

CCP 2003 Mathématiques 1

Partie I

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $f_{-\alpha} = f_\alpha$. On peut donc choisir $\alpha > 0$.

2. $\frac{2\pi}{\alpha}$ est période de f_α .

3. f_α est C^∞ sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha''(x) = -\alpha^2 f_\alpha(x)$. Donc :

$$\boxed{f_\alpha \text{ est solution de l'équation différentielle } y'' + \alpha^2 y = 0}$$

C'est une équation linéaire homogène simple dont l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \lambda \cos(\alpha x) + \mu \sin(\alpha x) \end{array} \right. / \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

4. $\forall x \in [0, \pi]$, $f_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $\alpha x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2\alpha} + k \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}$$

Or $\frac{\pi}{2\alpha} + k \frac{\pi}{\alpha} \in [0, \pi] \Leftrightarrow k \geq 0$ et $\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha} \leq \pi$

$$\Leftrightarrow k \in \mathbb{N} \text{ et } 2k+1 \leq \frac{2\alpha}{\pi} (E+d)$$

$$\Leftrightarrow k \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq E + \frac{2d-1}{2}. \text{ Donc :}$$

• si $E = 0$, comme $-\frac{1}{2} < \frac{2d-1}{2} < \frac{1}{2}$, on n'a pas de solution de la forme $\frac{\pi}{2\alpha} + k \frac{\pi}{\alpha}$ si $d < \frac{1}{2}$ et une solution pour $k = 0$ si $d \geq \frac{1}{2}$.

• si $E \geq 1$, on a les solutions obtenues pour $k = 0, 1, \dots, E-1$ si $d < \frac{1}{2}$ ou pour $k = 0, 1, \dots, E$ si $d \geq \frac{1}{2}$.

On a donc :

$$\boxed{E \text{ solutions si } d < \frac{1}{2} \text{ et } E+1 \text{ solutions si } d \geq \frac{1}{2}}$$

Partie II

1. Supposons $f_{\alpha,\beta}$ T périodique où $T \in \mathbb{R}^{+*}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\alpha(x+T)) + \cos(\beta(x+T)) = \cos(\alpha x) + \cos(\beta x) \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha T) + \cos(\beta T) = 2 \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha T) = \cos(\beta T) = 1 \Rightarrow$$

$$\exists p, k \in \mathbb{N}^*, \alpha T = 2p\pi \text{ et } \beta T = 2k\pi \Rightarrow$$

$$\exists p, k \in \mathbb{N}^*, k\alpha T = p\beta T \Rightarrow$$

$$\underline{\exists p, k \in \mathbb{N}^*, k\alpha = p\beta}$$

Supposons $\exists p, k \in \mathbb{N}^*$, $k\alpha = p\beta$ et posons $T = \frac{2p\pi}{\alpha} = \frac{2k\pi}{\beta}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\alpha,\beta}(x+T) = \cos(\alpha(x+T)) + \cos(\beta(x+T))$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(\alpha x + 2p\pi) + \cos(\beta x + 2k\pi) \\
&= f_{\alpha,\beta}(x) \text{ et } f_{\alpha,\beta} \text{ } T \text{ périodique. Donc, j'ai montré :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f_{\alpha,\beta} \text{ } T \text{ périodique} \Leftrightarrow \exists p, k \in \mathbb{N}^*, k\alpha = p\beta}$$

2. Supposons $\exists p, k \in \mathbb{N}^*, k\alpha = p\beta$. On a vu dans la question précédente qu'une période de $f_{\alpha,\beta}$ est alors nécessairement multiple de $\frac{2\pi}{\alpha}$ et de $\frac{2\pi}{\beta}$, plus petites périodes strictement positives de f_α et de f_β . Elle est donc de la forme $\frac{2p\pi}{\alpha} = \frac{2k\pi}{\beta}$. En supposant p et k premiers entre eux, on obtient la plus petite période strictement positive de $f_{\alpha,\beta}$. Dans ce cas :

$$\boxed{T_{\alpha,\beta} = pT_\alpha = kT_\beta}$$

si on a aussi supposé que $T_\alpha = \frac{2\pi}{\alpha}$ et $T_\beta = \frac{2\pi}{\beta}$ sont les plus petites périodes strictement positives de f_α et f_β .

$$\begin{aligned}
3. f_{\alpha,\beta} \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f''_{\alpha,\beta}(x) &= -\alpha^2 f_\alpha(x) - \beta^2 f_\beta(x) \Rightarrow \\
f''_{\alpha,\beta}(x) + \alpha^2 f_{\alpha,\beta}(x) &= -\alpha^2 f_\alpha(x) - \beta^2 f_\beta(x) + \alpha^2 f_\alpha(x) + \alpha^2 f_\beta(x) \Rightarrow \\
f''_{\alpha,\beta}(x) + \alpha^2 f_{\alpha,\beta}(x) &= (\alpha^2 - \beta^2) f_\beta(x). \text{ D'où :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f''_{\alpha,\beta} + \alpha^2 f_{\alpha,\beta} = (\alpha^2 - \beta^2) f_\beta}$$

$$\begin{aligned}
4. \text{ On a alors } f_{\alpha,\beta}^{(4)} + \alpha^2 f_{\alpha,\beta}^{(2)} &= (\alpha^2 - \beta^2) f''_\beta \Rightarrow \\
f_{\alpha,\beta}^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) f_{\alpha,\beta}^{(2)} + \alpha^2 \beta^2 f_{\alpha,\beta} &= (\alpha^2 - \beta^2) f''_\beta + \beta^2 f_{\alpha,\beta}^{(2)} + \alpha^2 \beta^2 f_{\alpha,\beta} \Rightarrow \\
f_{\alpha,\beta}^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) f_{\alpha,\beta}^{(2)} + \alpha^2 \beta^2 f_{\alpha,\beta} &= (\alpha^2 - \beta^2) (-\beta^2 f_\beta) + \beta^2 (-\alpha^2 f_\alpha - \beta^2 f_\beta) + \alpha^2 \beta^2 f_\alpha + \\
\alpha^2 \beta^2 f_\beta &\Rightarrow \\
f_{\alpha,\beta}^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) f_{\alpha,\beta}^{(2)} + \alpha^2 \beta^2 f_{\alpha,\beta} &= -\alpha^2 \beta^2 f_\beta + \beta^4 f_\beta - \alpha^2 \beta^2 f_\alpha - \beta^4 f_\beta + \alpha^2 \beta^2 f_\alpha + \alpha^2 \beta^2 f_\beta \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{f_{\alpha,\beta}^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) f_{\alpha,\beta}^{(2)} + \alpha^2 \beta^2 f_{\alpha,\beta} = 0}$$

$$\boxed{\text{D'où, } f_{\alpha,\beta} \text{ est solution de } (E) : y^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) y^{(2)} + \alpha^2 \beta^2 y = 0}$$

$$5. f_\alpha^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) f_\alpha^{(2)} + \alpha^2 \beta^2 f_\alpha = \alpha^4 f_\alpha - \alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2) f_\alpha + \alpha^2 \beta^2 f_\alpha = 0. \text{ Donc :}$$

$$\underline{f_\alpha \text{ et de même } f_\beta \text{ sont solutions de } (E).}$$

$$(f'_\alpha)^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) (f'_\alpha)^{(2)} + \alpha^2 \beta^2 f'_\alpha = \left(f_\alpha^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) f_\alpha^{(2)} + \alpha^2 \beta^2 f_\alpha \right)' = 0. \text{ Donc :}$$

$$\underline{f'_\alpha \text{ et de même } f'_\beta \text{ sont solutions de } (E).}$$

6. Supposons $\lambda, \mu, \nu, \xi \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda f_\alpha + \mu f_\beta + \nu f'_\alpha + \xi f'_\beta = 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cos(\alpha x) + \mu \cos(\beta x) - \alpha \nu \sin(\alpha x) - \beta \xi \sin(\beta x) = 0$$

Pour $x = 0$, on obtient $\lambda + \mu = 0$.

En dérivant 2 fois et en faisant $x = 0$, on obtient $\alpha^3 \lambda + \beta^3 \mu = 0$. On a donc le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \alpha^2 \lambda + \beta^2 \mu = 0 \end{cases} \text{ d'inconnues } \lambda \text{ et } \mu \text{ et de déterminant } \beta^3 - \alpha^3 \neq 0 \text{ car } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq \beta. \text{ Donc } \lambda = \mu = 0.$$

En dérivant 1 fois et en faisant $x = 0$, on obtient $\alpha^2 \nu + \beta^2 \xi = 0$.

En dérivant 3 fois et en faisant $x = 0$, on obtient $\alpha^4\nu + \beta^4\xi = 0$. On a donc le système linéaire:

$$\begin{cases} \alpha^2\nu + \beta^2\xi = 0 \\ \alpha^4\nu + \beta^4\xi = 0 \end{cases} \text{ d'inconnues } \nu \text{ et } \xi \text{ et de déterminant } \alpha^2\beta^2(\beta^2 - \alpha^2) \neq 0 \text{ car } \alpha, \beta > 0 \text{ et } \alpha \neq \beta.$$

Donc $\nu = \xi = 0$.

On en déduit que :

$$\boxed{(f_\alpha, f_\beta, f'_\alpha, f'_\beta) \text{ est une base de l'espace des solutions de } (E)}$$

Partie III

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x)$.

f étant 4π -périodique et paire, on peut en limiter l'étude à $[0, 2\pi]$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin(x)$
 $= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
 $= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. D'où :

$\forall x \in [0, 2\pi], f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ou $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{4}$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$ ou $x = 2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. D'où le tableau de variations :

x	0	x_0	2π
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$	2	$f(x_0)$	0

3. $x_0 = 2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. D'où :

$f(x_0) = \cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) + \cos(x_0)$. Or $\cos(x_0) = 2\cos^2\left(\frac{x_0}{2}\right) - 1 = -\frac{7}{8}$. Donc

$$\boxed{f(x_0) = -\frac{9}{8}}$$

4. D'après le tableau de variations de f et la continuité de f , en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on constate que :

- si $c \notin \left[-\frac{9}{8}, 2\right]$, l'équation $f(x) = c$ n'admet pas de solution
- si $c = -\frac{9}{8}$, l'équation $f(x) = c$ admet une solution unique x_0
- si $c \in \left]-\frac{9}{8}, 0\right]$, l'équation $f(x) = c$ admet exactement 2 solutions, l'une dans $[0, x_0[$ et l'autre dans $]x_0, 2\pi]$
- si $c \in]0, 2]$, l'équation $f(x) = c$ admet 1 solution dans $[0, x_0[$

5. $\forall x \in [0, 2\pi], f(x) = -1 \Leftrightarrow \cos(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -1$
 $\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ou $2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$. D'où les solutions de l'équation :

$$\boxed{\pi, \frac{4\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 2\pi], f(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \pm\left(\pi - \frac{x}{2}\right) \text{ mod } 2\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = 2\pi \end{aligned}$$

. D'où les solutions de l'équation :

$$\boxed{\frac{2\pi}{3}, 2\pi}$$

6. Dans le cas où $c \in \left]-\frac{9}{8}, 0\right]$, l'équation admet 2 solutions distinctes x_1 et x_2 dans $[0, 2\pi]$, d'où $\frac{x_1}{2} \in [0, \pi]$ et $u = \cos\left(\frac{x_1}{2}\right)$ et $v = \cos\left(\frac{x_2}{2}\right)$ sont deux réels distincts. Or :

$$\begin{aligned} f(x) = c &\Leftrightarrow \cos(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = c \\ &\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - c = 0. \end{aligned}$$

D'où u et v sont solutions de l'équation $2t^2 + t - 1 - c = 0$ d'inconnue t .

On en déduit :

$$\boxed{u + v = \cos\left(\frac{x_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{x_2}{2}\right) = -\frac{1}{2} \text{ et } u \times v = \cos\left(\frac{x_1}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x_2}{2}\right) = -\frac{1+c}{2}}$$

7. L'équation à résoudre est linéaire du second ordre à coefficients constants.

• L'équation homogène a pour solutions les applications du type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \lambda \cos\left(\sqrt{\frac{5}{8}}x\right) + \mu \sin\left(\sqrt{\frac{5}{8}}x\right)$$

où λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

• Une solution particulière de $8y'' + 5y = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est de la forme $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec

$$x \rightarrow \alpha \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2\alpha \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2\beta \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 5\alpha \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 5\beta \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ et } \beta = 0$$

Une solution particulière de $8y'' + 5y = -3\cos(x)$ est de la forme $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec :

$$x \rightarrow \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -8\alpha \cos(x) - 8\beta \sin(x) + 5\alpha \cos(x) + 5\beta \sin(x) = -3\cos(x) \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ et } \beta = 0.$$

D'où une solution particulière de $8y'' + 5y = 3\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x)\right]$ est $f_{\frac{1}{2},1}$. D'où sa solution générale

: $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$ où λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$x \rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x) + \lambda \cos\left(\sqrt{\frac{5}{8}}x\right) + \mu \sin\left(\sqrt{\frac{5}{8}}x\right)$$

Si en outre $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$, on a $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. On obtient la solution cherchée :

$$\boxed{f_{1, \frac{1}{2}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x)}$$

8. En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}$, on obtient, d'après II.3., $f''_{1, \frac{1}{2}} + f_{1, \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}f_{\frac{1}{2}} \left(\alpha^2 - \beta^2 = \frac{3}{4} \right)$.

En prenant $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$, on obtient, d'après II.3., $f''_{\frac{1}{2}, 1} + \frac{1}{4}f_{\frac{1}{2}, 1} = -\frac{3}{4}f_1 \left(\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{3}{4} \right)$.

Par addition membre à membre, on obtient :

$$2f''_{1, \frac{1}{2}} + \frac{5}{4}f_{1, \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \left(f_{\frac{1}{2}} - f_1 \right) \Leftrightarrow 8f''_{1, \frac{1}{2}} + 5f_{1, \frac{1}{2}} = 3 \left(f_{\frac{1}{2}} - f_1 \right)$$

et donc que $f_{1, \frac{1}{2}}$ est solution particulière de $8y'' + 5y = 3 \left(f_{\frac{1}{2}} - f_1 \right)$.

Comme $f_{1, \frac{1}{2}}(0) = 2$ et $f'_{1, \frac{1}{2}}(0) = 0$, on retrouve $f_{1, \frac{1}{2}}$, unique solution au problème de Cauchy posé.

Partie IV

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} U_0(x) = \sin(x) f_1(x) = \sin(x) \cos(x) \\ U_1(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) P_1(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) \end{cases}$. Donc :

$$\boxed{U_1 = \frac{1}{2}U_0}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, U_{n+1}(x) = \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$
 $= \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$
 $= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$
 $= \frac{1}{2} U_n(x)$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n}$$

et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

3. Soit $x \in]0, \pi]$. Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n(x) = \frac{1}{2^n} U_0(x) = \frac{\sin(x) \cos(x)}{2^n} \Rightarrow$
 $P_n(x) = \frac{\sin(x) \cos(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \left(\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0 \right)$. Comme $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{\sin(x) \cos(x)}{x}}$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(0) = 1$ et

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) \cos(x)}{x}}$$

Le résultat précédent se prolonge donc par continuité en 0.

Partie V

1. Comme $k \in \mathbb{N}^*$, f_k est 2π -périodique. Comme F_k est définie sur un intervalle semi-ouvert de longueur 2π , elle coïncide avec f_k . D'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, F_k = f_k}$$

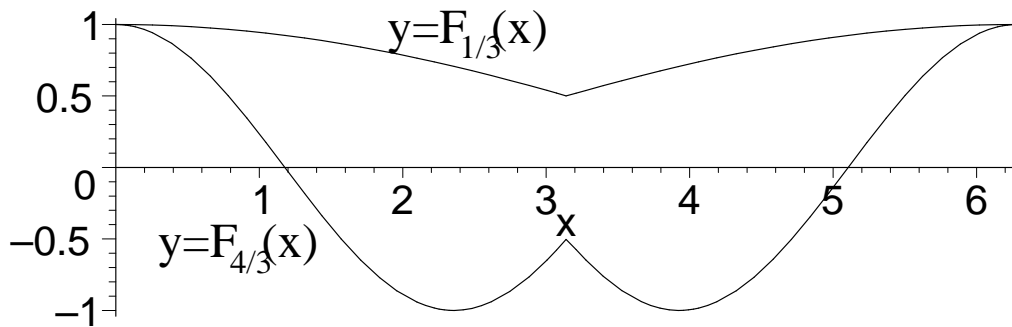
2. $F_{\frac{1}{3}}$ et $F_{\frac{4}{3}}$ sont paires et il suffit de les étudier sur $[0, \pi]$. Elles sont aussi dérivables sur $[0, \pi]$.

$\forall x \in [0, \pi]$, $F'_{\frac{1}{3}}(x) = -\frac{1}{3} \sin\left(\frac{x}{3}\right) \leq 0$. D'où on obtient le tableau de variations de $F_{\frac{1}{3}}$ sur $[0, \pi]$.

x	0		π
$F'_{\frac{1}{3}}(x)$	0	-	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$
$F_{\frac{1}{3}}(x)$	1	\searrow	$\frac{1}{2}$

$\forall x \in [0, \pi]$, $F'_{\frac{4}{3}}(x) = -\frac{4}{3} \sin\left(\frac{4x}{3}\right)$. D'où on obtient le tableau de variations de $F_{\frac{4}{3}}$ sur $[0, \pi]$.

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	2π
$F'_{\frac{4}{3}}(x)$	0	-	0
$F_{\frac{4}{3}}(x)$	1	\searrow	\nearrow
		-1	
			$-\frac{1}{2}$



3. Comme $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $F_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$, F_α est continue sur $]-\pi, \pi[$.

En outre, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} F_\alpha(x) = f_\alpha(\pi) = F_\alpha(\pi)$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^+} F_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} F_\alpha(x - 2\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \cos(\alpha(x - 2\pi)) = \cos(\alpha\pi) = F_\alpha(\pi)$. D'où F_α est continue en π . En utilisant la 2π -périodicité de F_α , on obtient que :

$$\underline{F_\alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

Comme $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $F_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$, F_α est C^∞ sur $]-\pi, \pi[$ et $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $F'_\alpha(x) = -\alpha \sin(\alpha x)$.

En outre, $\left\{ \begin{array}{l} F_\alpha \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} F'_\alpha(x) = -\alpha \sin(\alpha\pi) \end{array} \right.$ montre que F_α est dérivable à gauche en π et que $(F_\alpha)'_g(\pi) = -\alpha \sin(\alpha\pi)$.

Comme $\forall x \in]\pi, 3\pi[$, $F_\alpha(x) = \cos(\alpha(x - 2\pi))$, F_α est C^∞ sur $]\pi, 3\pi[$ et $\forall x \in]\pi, 3\pi[$, $F'_\alpha(x) = -\alpha \sin(\alpha(x - 2\pi))$.

En outre, $\left\{ \begin{array}{l} F_\alpha \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} F'_\alpha(x) = \alpha \sin(\alpha\pi) \end{array} \right.$ montre que F_α est dérivable à droite en π et que $(F_\alpha)'_d(\pi) = \alpha \sin(\alpha\pi) \neq (F_\alpha)'_g(\pi)$. Donc F_α n'est pas dérivable en π . En utilisant la 2π -périodicité de F_α , on obtient que :

F_α n'est pas dérivable en les points de la forme $(2p+1)\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$

4. $F_\alpha(\pi) = \cos((E+d)\pi)$. D'où :

$$\bullet \text{ si } \underline{E \text{ est pair}}, F_\alpha(\pi) = \cos(d\pi) \text{ et si } \begin{cases} \text{si } d < \frac{1}{2}, F_\alpha(\pi) > 0 \\ \text{si } d = \frac{1}{2}, F_\alpha(\pi) = 0 \\ \text{si } d > \frac{1}{2}, F_\alpha(\pi) < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ si } \underline{E \text{ est impair}}, F_\alpha(\pi) = -\cos(d\pi) \text{ et si } \begin{cases} \text{si } d < \frac{1}{2}, F_\alpha(\pi) < 0 \\ \text{si } d = \frac{1}{2}, F_\alpha(\pi) = 0 \\ \text{si } d > \frac{1}{2}, F_\alpha(\pi) > 0 \end{cases}$$

$(F_\alpha)'_g(\pi) = -\alpha \sin((E+d)\pi)$. D'où :

$$\bullet \text{ si } \underline{E \text{ est pair}}, (F_\alpha)'_g(\pi) = -\alpha \sin(d\pi) < 0$$

$$\bullet \text{ si } \underline{E \text{ est impair}}, (F_\alpha)'_g(\pi) = \alpha \sin(d\pi) > 0$$

5. F_α est continue sur \mathbb{R} , 2π -périodique et paire. Donc ses coefficients de Fourier ont un sens et vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(\alpha) = 0$$

$$a_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x) dx = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos((\alpha+n)x) + \cos((\alpha-n)x)] dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((\alpha+n)x)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)x)}{\alpha-n} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2\alpha(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}. \text{ On obtient ainsi la série de Fourier de } F_\alpha, \text{ définie pour tout } x \in \mathbb{R},$$

par :

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2\alpha(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos(nx)}$$

F_α étant continue sur \mathbb{R} et C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $F_\alpha(x)$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos(nx)}$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \text{ si } n = 0, a_0(\alpha) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow k} a_0(\alpha) = 0$$

- si $n = k$, $a_k(\alpha) = \frac{2\alpha(-1)^k \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - k^2)} \underset{\alpha \rightarrow k}{\sim} \frac{2k(-1)^k \sin((\alpha - k)\pi)(-1)^k}{\pi(\alpha - k)(\alpha + k)}$
 $\underset{\alpha \rightarrow k}{\sim} \frac{2k(\alpha - k)\pi}{2k\pi(\alpha - k)}$ et $\lim_{\alpha \rightarrow k} a_k(\alpha) = 1$
- si $n \neq 0$ et $n \neq k$, $a_n(\alpha) = \frac{2\alpha(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$ et $\lim_{\alpha \rightarrow k} a_n(\alpha) = 0$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} \text{si } n \neq k, \lim_{\alpha \rightarrow k} a_n(\alpha) = 0 \\ \text{si } n = k, \lim_{\alpha \rightarrow k} a_n(\alpha) = 1 \end{cases}}$$

7. Pour $x = \pi$, le développement en série de Fourier de F_α donne :

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos(n\pi) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}}$$

△△△

Rédigé par

*Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
 Lycée Chaptal, 6, allée Chaptal, 22000 StBrieuc
 Tel. 0296639414
 Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr*

à l'aide de Scientific Workplace