

# CONTRÔLE A POSTERIORI

BANQUE PT - PHILIPPE GUILHAUMON

## Partie I :

### Résumé

Cette première partie comporte deux sections relativement indépendantes : elles présentent des exercices d'analyse reliant le calcul d'intégrales complexes à deux applications venant d'autres secteurs de l'analyse :

- Les séries de *Fourier* comme moyen de calculer des sommes de séries numériques
- Un calcul d'intégrales de *Wallis* en s'appuyant sur l'exponentielle complexe.

1. On commence par « définir » une fonction  $h$  périodique de période  $2\pi$  par la description de sa restriction sur une demi-période et un argument concernant le caractère impair de  $h$  sur son domaine :

**Remarque personnelle :** il n'est pas fait mention précise du domaine de définition de  $h$  qui semble être définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . On aurait dû préciser que l'on définit  $h(\pi) = 0$  (nous le supposons dans toute la suite), puisque concernant les séries de *Fourier*, le programme aborde uniquement les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

a. La première question est une question de cours : on demande les expressions littérales des coefficients trigonométriques de *Fourier* de  $h$ . Après avoir noté que  $h$  est une fonction  $2\pi$  périodique et continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , on choisit les expressions générales suivantes :  
pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$a_0(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt$$
$$a_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos(nt) dt$$
$$b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(nt) dt$$

le caractère impair de la fonction  $h$  permet d'obtenir pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} a_0(h) &= 0 \\ a_n(h) &= 0 \\ b_n(h) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = -\frac{2(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

b. La deuxième question porte sur le seul théorème de convergence (simple) de la série de *Fourier* de  $h$  vers sa régularisée disponible en PT :

### Extrait du programme :

(...) pour toute fonction  $T$ -périodique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  par morceaux, lorsque  $n$  tend vers l'infini, les sommes de *Fourier*  $S_n(f)(t)$  convergent en tout  $t$  réel, vers  $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$  (...) Cas où  $f$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux. (...)

**Remarque personnelle :** on aurait pu préciser si la citation de ce théorème devait être adaptée au contexte de l'exercice, ou si le cas du signal continu devait être évoqué.

c. On fait aussi référence au théorème de *Dirichlet* : la preuve de la convergence ponctuelle de la série de *Fourier* de  $h$  demande que l'on vérifie une ou deux des hypothèses rappelées ci-dessus.

Cette vérification devrait présenter les deux points suivants :

- La vérification des hypothèses sur la période  $[-\pi, \pi]$  où  $h(x) = x$  si  $x \in ]-\pi, \pi[$  et  $h(\pi) = h(-\pi) = 0$
- La mise en évidence de la classe  $C^1$  de  $h$  sur  $]-\pi, \pi[$  et l'existence des deux limites suivantes  $h'(\pi - 0)$  et  $h'(-\pi + 0)$

Pour ce qui est de l'expression de la série de *Fourier*, on obtient suite à 1.a :

$$2 \left( \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx) \right)$$

d. Dans cette question, on fait à nouveau référence au théorème de *Dirichlet* sur la valeur en  $x$  de la somme de la série de *Fourier* : après avoir vérifié que  $h(x) = \frac{h(x+0) + h(x-0)}{2}$  pour tout  $x \in ]0, \pi[$  puisque  $h$  est continue sur  $]0, \pi[$ , on en déduit que :

$$\forall x \in ]0, \pi[, h(x) = 2 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx) \right)$$

ce qui se reformule comme voulu.

e. Dans cette question, on particularise l'égalité de la question précédente, au cas  $x = \frac{\pi}{2}$ . Il est utile de mettre en avant le fait que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 2n \text{ est pair} \\ (-1)^n & \text{si } m = 2n + 1 \text{ est impair} \end{cases}$$

pour le résultat désiré.

$$\pi = 4 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$$

2. Dans cette partie, on propose de calculer les intégrales de *Wallis*.

**Remarque personnelle** ce sujet a déjà été abordé en 2006 en banque PT dans une optique différente.

a. Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , la première égalité s'obtient par succession des opérations suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) dt \stackrel{u = \frac{\pi}{2} - t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(-u))^{2n} du \stackrel{\text{cos paire}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(u) du$$

b. Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , cette deuxième identité découle des égalités qui suivent :

$$\boxed{J_n} = \int_0^{\pi} \sin^{2n}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n}(t) dt \stackrel{t = u + \frac{\pi}{2}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{2n}\left(u + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos^{2n}(u)} du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt$$

c. Nous savons que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ . Nous en déduisons les formules d'*Euler* :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

d. Par définition, nous avons :

- si  $k = 0$ , cette intégrale vaut  $\boxed{\pi}$ .
- si  $k \in \mathbb{Z}^*$  :

$$\boxed{\int_0^\pi \exp(ikt) dt} = \int_0^\pi \cos(kt) dt + i \int_0^\pi \sin(kt) dt = \frac{1}{k} [\sin(kt) - i \cos(kt)]_0^\pi = \frac{-i}{k} [\exp(ikt)]_0^\pi = \boxed{\frac{i}{k} (1 - (-1)^k)}$$

e. Nous avons rappelé que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(t) = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2}$  cela donne

$$\boxed{\cos^{2n}(t)} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \exp(ikt) \exp(-(2n-k)it) = \boxed{\frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \exp(2i(k-n)t)}$$

g. Par linéarité des intégrales définies et continuité des fonctions intégrandes, on obtient l'identité :

$$\int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^\pi \exp(2i(k-n)t) dt$$

pendant, pour tout entier  $k$  entre 0 et  $2n$ ,  $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$ .

Nous pouvons écrire les points de détails suivants :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt &= \frac{1}{4^n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \int_0^\pi \exp(2i(k-n)t) dt + \binom{2n}{n} \pi + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^\pi \exp(2i(k-n)t) dt \right) \\ \int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt &= \binom{2n}{n} \frac{\pi}{4^n} + \frac{1}{4^n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \int_0^\pi \exp(2i(k-n)t) dt + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{2n-l} \int_0^\pi \exp(2i(n-l)t) dt \right) \\ \int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt &= \binom{2n}{n} \frac{\pi}{4^n} + \frac{1}{4^n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \int_0^\pi \exp(2i(k-n)t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2n-k} \int_0^\pi \exp(-2i(k-n)t) dt \right) \\ \int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt &= \binom{2n}{n} \frac{\pi}{4^n} + \frac{1}{4^n} 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \int_0^\pi \exp(2i(k-n)t) dt \right) \\ \boxed{\int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt} &= \binom{2n}{n} \frac{\pi}{4^n} + \frac{1}{4^n} 2 \operatorname{Re} \left( \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \frac{i}{(k-n)} (1 - (-1)^{2(k-n)})}_0 \right) = \boxed{\binom{2n}{n} \frac{\pi}{4^n}} \end{aligned}$$

h. Nous montrons que  $J_n = \int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt$  :

$$\begin{aligned} \boxed{J_n} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2n} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2n} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2n} dt \stackrel{2.a}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2n} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{2n} dt \\ J_n &\stackrel{u=t+\frac{\pi}{2}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2n} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left( \sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right) \right)^{2n} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2n} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\cos(u))^{2n} du = \boxed{\int_0^\pi (\cos(t))^{2n} dt} \end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire que

$$J_n = \binom{2n}{n} \frac{\pi}{4^n} = \frac{(2n)!}{n!n!2^n} \pi = \frac{(2n)!}{(n!2^n)^2} \pi$$

et cela permet de montrer la propriété après simplifications.

## Partie II

### Résumé

Dans cette partie, on calcule la valeur limite en  $+\infty$  de la fonction sinus intégral : l'approche choisie s'appuie sur l'étude de fonctions définies par des intégrales et un théorème (admis) de passage à la limite sous le signe intégral.

1. Cette inégalité, très classique, peut-être établie de multiples façons : vu l'exercice, nous optons pour une solution s'appuyant sur une expression intégrale :

$$\forall t > 0, \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| = \left| \int_0^1 \cos(xt) dx \right| \leq \int_0^1 |\cos(xt)| dx \leq \int_0^1 dx = 1$$

donc

$$\forall t > 0, \frac{|\sin(t)|}{t} \leq 1$$

2. Ils'agit de montrer que les deux intégrales impropres définissant  $\Phi$  et  $\Psi$  sont convergentes pour tout réel strictement positif  $x$ .

- L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} dt$  est une intégrale doublement impropre puisque la fonction intégrande est continue sur  $]0, \infty[$  et que l'intervalle d'intégration est non borné.

– La fonction intégrande se prolonge par continuité en 0 : l'intégrale  $\int_0^1 \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} dt$  est donc convergente car « faussement impropre »

– d'après la question précédente, on a l'inégalité :  $\forall t > 0, \left| \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} \right| \leq e^{-tx}$ .

Vu que  $x > 0$ , par comparaison à une intégrale de référence et grâce à un argument basé sur l'absolue convergence, nous déduisons que  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} dt$  converge

Par définition, nous concluons que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} dt$  est convergente

- L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x} dt$  n'est impropre qu'en  $+\infty$  puisque la fonction intégrande est une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ . De façon analogue au cas précédent, nous pouvons écrire que :

$$\forall x > 0, \forall t > 0, \left| \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x} \right| \leq \frac{e^{-tx}}{x}$$

Cela permet d'établir que  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x} dt$  est convergente.

3. Dans la première partie de cette question, on utilise *théorème de continuité sous le signe intégral*.

**Extrait du programme :**

(...) Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur  $I \times J$ , continue par rapport à  $x$  et continue par morceaux par rapport à  $t$  telle que pour tout élément  $x$  de  $I$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  soit intégrable sur  $J$ . S'il existe une fonction positive  $\varphi$ , continue par morceaux et intégrable sur  $J$ , telle que pour tout élément  $(x, t)$  de  $I \times J$ ,  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$  (hypothèse de domination), alors la fonction  $g$  définie sur  $I$  par la relation  $g(x) = \int_J f(x, t) dt$  est continue sur  $I$  (...)

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie  $K \times J$  où  $K$  est un segment contenu dans  $I$  (...)

• **Continuité de  $\Phi$  :**

L'intégrabilité de  $t \mapsto \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t}$  sur  $J = ]0, +\infty[$  découle des arguments présentés à la réponse précédente. L'hypothèse de domination résulte de :  $\forall x \geq a, \forall t > 0, \left| \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} \right| \leq e^{-at}$ .

Enfin, pour tout  $t > 0$ , la continuité de  $x \in [a, +\infty[ \mapsto \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t}$  étant immédiate, on peut conclure que  $\Phi$  est continue sur  $[a, +\infty[$

• **Continuité de  $\Psi$**

L'intégrabilité de  $t \mapsto \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x}$  sur  $J = ]0, +\infty[$  résulte aussi des arguments développés en 2.. L'hypothèse de domination peut très bien se passer de la version « locale » prévue par le programme (en présentant la fonction comme produit de deux fonctions continues), mais on peut aussi écrire :  $\forall x \in [a, b] = K \subset [a, +\infty[, \forall t > 0, \left| \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x} \right| \leq \frac{e^{-ta}}{b}$  où  $b > a$  est un réel fixé.

Pour tout  $t > 0$ , la continuité de  $x \in [a, +\infty[ \mapsto \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x}$  étant immédiate, on peut conclure que  $\Psi$  est continue sur  $[a, +\infty[$

Dans la deuxième partie de cette question, on met en oeuvre le *théorème de dérivabilité sous le signe intégral*

**Extrait du programme :** Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur  $I \times J$  et dérivable par rapport à  $x$ . On suppose que :

- pour tout  $x \in I$ , les fonctions  $t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  sont continues par morceaux et intégrables sur  $J$  ;
- pour tout  $t \in J$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue ;
- il existe une fonction positive  $\varphi$ , continue par morceaux et intégrable sur  $J$ , telle que pour tout élément  $(x, t)$  de  $I \times J$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction  $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et  $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$  (...)

• **Établissement de la classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Phi$  sur  $[a, +\infty[$  :**

Les hypothèses portant sur la continuité par morceaux et la continuité sont faciles à établir. Pour ce qui est de l'intégrabilité sur  $J$ , on peut utiliser la légère redondance présente dans les hypothèses du programme en écrivant :

$$\forall x \geq a, \forall t > 0, \left| \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} \right| \leq e^{-at}$$

$$\forall x \geq a, \forall t > 0, \left| -t \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} \right| \leq e^{-at}$$

afin de vérifier les conditions d'intégrabilité sur  $J$  et de domination de  $f$  et de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sur  $[a, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

• **Établissement de la classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Psi$  sur  $[\alpha, +\infty[$**

On décompose  $\Psi$  comme le produit de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  et  $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt$ . Nous employons enfin les inégalités suivantes pour établir les hypothèses d'intégrabilité et de domination (les hypothèses de continuité sont facilement établies)

$$\begin{aligned} \forall x \in [\alpha, +\infty[, \forall t > 0, |e^{-tx} \cos(t)| &\leq e^{-t\alpha} \\ \forall x \in [\alpha, +\infty[, \forall t > 0, |-te^{-tx} \cos(t)| &\leq te^{-t\alpha} \end{aligned}$$

Cela présente l'avantage de ne pas faire inutilement référence à une hypothèse de domination locale portant sur  $f$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sur  $[\alpha, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  dont le cas n'est pas explicitement un enjeu du programme. En outre, l'intégrabilité sur  $]0, +\infty[$  de  $t \mapsto te^{-t\alpha}$  s'obtient par comparaison avec une intégrale de Riemann, par l'utilisation de la limite suivante :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot te^{-t\alpha} = 0$  par exemple.

4. Nous venons de démontrer que les restrictions des fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  à tout intervalle  $I_\alpha = [\alpha, +\infty[$  (où  $\alpha > 0$  quelconque) sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Comme on a  $]0, +\infty[ = \bigcap_{\alpha > 0} I_\alpha$ , nous en déduisons que  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+,*}$ .

Ainsi, pour tout  $x$  réel strictement positif, on a l'identité :

$$\Phi'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt$$

Si nous suivons l'indication donnée dans l'énoncé, nous écrivons que par définition, pour tout  $x > 0$ ,

$\Psi(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x} dt$ . On note ensuite que l'on a :

$$\underbrace{\int_0^X \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x} dt}_{\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \Psi(x)} = \underbrace{\left[ \frac{e^{-tx} \sin(t)}{x} \right]_0^X}_{\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\int_0^X e^{-tx} \sin(t) dt}_{\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} -\Phi'(x)}$$

Cela permet d'établir que pour  $x > 0$ ,  $\boxed{\Psi(x) = -\Phi'(x)}$

5. Nous calculons  $\Psi(x)$  en suivant la suggestion incitant à procéder par intégration par parties qu'il faudrait appliquer deux fois successives : l'emploi d'une intégrale complexe dont on calculerait ensuite la partie réelle aurait aussi pu être envisagée (en relation avec la partie I). On trouve pour tout  $X > 0$  :

$$\int_0^X \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x} dt = \left[ \frac{e^{-tx} \sin(t)}{x} \right]_0^X + \int_0^X e^{-tx} \sin(t) dt = \frac{e^{-Xx} \sin(X)}{x} + [-e^{-tx} \cos(t)]_0^X - x \int_0^X e^{-tx} \cos(t) dt$$

donc

$$\int_0^X \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x} dt = \frac{1}{(1+x^2)} \left( \frac{e^{-Xx} \sin(X)}{x} - e^{-Xx} \cos(X) + 1 \right)$$

Comme  $x > 0$ , un passage à la limite si  $X \rightarrow +\infty$  donne enfin :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} \cos(t)}{x} dt = \frac{1}{(1+x^2)}$$

et d'après la question précédente, on a pour tout  $x > 0$  :

$$\boxed{\Phi'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)}}$$

6. Nous pouvons écrire la chaîne d'inégalité suivante vu le caractère intégrable sur  $\mathbb{R}^{+,*}$  des différentes fonctions en jeu :

$$|\Phi(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} dt \right| \underset{\substack{\text{inégalité} \\ \text{triangulaire}}}{\leq} \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} \right| dt \underset{\text{question II.1}}{\leq} \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

On a donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0}$

7.  $\Phi$  est une fonction définie sur un intervalle dont la fonction dérivée est facilement reconnaissable : on en déduit l'existence d'une constante réelle  $K$  telle que pour tout  $x > 0$ ,  $\Phi(x) = -\arctan(x) + K$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$ , on déduit que pour tout réel  $x > 0$ ,

$$\boxed{\Phi(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

8. Si on admet le théorème d'échange donné dans l'énoncé, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{-tx} \sin(t)}{t} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

ainsi

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

## Partie III

### Résumé

Dans cette partie, on calcule le développement en série entière d'une fonction  $I$  définie par une intégrale elliptique à paramètre.

1. Pour  $c \in [0, 1[$  fixé, on a  $1 - (c \sin(t))^2 > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et donc la fonction intégrande  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - (c \sin(t))^2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  :  $\boxed{\text{l'intégrale } I(c) \text{ est donc une intégrale définie.}}$
2.
  - a. Il n'y a pas de difficultés :  $\mathcal{D}_f = ]-1, 1[$ .
  - b. On peut considérer par exemple que  $f = g \circ j$  où  $j : x \in \mathcal{D}_f \mapsto 1 - x^2$  est une fonction polynomiale à valeurs dans  $]0, 1[$  et  $g : t \in ]0, 1[ \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$  :  $f$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}_f$  par les théorèmes généraux sur la classe  $\mathcal{C}^1$ . Le caractère dérivable de  $f$  sur  $\mathcal{D}_f$  en résulte.
  - c. **Remarque personnelle :** la notion de fonction développable en série entières hors programme en PT même s'il faut connaître certains DSE(0) classiques : cependant, en reformulant cette question, par exemple :
 

« Montrer qu'il existe une suite réelle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sorte que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  »

 cela entrainé dans le cadre du programme, cependant nous ne savons pas précisément ce qu'attendait le concepteur de sujet comme réponse à cette question, nous proposons quelques pistes en relation avec le programme de PTSI/PT pour ne finalement répondre que partiellement.

• **Premier type de réponse : basée sur les DSE usuels**

Avec l'abus de notation classique concernant les coefficients binomiaux :

$$\forall u \in ]-1, 1[, (1+u)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} u^n$$

$$\text{où } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Dans notre cas,  $\alpha = -\frac{1}{2}$  permet d'écrire

$$\binom{n}{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n 1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!}$$

puisque pour tout  $x \in ]-1, 1[, u = -x^2 \in ]-1, 0[ \subset ]-1, 1[,$  on peut en déduire que

$$\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$$

*Cette piste ne devait pas être celle recherchée par le concepteur du sujet qui demande explicitement que ce DSE ne soit pas calculé.*

• **Deuxième type de réponse : basée sur les propriétés analytiques des fonctions définies par des sommes de séries entières**

Il y a plusieurs angles d'attaque dans le cadre du programme de PTSI/PT :

- La fonction  $f$  est la dérivée d'une fonction développable en série entière (la fonction Arcsin) mais l'existence d'un DSE(0) est non exigible, malgré la connaissance de celui de  $\sin$  en 0 (le théorème de développabilité de la bijection réciproque si la dérivée en 0 n'est pas nulle est hors programme).
- La mise en évidence d'une équation différentielle dont une solution serait développable en série entière interférerait avec la suite du problème.

• **Troisième type de réponse : basée sur la formule de Taylor avec reste intégral**

Il s'agirait de montrer qu'il existe un réel  $\rho > 0$  tel que pour tout  $x \in ]-\rho, \rho[$  fixé, on ait :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ce qui est garanti si toutes les dérivées de  $f$  sont uniformément majorées sur  $]-\rho, \rho[$  : cette approche est possible ici, mais semble hors d'atteinte pour des élèves de PT si on raffine si peu les étapes de cette démarche.

**Remarque personnelle :** au final, il nous semble que cette question aurait mérité d'être formulée autrement mais aussi clarifiée du point de vue des attentes.

- d. C'est un calcul direct qui ne présente pas de difficultés si  $x \in ]-1, 1[$ .
- e. Dans cette question, on propose la méthode classique de recherche de développement en série entière d'une fonction  $f$  sur la base d'une équation différentielle linéaire que vérifie  $f$  :

**Remarque personnelle :** on regrettera que ce type de problématique ait été déjà posé en banque PT à de multiples reprises 2006, 2008, 2010, 2012, 2013...

- i. On s'attend à ce que les candidats partent d'une écriture de  $f(x)$  sous forme de série entière à coefficients indéterminés, et par le théorème de dérivation terme à terme propre aux sommes de séries entières, obtiennent par changement d'indice et unicité des développements en série entière une relation de récurrence sur les coefficients indéterminés : ici avec la notation  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ , on obtient à partir de l'équation différentielle

$$(1-x^2)f'(x) = xf(x)$$

la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) \alpha_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{n-1} x^n$$

On obtient alors, par évocation de l'unicité de l'écriture sous forme de série entière une relation du type :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, (n = 0) \\ 2\alpha_2 = \alpha_0, (n = 1) \\ (n+1) \alpha_{n+1} = n\alpha_{n-1}, (n \geq 2) \end{cases}$$

**Remarque personnelle :** bien que facilement accessible vu les outils du programme, le développement de *Taylor* et le résultat d'unicité qui en découle ne font pas explicitement partie du programme de PTSI/PT

ii. Vu que  $\alpha_1 = 0$ , on montre par récurrence que l'on a :

$$\alpha_{2p+1} = 0, \forall p \in \mathbb{N}$$

ce qui découle aussi de la parité de la fonction  $f$ , et la relation :

$$\alpha_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} \alpha_{2p}, \forall p \in \mathbb{N}^*$$

permet, par récurrence, d'aboutir à

$$\alpha_{2p+2} = \left[ \prod_{k=1}^p \left( \frac{2k+1}{2k+2} \right) \right] \alpha_2, \forall p \in \mathbb{N}^*$$

Une présentation plus élégante et classique de ce coefficient est donnée par :

$$\alpha_{2p+2} = \frac{3.5.7 \dots (2p+1)}{4.6.8 \dots (2p+2)} \alpha_2 = \frac{3.5.7 \dots (2p+1)}{2.4.6.8 \dots (2p+2)} \alpha_0 = \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1} (p+1)!)^2} \alpha_0$$

on vérifiera donc que pour tout entier  $p \geq 0$

$$\alpha_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \alpha_0 = \frac{J_p}{\pi} \alpha_0$$

iii. Nous avons trouvé une solution développable en série entière à l'équation différentielle proposée : nous devrions vérifier que cette solution possède un rayon de convergence positif par application d'un critère de convergence basé sur une version du critère de *D'Alembert* pour les séries numériques (on trouve un rayon de convergence égal à 1 si  $\alpha_0 \neq 0$  sinon, on a trouvé la solution nulle!).

Cela fait, nous disons que notre équation différentielle est linéaire à coefficients continus sur  $] -1, 1[$  avec non annulation du coefficient multipliant  $f'$  sur  $] -1, 1[$  : le théorème de *Cauchy-Lipschitz* permet de conclure que si nous prenons la constante  $\alpha_0 = f(0) = 1$ , par unicité de la solution au problème de *Cauchy* déterminé par cette condition initiale et l'équation différentielle, on a :

$$\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$$

3. La relation  $I(c) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{2p} c^{2p} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt}_{\frac{J_p}{2}}$  donne rapidement :

$$\boxed{I(c)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{J_p}{2\pi} c^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi (2p)!}{(p! 2^p)^2} \right)^2 c^{2p} = \underbrace{\pi \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{(2p)!}{(p! 2^p)^2} c^p \right)^2 \right)}_S$$