Proposé par Mr : HAMANI Ahmed

Première partie

1a. • Γ est bien définie.

- La fonction $t \longmapsto e^{-t}t^{y-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- Au voisinage de 0, $e^{-t}t^{y-1} \sim t^{y-1}$ et $t \longmapsto t^{y-1}$ est intégrable au voisinage de 0 comme fonction de Riemann grâce à $y > 0$.

- Au voisinage de $+\infty$, $e^{-t}t^{y-1} = o\left(1/t^2\right)$.

Donc Γ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

• On pose $u(t) = e^{-t}$, $v(t) = t^y$, alors u, v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de plus le crochet $[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = \lim\limits_{+\infty} t^y e^{-t} - \lim\limits_{0^+} t^y e^{-t} = 0$, ce qui permet une intégration par parties.

$$y\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-t}t^{y-1}dt = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \int_0^{+\infty} t^y e^{-t}dt = \Gamma(y+1)$$

• En particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, une récurrence qui aboutit sans difficulté à $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1)$ et $\Gamma(1) = 1 = 0!$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

1b. • L'égalité précédente s'écrit $\forall y > 0$, $\Gamma(y) = y^{-1}\Gamma(y+1) = y^{-1}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^y dt$.

• Le changement de variable $s = y^{-1}t - 1$ dans l'expression précédente donne

$\Gamma(y) = y^{-1}\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} e^{-y(s+1)}(y(s+1))^y y ds = y^y e^{-y}\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)}ds$

2a. • La fonction $t \longmapsto e^{-t/x}t^{\alpha}$ est continue sur $[\delta,+\infty[$ et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$, donc elle est intégrable sur $[\delta,+\infty[$.

• Montrons le résultats par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$.

↷ $t \longmapsto e^{-t/x}t^{\alpha}$ est continue intégrable sur $[\delta,+\infty[$.

↷ $\forall t \geq \delta$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} e^{-t/x}t^{\alpha} = 0$.

↷ $\forall (x,t) \in]0,1] \times [\delta,+\infty[$, $|e^{-t/x}t^{\alpha}| \leq e^{-t}t^{\alpha} \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

La fonction dominante étant continue intégrable sur $[\delta,+\infty[$.

donc d'après le théorème de la convergence dominée généralisé, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+}\displaystyle\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t/x}t^{\alpha} = 0$, c'est à dire $\displaystyle\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t/x}t^{\alpha} = o(1)$ lorsque $x \longrightarrow 0^+$.

- Supposons le résultat est vrai à un ordre $n \geq 1$.

↷ Soit $A > \delta$. Une intégration par parties appliquée à l'intégrale $\displaystyle\int_{\delta}^{A} e^{-t/x}t^{\alpha}dt$ donne

$$\int_{\delta}^{A} e^{-t/x}t^{\alpha}dt = \int_{\delta}^{A} (-xe^{-t/x})'t^{\alpha}dt = \left[-xe^{-t/x}t^{\alpha}\right]_{\delta}^{A} + \alpha x\int_{\delta}^{A} e^{-t/x}t^{\alpha-1}dt$$

ce qui donne en tendant A vers $+\infty$

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t/x}t^{\alpha}dt = xe^{-\delta/x}\delta^{\alpha} + \alpha x\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t/x}t^{\alpha-1}dt$$

or $xe^{-\delta/x}\delta^{\alpha} = o(x^{n+1})$ et par hypothèse de récurrence $\displaystyle\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t/x}t^{\alpha-1}dt = o(x^n)$, donc $\displaystyle\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t/x}t^{\alpha}dt = o(x^{n+1})$ ce qui établie la récurrence.

Déduction

- Montrons $\int_\delta^{+\infty} f(t)e^{-t/x}dt = o(x^n)$.

↷ Soit $I=[\delta,1]$ ou $I=[1,\delta]$ selon les cas $\delta\geq 1$ ou $\delta\leq 1$ et posons $M=\sup_I|f|$, alors l'hypothèse (a) s'écrit $\exists K\geq 0, C>0, M>0$ tel que $\forall t\geq\delta,\ |f(t)|\leq Ct^K+M$, donc

$|\int_\delta^{+\infty} f(t)e^{-t/x}dt|\leq Mxe^{-\delta/x}+C\int_\delta^{+\infty} e^{-t/x}t^K dt$, ce qui assure grâce à 2a. que $\int_\delta^{+\infty} f(t)e^{-t/x}dt \underset{0^+}{=} o(x^n)$.

↷ Soit $k\in[[0,N]]$, d'après ce qui précède en prenant $\alpha=\dfrac{k+\lambda-\mu}{\mu}$, on aura $\int_\delta^{+\infty} e^{-t/x}t^\alpha dt \underset{0^+}{=} o(x^n)$, ce qui donne par combinaison linéaire

$\int_\delta^{+\infty} e^{-t/x}(\sum_{k=0}^N a_k t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}})dt = \sum_{k=0}^N a_k\int_\delta^{+\infty} e^{-t/x}t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}dt \underset{0^+}{=} o(x^n)$.

On conclut donc que $\int_\delta^{+\infty} e^{-t/x}\rho_N(t)dt = \int_\delta^{+\infty} f(t)e^{-t/x}dt - \int_\delta^{+\infty}(\sum_{k=0}^N a_k t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}})e^{-t/x}dt \underset{0^+}{=} o(x^n)$.

2b. D'après l'hypothèse (b), $\rho_N(t)\underset{0^+}{=} o\left(t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}}\right)$, ce qui assure l'existence de $\delta>0$ tel que

$\forall t\in]0,\delta[,\ |\rho_N(t)|\leq\varepsilon t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}}$, donc $\forall x>0$, $\left|\int_0^\delta e^{-t/x}\rho_N(t)dt\right|\leq\varepsilon\int_0^\delta e^{-t/x}t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}}dt$.

Le changement de variable $u=\dfrac{t}{x}$ aboutit à

$\int_0^\delta e^{-t/x}t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}}dt = x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\int_0^{\delta/x} e^{-u}u^{\frac{N+\lambda}{\mu}-1}du\leq x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{N+\lambda}{\mu}-1}du = x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\Gamma\left(\dfrac{N+\lambda}{\mu}\right)$, ce qui donne l'inégalité demandée avec $C'=\Gamma\left(\dfrac{N+\lambda}{\mu}\right)$.

2c. On vient de montrer que $\int_0^\delta e^{-t/x}\rho_N(t)dt \underset{0^+}{=} o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$.

En appliquant 2a, avec le δ précédent et $n=1+E(\frac{N+\lambda}{\mu})$, on aura $\int_\delta^{+\infty} e^{-t/x}\rho_N(t)dt \underset{0^+}{=} o(x^n) \underset{0^+}{=} o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$

On conclut par sommation que $\int_0^{+\infty} e^{-t/x}\rho_N(t)dt \underset{0^+}{=} o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$.

2d. ↷ La fonction $t\longmapsto f(t)e^{-t/x}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

- Au voisinage de $+\infty$, grâce à l'hypothèse (a), $f(t)=O(t^K)$, donc $f(t)e^{-t/x}=O(t^Ke^{-t/x})$ et par 2a, $t\longmapsto f(t)e^{-t/x}$ est intégrable sur $[\delta,+\infty[$ par comparaison.

- Au voisinage de 0, $f(t)=\sum_{k=0}^N a_k t^{(k+\lambda-\mu)/\mu}+o(t^{(N+\lambda-\mu)/\mu})$, or $\forall k\in[[0,N]]$, $t^{(k+\lambda-\mu)/\mu}e^{-t/x}\sim\dfrac{1}{t^{1-\frac{k+\mu}{\mu}}}$ et $1-\dfrac{k+\mu}{\mu}<1$, donc $t\longmapsto t^{(k+\lambda-\mu)/\mu}e^{-t/x}$ est intégrable sur $]0,\delta]$ et par suite $t\longmapsto f(t)e^{-t/x}$ l'est aussi.

On conclut donc que $t\longmapsto f(t)e^{-t/x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui assure la définition de F.

↷ Avec le changement de variable $u=\dfrac{t}{x}$ on obtient

$\forall k\in[[0,N]]$, $\int_0^{+\infty} e^{-t/x}t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}dt = x^{\frac{k+\lambda}{\mu}}\int_0^{+\infty} e^{-u}t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}du = x^{\frac{k+\lambda}{\mu}}\Gamma\left(\dfrac{k+\lambda}{\mu}\right)$.

De plus $\int_0^{+\infty} e^{-t/x}\rho_N(t)dt \underset{x\longrightarrow 0^+}{=} o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$, donc quand $x\longrightarrow 0^+$

$$F(x)=\sum_{k+0}^N a_k\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right)+o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$$

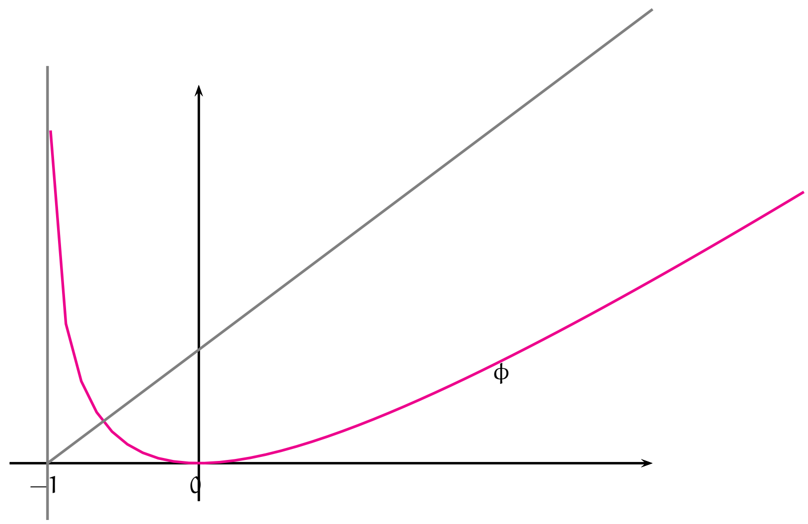
3a. $\forall s>-1, \phi(s)=s-\ln(1+s)$, donc $\forall s>-1, \phi'(s)=\dfrac{s}{1+s}$, d'où le tableau de variations

s	-1		0		$+\infty$
$\phi'(s)$		$-$	0	$+$	
$\phi(s)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

↬ La fonction ϕ étant continue strictement décroissante sur $]-1,0[$, donc sa restriction à $]-1,0[$

est bijective de $]-1,0[$ vers $]0,+\infty[$.

↪ De même elle est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc sa restriction à $]0,+\infty[$ est bijective de $]0,+\infty[$ à $]0,+\infty[$.



3b. ↪ La fonction $s \longmapsto \ln(1+s)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a $\forall s \in]-1,1[, \ln(1+s) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{s^k}{k}$, donc

$$\forall s \in]-1,1[,\quad \phi(s) = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{s^k}{k} = s^2\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{s^k}{k+2}$$

3c. • $\phi(s) = \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4} \underset{0^+}{=} o(s^4)$.

On pose $s = a_1q + a_2q^2 + a_3q^3 + a_4q^4$, alors $q \longrightarrow 0^+ \Longrightarrow s \longrightarrow 0^+$.

$$\begin{array}{llllll} s^2 = & a_1^2q^2 + & 2a_1a_2q^3 + & (2a_1a_3 + a_2^2)q^4 + & o(q^4) \\ s^3 = & & a_1^3q^3 + & 3a_1^2a_2q^4 + & o(q^4) \\ s^4 = & & & a_1^4q^4 + & o(q^4) \end{array}$$

donc $\phi(s) = \frac{a_1^2}{2}q^2 + (a_1a_2 - \frac{a_1^3}{3})q^3 + (a_1a_3 + \frac{a_2^2}{2} - a_1^2a_2 + \frac{a_1^4}{4})q^4 + o(q^4)$ et par suite $\phi(s) = q^2$ exige le système $\begin{cases} a_1^2 = 2 \\ a_2 = \frac{a_1^2}{3} \\ a_3 = a_1a_2 - \frac{a_2^2}{2}a_1 - \frac{a_1^3}{4} \end{cases}$

ce qui donne $b_1 = \sqrt{2}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9\sqrt{2}}$ et $c_1 = -\sqrt{2}$, $c_2 = \frac{2}{3}$, $c_3 = -\frac{1}{9\sqrt{2}}$.

• Par hypothèse lorsque $q \longrightarrow 0^+$, $\phi_+^{-1}(q^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_kq^k$ et $\phi_-^{-1}(q^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_kq^k$, donc $\phi_+^{-1}(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\sqrt{q}^k$ et $\phi_-^{-1}(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\sqrt{q}^k$, et par suite

$$\phi_+^{-1}(q) = \sqrt{2q} + \frac{2q}{3} + \frac{q^{3/2}}{9\sqrt{2}} + o(q^{3/2}) \text{ et } \phi_-^{-1}(q) = -\sqrt{2q} + \frac{2q}{3} - \frac{q^{3/2}}{9\sqrt{2}} + o(q^{3/2})$$

• En dérivant l'égalité $\phi_+^{-1}(q^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_kq^k$, on obtient $2q(\phi_+^{-1})'(q^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} kb_kq^{k-1}$, donc $(\phi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{2\sqrt{q}}(b_1 + 2b_2\sqrt{q} + 3b_3q + o(q)) = \frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}} + o(\sqrt{q})$.

En remplacant b_1, b_2, b_3 par c_1, c_2, c_3 on obtient l'égalité $(\phi_-^{-1})'(q) = \dfrac{1}{\sqrt{2q}} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}} + o(\sqrt{q})$.

3d. D'après la question 1b. et grâce à la relation de Chasles

$\forall y > 0,\ \Gamma(y) = e^{-y} y^y \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)} ds = e^{-y} y^y \int_{-1}^{0} e^{-y\phi(s)} ds + e^{-y} y^y \int_{0}^{+\infty} e^{-y\phi(s)} ds$.

↬ On fait le changement de variable $\phi(s) = q$ dans les deux intégrales où $\phi = \phi_-$ pour la première et $\phi = \phi_+$ pour la deuxième. On obtient donc

$\displaystyle\int_{-1}^{0} e^{-y\phi(s)} ds = \int_{+\infty}^{0} e^{-yq} (\phi_-^{-1})'(q) dq$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-y\phi(s)} ds = \int_{0}^{+\infty} e^{-yq} (\phi+^{-1})'(q) dq$, d'où

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_0^{+\infty} e^{-yq} \left((\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q) \right) dq$$

3e. On pose $f(q) = (\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{q}} + \dfrac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{q} + o(\sqrt{q})$, alors lorsque q tend vers 0,

$f(q) = a_0 q^{(\lambda-\mu)/\mu} + a_1 q^{(1+\lambda-\mu)/\mu} + o(q^{(1+\lambda-\mu)/\mu})$, avec $a_0 = \sqrt{2}$, $a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ et $\lambda = 1/2$, $\mu = 1$.

D'après 2d. et puisque $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on aura lorsque y tend vers $+\infty$

$F(1/y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-qy} f(q) dq = a_0 \Gamma(1/2) y^{-1/2} + a_1 \Gamma(3/2) y^{-3/2} + o(y^{-3/2}) = \left(\dfrac{2\pi}{y}\right)^{1/2} (1 + \dfrac{1}{12y} + o(1/y))$, donc

$$\text{lorsque } y \longrightarrow +\infty\ \ \Gamma(y) = e^{-y} y^y F(1/y) = e^{-y} y^y \left(\frac{2\pi}{y}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12y} + o(1/y)\right)$$

Deuxième partie

4. • La fonction $t \longmapsto e^{-t/x} t^{-1}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $e^{-t/x} t^{-1} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc F est bien définie.

• Le changement de variable $u = \dfrac{x}{t}$, conduit à $F(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{e^{-1/u}}{u^2} du$.

La fonction $u \longmapsto \dfrac{e^{-1/u}}{u^2}$ étant de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, donc la fonction F est de classe C^∞ comme sa primitive.

5. Soit $A > 1$. Après N intégrations par parties, on onbtient $\displaystyle\int_1^A \dfrac{e^{-t/x}}{t} dt = \int_1^A \left((-x)^N e^{-t/x}\right)^{(N)} \dfrac{1}{t} dt =$

$\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{N} (-1)^k \left((-x)^N e^{-t/x}\right)^{(N-k)} \left(\dfrac{1}{t}\right)^{(k-1)} \right]_1^A + (-1)^N \int_1^A (-x)^N e^{-t/x} \left(\dfrac{1}{t}\right)^{(N)} dt$.

or $(-1)^k \left((-x)^N e^{-t/x}\right)^{(N-k)} \left(\dfrac{1}{t}\right)^{(k-1)} = (-1)^{k-1} (k-1)! x^k \dfrac{e^{-t/x}}{t^k}$, donc en tendant A vers $+\infty$, on obtient

$$\forall x > 0,\ \ F(x) = S_N(s) + R_N(x)$$

6a. ↬ Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 0$, obtenu par le critère de D'alembert, donc le domaine de convergence est le singleton $\{0\}$.

↬ Si $(R_N(x))_N$ est bornée, alors grâce à l'égalité $S_N(x) = F(x) - R_N(x)$, $(S_N(x))_N$ est aussi bornée, donc de même pour $(S_{2N+1}(x) - S_{2N}(x))_N$, mais $\forall x > 0$, $S_{2N+1}(x) - S_{2N}(x) = (2N)! x^{2N+1} e^{-1/x}$ qui n'est pas borné , puisque $(2N)! x^{2N+1}$ est le terme général de la série entière $\sum (-1)^{k-1} (k-1)! x^k$ qui est divergente pour tout $x > 0$.

6b. ↬$\forall \geq 1$, $e^{-t/x} \dfrac{1}{t^{N+1}} \leq e^{-t/x}$, donc

$\forall x > 0$, $|R_N(x)| = N! x^N \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t/x} \dfrac{1}{t^{N+1}} dt \leq N! x^N \int_1^{+\infty} e^{-t/x} = N! x^{N+1} e^{-1/x} = |r_N(x)|$.

↬ $|R_{N+1}(x)| \leq |r_N(x)| = (N+1) x |r_N(x)|$, donc $0 \leq \dfrac{|R_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|} \leq (N+1) x \underset{x \longrightarrow 0+}{\longrightarrow} 0$, donc $|R_{N+1}(x)| \underset{0+}{=} o(|r_N(x)|)$.

6c. Par une intégration par parties, on obtient

$R_{N+1}(x) = (-1)^{N+1} N! x^{N+1} \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t/x} \left(\dfrac{-1}{t^{N+1}}\right)' dt = (-1)^{N+1} N! x^{N+1} e^{-1/x} + (-1)^N N! x^N \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t/x}}{t^{N+1}} dt = -r_N(x) +$

$R_N(x)$, donc

$$R_N(x) - r_N(x) = R_{N+1}(x) \underset{0^+}{=} o(r_N(x)) \quad \text{c'est à dire} \quad R_N(x) \underset{0^+}{\sim} r_N(x)$$

6d. Soit $x \in]0, 1/2[$, $0 < \dfrac{|r_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|} = (N+1)x \leq 1 \Longleftrightarrow N \leq \dfrac{1}{x} - 1 \Longleftrightarrow N \leq E\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.

Posons $N_0 = E\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) \geq 1$, puisque $0 < x < \dfrac{1}{2}$, alors

La suite $(|r_N(x)|)_{N \geq 1}$ est décroissante jusqu'à le rang N_0, puis croissante.

7a. ↬ $S_N(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2M} (-1)^{k-1}(k-1)!x^k e^{-1/x} = \sum_{k=1}^{2M} (-1)^{k-1}|r_{k-1}(x)| = |r_{2M}(x)| + \sum_{k=1}^{M-1} (|r_{2k}(x)| - |r_{2k+1}(x)|) > 0$.

↬ N étant paire, donc $R_N(x) > 0$ et par suite $F(x) = S_N(x) + R_N(x) > S_N(x)$.

↬ $|R_N(x)| \leq |r_N(x)| = N!x^{N+1}e^{-1/x}$, donc $E_N(x) = \left|\dfrac{R_N(x)}{F(x)}\right| \leq \dfrac{N!x^{N+1}e^{-1/x}}{S_N(x)} = \dfrac{N!x^{N+1}}{S_N(x)e^{1/x}}$, or $S_N(x)e^{1/x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2M} (-1)^{k-1}(k-1)!x^k = \sum_{k=0}^{2M-1} (-1)^k k! x^{k+1} = \sum_{l=0}^{M-1} (2l)!x^{2l+1} - \sum_{l=0}^{M-1} (2l+1)!x^{2l+2} = \sum_{l=0}^{M-1} (1-(2l+1)x)(2l)!x^{2l+1}$.

Ce qui donne l'inégalité $E_N(x) \leq \dfrac{N!x^{N+1}}{\displaystyle\sum_{l=0}^{M-1} (1-(2l+1)x)(2l)!x^{2l+1}}$.

7b. On applique l'inégalité précédente avec $M = 2$, $x = \dfrac{1}{10}$. On obtient

$$E_4\left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{4!(1/10)^5}{\frac{9}{10^2} + (1 - \frac{3}{10})^2 \frac{1}{10^3}} = \frac{24}{9,049} 10^{-3} \leq \frac{27}{9} 10^{-3} = 3.10^{-3}$$

Troisième partie

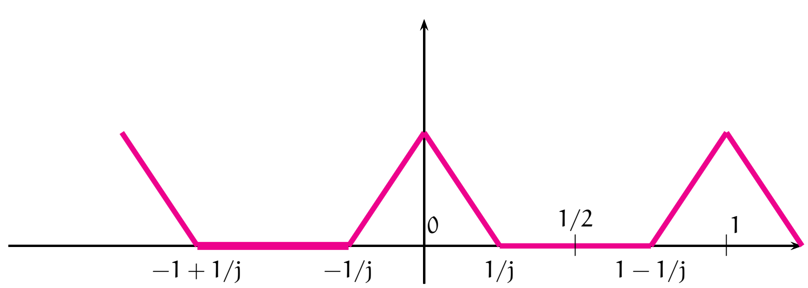
8. Soit $h : (\theta_1, \theta_2) \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(\theta_1)g_i(\theta_2)$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$, alors il existe des polynômes trigonométriques $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ tels que $\forall i \in [[1, n]]$, $\|f_i - P_i\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2nM}$ et $\|g_i - Q_i\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2nM}$ où $M = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (\|f_i\|_\infty, \|g_i\|_\infty)$. Considérons le polynôme trigonométrique $R : (\theta_1, \theta_2) \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i(\theta_1)Q_i(\theta_2)$, alors

$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\left|h(\theta_1, \theta_2) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i(\theta_1)Q_i(\theta_2)\right| \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f_i(\theta_1)g_i(\theta_2) - P_i(\theta_1)Q_i(\theta_2)| \leq$

$\leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f_i(\theta_1) - P_i(\theta_1)||g_i(\theta_2)| + \sum_{i=1}^{n} |P_i(\theta_1)||g_i(\theta_2) - Q_i(\theta_2)| \leq$

$\leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\|f_i - P_i\|_\infty \|g_i\|_\infty + \|P_i\|_\infty \|g_i - Q_i\|_\infty) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et par passage au sup sur $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on obtient $\|h - R\|_\infty \leq \varepsilon$.

9. Le graphe de ψ_j est le suivant :



↪ Grâce au graphe, ψ_j étant continue sur $\mathbb{R}$ périodique, donc $\psi_{j,k}$ est continue par composition, de plus $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi_{j,k}(t+1) = \psi_j(t+1-k/j) = \psi_j(t-j/k) = \psi_{j,k}(t)$. En définitive $\psi_{j,k} \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R})$.

10a. ↪ $\forall k_1, k_2 \in [[0, j-1]]$, les fonctions $(\theta_1, \theta_2) \longmapsto \psi_{j,k_1}(\theta_1)\psi_{j,k_2}(\theta_2)$ sont des éléments de $\mathcal{C}_{sep}(\mathbb{R}^2)$ qui est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel, donc par combinaison linéaire, $S_j(f) \in \mathcal{C}_{sep}(\mathbb{R}^2)$.

↪ Soit $(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2$, $j \geq 2$ et $k_1, k_2 \in [[0, j-1]]$. On a $\psi_{j,k_1}\left(\frac{l_1}{j}\right) = \psi_j\left(\frac{l_1 - k_1}{j}\right)$.

ψ_j étant $1-$ périodique, donc quitte à faire une division euclidiènne de l_1 par j, on peut supposer que $l_1 \in [[0, j-1]]$, donc $0 \leq |l_1 - k_1| < j$ et par suite $0 \leq \frac{|l_1 - k_1|}{j} < 1$, de plus ψ_j est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$, donc on peut supposer que $0 \leq \frac{|l_1 - k_1|}{j} < \frac{1}{2}$.

- Si $l_1 \neq k_1$, alors $|l_1 - k_1| \geq 1$, donc $\frac{|l_1 - k_1|}{j} \geq \frac{1}{j}$ et par suite $\psi_j\left(\frac{l_1 - k_1}{j}\right) = 0$.

- Si $l_1 = k_1$, alors $\psi_j\left(\frac{l_1 - k_1}{j}\right) = \psi_j(0) = 1$.

En définitive $\psi_{j,k_1}\left(\frac{l_1}{j}\right) = \delta_{l_1,k_1}$ de même $\psi_{j,k_2}\left(\frac{l_2}{j}\right) = \delta_{l_2,k_2}$. On obtient donc

$S_j(f)\left(\frac{l_1}{j}, \frac{l_2}{j}\right) = f\left(\frac{l_1}{j}, \frac{l_2}{j}\right)$.

10b. • Soit $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1+1}{j}\right[\times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right[$.

$S_j(f)(\theta) = \sum_{l_1=0}^{j-1}\sum_{l_2=0}^{j-1} f\left(\frac{l_1}{j}, \frac{l_2}{j}\right)\psi_{j,l_1}(\theta_1)\psi_{j,l_2}(\theta_2)$.

↪ On suppose que $k_1 \leq j-2$.

- Si $l_1 = k_1$, $\theta_1 - \frac{k_1}{j} \in \left[0, \frac{1}{j}\right[$, donc $\psi_j(\theta_1 - \frac{k_1}{j}) = 1 - j\theta_1 + k_1 = \alpha_1$.

- Si $l_1 = k_1 + 1$, $\theta_1 - \frac{k_1+1}{j} \in \left[\frac{-1}{j}, 0\right[$, donc $\psi_j(\theta_1 - \frac{k_1+1}{j}) = 1 + j\theta - k_1 - 1 = j\theta_1 - k_1 = \alpha_2$.

- Si $0 \leq l_1 \leq k_1 - 1$, $\theta_1 - \frac{l_1}{j} \in \left[\frac{k_1 - l_1}{j}, \frac{k_1 - l_1 + 1}{j}\right[\subset \left[\frac{1}{j}, \frac{j-1}{j}\right[$, donc $\psi_j(\theta_1 - \frac{l_1}{j}) = 0$

- Si $k_1 + 2 \leq l_1 \leq j-1$, $\theta_1 - \frac{l_1}{j} \in \left[\frac{k_1 - l_1}{j}, \frac{k_1 - l_1 + 1}{j}\right[\subset \left[-1 + \frac{1}{j}, \frac{-1}{j}\right[$, donc $\psi_j(\theta_1 - \frac{l_1}{j}) = 0$

↪ On suppose que $k_1 = j-1$.

- Si $l_1 = k_1 = j-1$, $\theta_1 - \frac{k_1}{j} \in \left[0, \frac{1}{j}\right[$, donc $\psi_j(\theta_1 - \frac{k_1}{j}) = -j\theta_1 + j = \alpha_1$.

- Si $l_1 = 0$, $\theta_1 - \frac{0}{j} \in \left[1 - \frac{1}{j}, 1\right[$, donc par périodicité et vu que $(\theta_1 - 1) \in \left[\frac{-1}{j}, 0\right[$, on aura $\psi_j(\theta_1 - \frac{0}{j}) = \psi_j(\theta_1 - 1) = 1 + j\theta_1 - j = \alpha_2$.

- Si $1 \leq l_1 \leq j-2$, $\theta_1 - \frac{l_1}{j} \in \left[\frac{k_1 - l_1}{j}, \frac{k_1 - l_1 + 1}{j}\right[\subset \left[\frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j}\right[$, donc $\psi_j(\theta_1 - \frac{l_1}{j}) = 0$.

En définitive Si $l_1 \in \{k_1, k_1+1\}$, $\psi_{j,k_1}(\theta_1) = \alpha_1$ et $\psi_{j,k_1+1}(\theta_1) = \alpha_2$, avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Si $l_1 \neq \{k_1, k_1+1\}$, $\psi_{j,l_1}(\theta_1) = 0$.

Or k_1 et k_2 jouent un rôle symétrique, donc on obtient les mêmes résultats pour θ_2, on note $\psi_{j,k_2}(\theta_2) = \beta_1$ et $\psi_{j,k_2+1}(\theta_2) = \beta_2$.

On conclut donc

$$S_j(\theta) = \alpha_1\beta_1 f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) + \alpha_1\beta_2 f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right) + \alpha_2\beta_1 f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) + \alpha_2\beta_2 f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right)$$

avec $\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) = 1$.

• Soit $\varepsilon > 0$. On écrit $[0,1[^2 = \bigcup_{0 \leq k_1, k_2 \leq j-1}\left(\left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1+1}{j}\right[\times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right[\right)$.

$\forall \theta \in \left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1+1}{j}\right[\times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right[$, $|S_j(f)(\theta) - f(\theta)| \leq \alpha_1\beta_1\left|f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) - f(\theta)\right| + \alpha_1\beta_2\left|f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right) - f(\theta)\right| +$
$+\alpha_2\beta_1\left|f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) - f(\theta)\right| + \alpha_2\beta_2\left|f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right) - f(\theta)\right|$

or f est uniformément continue sur le compact $[0,1]^2$, donc il existe $\alpha>0$ tel que $\forall \theta,\phi\in[0,1]^2$, on a $\|\theta-\phi\|\leq\alpha\Longrightarrow|f(\theta)-f(\phi)|\leq\varepsilon$.
$\|(\theta_1,\theta_2)-\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2}{j}\right)\|^2=(\theta_1-\frac{k_1}{j})^2+(\theta_2-\frac{k_2}{j})^2\leq\frac{2}{j^2}\underset{j\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$, donc $\exists j_0$ tel que
$\forall j\geq j_0$, $\left\|(\theta_1,\theta_2)-\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2}{j}\right)\right\|\leq\alpha$, donc $|S_j(f)(\theta)-f(\theta)|\leq(\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_2)\varepsilon=\varepsilon$, ce qui donne par passage au sup $\|S_j(f)-f\|_\infty\leq\varepsilon$.

11. D'après la question 8., l'ensemble des polynômes trigonométriques en deux variables est dense dans $\mathcal{C}_{sep}(\mathbb{R}^2)$ et on vient de montrer dans la question 10 que $\mathcal{C}_{sep}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $\mathcal{C}_{per}(\mathbb{R}^2)$, on conclut donc par transitivité de la densité.

Quatrième partie

12. ↬ $\forall t\in\mathbb{R},\quad \alpha'(t)=\omega\Longleftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\quad\alpha(t)=t\omega+\alpha(0)\Longleftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\quad\alpha(t)=t\omega.$
↬ $\forall t\in\mathbb{R},\quad F'(t)=f(\alpha(t))\Longleftrightarrow$
$\forall t\in\mathbb{R},\quad F'(t)=f(t\omega)\Longleftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\quad F(t)=F(0)+\int_0^t f(s\omega)ds\Longleftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\quad F(t)=\int_0^t f(s\omega)ds.$

13. ω est résonnant, donc $k_1\omega_1+k_2\omega_2=0$ où $k_1,k_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
Soit $f:(\theta_1,\theta_2)\longmapsto e^{i2\pi(k_1\theta_1+k_2\theta_2)}$, alors f est continue $1-$ périodique et $f(t\omega)=f(t\omega_1,t\omega_2)=e^{i2\pi t(k_1\omega_1+k_2\omega_2)}=e^0=1$, donc $F(t)=\int_0^t 1dt=t$.

14a. Un polynôme trigonométrique est combinaison linéaire de fonctions de la forme $f_k:(\theta_1,\theta_2)\longmapsto e^{i2\pi(k_1\theta_1+k_2\theta_2)}$ où $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$, donc il suffit de montrer que F est bornée pour les f_k.
↬ $\forall t\in\mathbb{R}, F(t)=\int_0^t f_k(s\omega)ds=\int_0^t e^{i2\pi t(k_1\omega_1+k_2\omega_2)}ds$, ω n'est pas résonnant, donc $k_1\omega_1+k_2\omega_2\neq0$, donc $F(t)=\frac{1}{i2\pi(k_1\omega_1+k_2\omega_2)}(e^{i2\pi t(k_1\omega_1+k_2\omega_2)}-1)$ et par passage au module et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient
$$\forall t\in\mathbb{R},\quad|F(t)|\leq\frac{1}{\pi|k_1\omega_1+k_2\omega_2|}$$

14b. Soit $f\in\mathcal{C}_{per}(\mathbb{R}^2)$ et soit $\varepsilon>0$, alors par densité de la question 11., il existe Q un polynôme trigonométrique tel que $\|f-Q\|_\infty\leq\varepsilon$.
$\forall t\in\mathbb{R},\quad F(t)=\int_0^t f(s\omega)ds=\int_0^t(f(s\omega)-Q(s\omega))ds+\int_0^t Q(s\omega)ds$, donc
$\forall t\in\mathbb{R},\ |F(t)|\leq\int_0^t\|f-Q\|_\infty ds+M\leq\varepsilon t+M$ où M un majorant de $\left|\int_0^t Q(s\omega)ds\right|$ justifié par la question précédente.
On a $M\underset{+\infty}{=}o(t)$, donc il existe $A>0$ tel que $\forall t>A,\ \ M\leq\varepsilon t$ et par suite $\forall t>A,\ \ |F(t)|\leq2\varepsilon t$, c'est à dire $F(t)\underset{+\infty}{=}o(t)$.

15a. • h étant de classe C^1, donc ses dérivées partielles sont continues et on a $\forall\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2,\ \ dh(\theta).\omega=\omega_1\frac{\partial h}{\partial\theta_1}+\omega_2\frac{\partial h}{\partial\theta_2}$, or grâce à la périodicité de h par rapport à ses deux variables
$\int_0^1\frac{\partial h}{\partial\theta_1}d\theta_1=h(1,\theta_2)-h(0,\theta_2)=0$ et en inversant les rôles de θ_1 et θ_2, on a aussi $\int_0^1\frac{\partial h}{\partial\theta_2}d\theta_2=0$ donc en permutant les deux intégrales qui est permi par l'énoncé, on obtient
$\int_0^1\int_0^1 dh(\theta).\omega\quad d\theta_1d\theta_2=0.$
En intégrant l'égalité $dh(\theta).\omega+g(\theta)=\nu$, on aura $\nu=\int_0^1\int_0^1 g(\theta)d\theta_1d\theta_2$.
• L'équation (4) est équivalente au système $\omega_1\frac{\partial h_i}{\partial\theta_1}+\omega_2\frac{\partial h_i}{\partial\theta_2}+g_i(\theta)=\nu_i$, $(i=1,2)$ où $(h_1,h_2),(g_1,g_2)$ et (ν_1,ν_2) sont les composantes respectives de h,g et ν.
Quitte à travailler sur les composantes on peut supposer que h, g sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\nu\in\mathbb{R}$.
On suppose donc que $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ et $\nu\in\mathbb{R}$.

↬ · Si $g = \text{cte}$, alors $\nu = \text{cte}$ et $h = 0$ est une solution qui est continue $1-$ périodique et de moyenne nulle.

↬ · Si g n'est pas constante. Quitte à utiliser le théorème de superposition, il suffit de résoudre l'équation pour $g(\theta_1, \theta_2) = \alpha\cos(2\pi(k_1\theta_1 + k_2\theta_2)) + \beta\sin(2\pi(k_1\theta_1 + k_2\theta_2))$ où $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On va chercher une solution de la forme $h(\theta) = A\cos(2\pi(k_1\theta_1 + k_2\theta_2)) + B\sin(2\pi(k_1\theta_1 + k_2\theta_2))$.

h est solution de $\omega_1 \dfrac{\partial h}{\partial \theta_1} + \omega_2 \dfrac{\partial h}{\partial \theta_2} + g(\theta) = \nu$ si , et seulement si $\begin{cases} -2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)\alpha = B \\ 2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)\beta = A \end{cases}$.

ceci invite à supposer que ω n'est pas résonnant. Avec cette supposition on obtient

h est solution, et seulement si, $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{B}{2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)} \\ \beta = \dfrac{A}{2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)} \end{cases}$, ce qui prouve l'existence de h.

Conclusion : Si on pose $g_1(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k \in K} a_k\cos(2\pi(k_1\theta_1 + k_2\theta_2) + b_k\sin(2\pi(k_1\theta_1 + k_2\theta_2)))$ et $g_2(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k \in K} c_k\cos(2\pi(k_1\theta_1 + k_2\theta_2) + d_k\sin(2\pi(k_1\theta_1 + k_2\theta_2)))$ où K est une partie finie de $\mathbb{Z}^2$, alors la solution h est donnée par :

$$h_1(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k \in K \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)} \left(-b_k\cos(2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)) + a_k\sin(2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2))\right)$$

$$h_2(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k \in K \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)} \left(-d_k\cos(2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)) + c_k\sin(2\pi(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2))\right)$$

15b. En dérivant l'égalité $\widetilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + xh(\alpha(t))$ par rapport à t grâce à la classe C^1 des fonctions qui interviennent dans cette égalité, on aura

$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{\alpha}'(t) = \alpha'(t) + xdh(\alpha(t)).\alpha'(t)$, or d'après l'équation (3) , $\alpha'(t) = \omega + xg(\alpha(t))$, donc

$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{\alpha}'(t) = \omega + xg(\alpha(t)) + xdh(\alpha(t)).(\omega + xg(\alpha(t)))$, et puisque d'après l'équation (4)

$g(\alpha(t)) + dh(\alpha(t)).\omega = \nu$, on obtient $\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{\alpha}'(t) = (\omega + x\nu) + x^2 dh(\alpha(t)).(g(\alpha(t)))$ et par suite

$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{\alpha}'(t) = (\omega + x\nu) + x\varepsilon(x,t)$ avec $\varepsilon(x,t) = xdh(\alpha(t)).g(\alpha(t))$.

↬ Montrons que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varepsilon(x,t)\| \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

h étant de classe C^1 périodique, donc $dh : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est continue périodique, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}^2$, ce qui assure l'existence de $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\quad |||dh(\alpha(t))||| \leq M$.

de plus $\forall t \in \mathbb{R},\quad \|g(\alpha(t))\| = \|\nu - dh(\alpha(t)).\omega\| \leq \|\nu\| + |||dh(\alpha(t))||| \|\omega\| \leq \|\nu\| + M\|\omega\|$.

et par suite $\forall t \in \mathbb{R},\quad \|\varepsilon(x,t)\| \leq |x| M(\|\nu\| + M\|\omega\|)$, ce qui entraine que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varepsilon(x,t)\| \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

15c. En intégrant l'égalité précédente entre 0 et t, on obtient $\widetilde{\alpha}(t) - \widetilde{\alpha}(0) = t(\omega + x\nu) + x\int_0^t \varepsilon(x,s)ds$ et vu que $\alpha(t) = \widetilde{\alpha}(t) - xh(\alpha(t))$, et $\widetilde{\alpha}(0) = xh(0,0)$

$\alpha(t) = t(\omega + x\nu) + x\int_0^t \varepsilon(x,s)ds - x(h(\alpha(t)) - h(0,0))$, donc

$\forall t \in [0,T],\quad \alpha(t) = t(\omega + x\nu) + x(h(0,0) - h(t\omega)) + x\eta(x,t)$ où $\eta(x,t) = \int_0^t \varepsilon(x,s)ds + h(t\omega) - h(\alpha(t))$.

D'après l'équation (3) intégrée entre 0 et t, $\alpha(t) = t\omega + x\int_0^t g(\alpha(s))ds$ et par suite grâce à l'inégalité des accroissements finis appliquée à h qui est de classe C^1 et à la continuité de $go\alpha$ sur le compact $[0,T]$

$\forall t \in [0,T],\ \|h(t\omega) - h(\alpha(t))\| \leq M\|t\omega - \alpha(t)\| = M\|x\int_0^t g(\alpha(s))ds\| \leq M|x|T \sup_{s \in [0,T]} \|g(\alpha(s))\|$, donc

$\forall t \in [0,T],\quad \|\eta(x,t)\| \leq T\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varepsilon(x,t)\| + M|x|T \sup_{s \in [0,T]} \|g(\alpha(s))\|$ et le passage au sup donne

$\sup_{t \in [0,T]} \|\eta(x,t)\| \leq T\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varepsilon(x,t)\| + M|x|T \sup_{s \in [0,T]} \|g(\alpha(s))\| \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.