifie (c_1) , (c_2) et (c_3) , d'après 15) $\varphi = \varphi_z$.