

Corrigé du problème X PC 2007

Problème isopérimétrique

1°) Les coefficients de Fourier de f'' s'obtiennent par intégration par parties :

$$c_n(f'') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f''(t) dt = [e^{-int} f'(t)]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f'(t) dt.$$

Par périodicité des fonctions, le crochet est nul, et on a en recommençant :

$$c_n(f'') = \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f'(t) dt = [in e^{-int} f(t)]_0^{2\pi} + (in)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) dt.$$

On a ainsi obtenu $c_n(f'') = (in)^2 c_n(f) = -n^2 c_n(f)$.

La fonction f étant de classe C^2 , on sait que sa série de Fourier converge normalement, mais aussi en moyenne quadratique, vers f .

2°) Le noyau de P est constitué des fonctions de E telles que $f + f'' = 0$.

Il s'agit des fonctions $x \rightarrow A \cos(x) + B \sin(x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$, qui appartiennent bien à E .

3°)a) L'orthogonal de E est constitué des fonctions $f \in F$ telles que $\forall g \in E, \langle f, g \rangle = 0$.

En particulier, f est donc orthogonale aux fonctions $x \rightarrow e^{inx}$, ce qui implique la nullité des coefficients de Fourier de f , donc la nullité de f d'après l'égalité de Parseval. Ainsi, l'orthogonal de E dans F se réduit à la fonction nulle.

3°)b) Montrons maintenant que P est auto-adjoint :

$$\langle f'', g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f''(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} [f'(t) g(t)]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) g'(t) dt.$$

Par périodicité des fonctions, le crochet est nul, et on a en recommençant :

$$\langle f'', g \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) g'(t) dt = \frac{-1}{2\pi} [f(t) g'(t)]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g''(t) dt.$$

De nouveau le crochet est nul et on en déduit que $\langle f'', g \rangle = \langle f, g'' \rangle$, et donc que :

$$\langle P(f), g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f'', g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, g'' \rangle = \langle f, P(g) \rangle.$$

3°)c) Les éléments de $E \cap (\text{Im}(P))^+$ sont les fonctions $f \in E$ telles que :

$$\forall g \in E, \langle f, P(g) \rangle = \langle P(f), g \rangle = 0.$$

Ce sont les fonctions f telles que $P(f)$ est orthogonale à E , donc telles que $P(f) = 0$ d'après (a), et ce sont donc les fonctions de $\text{Ker}(P)$, d'où l'égalité $E \cap (\text{Im}(P))^+ = \text{Ker}(P)$.

4°) Deux fonctions continues 2π -périodiques f, g sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients de Fourier, comme cela résulte de l'égalité de Parseval ci-dessous :

$$\|f - g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - g|(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f - g)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f) - c_n(g)|^2.$$

Traduisons l'égalité $f(x + \pi) + f(x) = f(0) + f(\pi)$ par celle des coefficients de Fourier :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} (f(t + \pi) + f(t)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} (f(\pi) + f(0)) dt.$$

On note d'abord, puisque les fonctions intégrées sont 2π -périodiques, qu'on a pour $n \neq 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t + \pi) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in(u-\pi)} f(u) du = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inu} f(u) du.$$

Le premier membre est égal à $(1 + (-1)^n) c_n(f) = 0$, soit $2 c_{2p}(f)$ si $n = 2p$ est pair.

Le second membre est nul sauf pour $n = 0$, où il vaut $f(\pi) + f(0)$.

L'égalité proposée équivaut par conséquent à $c_0(f) = \frac{f(\pi) + f(0)}{2}$ et $c_{2p}(f) = 0$ si $p \neq 0$.

5°)a) Si $f = 1$, on a $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{u}_t$, de sorte que le support Γ_f de l'arc est le cercle-unité.

5°)b) La tangente à l'arc en $M(t)$ est dirigée par :

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) = (f(t) + f''(t)) \overrightarrow{v}_t = (f(t) + f''(t)) (-\sin(t) \overrightarrow{e}_1 + \cos(t) \overrightarrow{e}_2).$$

Comme $f(t) + f''(t) > 0$, la tangente est dirigée par \overrightarrow{v}_t et son équation cartésienne est :

$$\begin{vmatrix} x - f(t) \cos(t) + f'(t) \sin(t) & -\sin(t) \\ y - f(t) \sin(t) - f'(t) \cos(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = x \cos(t) + y \sin(t) - f(t) = 0.$$

5°)c) Comme $f(t) > 0$, la distance de cette tangente à l'origine est $f(t)$.

On rappelle en effet que la distance de $M_0(x_0, y_0)$ à la droite $\mathcal{D} : ux + vy + h = 0$ est :

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ux_0 + vy_0 + h|}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

6°) Si $f(t) = \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}$, on a :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} \overrightarrow{u}_t + \frac{(b^2 - a^2) \cos(t) \sin(t)}{\sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}} \overrightarrow{v}_t.$$

Par conséquent, on a dans le repère $(O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$:

$$X(t) = a \frac{a \cos(t)}{\sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}}, \quad Y(t) = b \frac{b \sin(t)}{\sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}}.$$

On en déduit que $X = a \cos(\theta)$ et $Y = b \sin(\theta)$, où $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les deux réels (dont la somme des carrés est bien égale à 1) définis par :

$$\cos(\theta) = \frac{a \cos(t)}{\sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}}, \quad \sin(\theta) = \frac{b \sin(t)}{\sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}}.$$

Lorsque t décrit $[0, \pi/2]$, on voit que θ décrit aussi $[0, \pi/2]$.

Par symétrie, θ décrit aussi $[0, 2\pi]$ lorsque t décrit $[0, 2\pi]$ et Γ_f est l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7°)a) Comme $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\overrightarrow{u}_t + f'(t)\overrightarrow{v}_t$, et comme on sait aussi que $f(t) > 0$, il existe dans la base $(\overrightarrow{u}_t, \overrightarrow{v}_t)$ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}_t, \overrightarrow{OM}(t))$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Cette mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}_t, \overrightarrow{OM}(t))$, qui est donc caractérisée par sa tangente, est égale à :

$$(\overrightarrow{u}_t, \overrightarrow{OM}(t)) = \text{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right).$$

Ainsi, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{OM}(t)) = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{u}_t) + (\overrightarrow{u}_t, \overrightarrow{OM}(t))$ est $t + \text{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)$ et :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)} \left(\cos\left(t + \text{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)\right) \overrightarrow{e}_1 + \sin\left(t + \text{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)\right) \overrightarrow{e}_2 \right).$$

7°)b) La fonction $t \rightarrow \theta(t) = t + \text{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)$ est strictement croissante car :

$$\frac{d}{dt} \left(t + \text{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) \right) = 1 + \frac{f''(t)f(t) - f'^2(t)}{f^2(t) + f'^2(t)} = \frac{f(t)(f(t) + f''(t))}{f^2(t) + f'^2(t)} > 0.$$

La fonction $t \rightarrow \theta(t) = t + \text{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)$ est continue et strictement croissante de $[0, 2\pi]$ sur $\left[\text{Arctan}\left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right), 2\pi + \text{Arctan}\left(\frac{f'(2\pi)}{f(2\pi)}\right) = 2\pi + \text{Arctan}\left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right)\right]$ par 2π -périodicité de f , et elle réalise une bijection de $[0, 2\pi]$ sur $\theta([0, 2\pi]) = \left[\text{Arctan}\left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right), 2\pi + \text{Arctan}\left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right)\right]$, c'est à dire sur un intervalle de longueur exactement égale à 2π .

On peut donc toujours choisir l'angle polaire d'une demi-droite d'origine O dans $\theta([0, 2\pi])$ et on en déduit que pour toute direction donnée d'angle polaire α appartenant à $\theta([0, 2\pi])$, il existe une unique valeur $t = \theta^{-1}(\alpha) \in [0, 2\pi[$ telle que $\theta(t) = t + \text{Arctan}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) = \alpha$.

Ainsi, la demi-droite d'angle polaire α coupe Γ_f en ce point $M(t)$ et en celui-ci seulement.

8°) D'après le calcul effectué en 5.b), la longueur $L(f)$ de Γ_f est égale à :

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) \right\| dt = \int_0^{2\pi} (f(t) + f''(t)) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt = 2\pi c_0(f).$$

En effet, l'intégrale de f'' vaut $f'(2\pi) - f'(0) = 0$, qui est nulle par 2π -périodicité de f .

9°)a) L'aire $A(f)$ du domaine $\Omega(f)$ peut ici être calculée à l'aide d'une formule dérivée de la formule de Green-Riemann :

$$A(f) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_f} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

Or $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\overrightarrow{u}_t + f'(t)\overrightarrow{v}_t = (f(t)\cos(t) - f'(t)\sin(t))\overrightarrow{e}_1 + (f(t)\sin(t) + f'(t)\cos(t))\overrightarrow{e}_2$:

$$A(f) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_f} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(t)(f(t) + f''(t)) dt = \pi \langle P(f), f \rangle.$$

9°)b) La formule de Parseval pour le produit scalaire donne alors :

$$A(f) = \pi \langle P(f), f \rangle = \pi \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \overline{c_n(P(f))} c_n(f).$$

Et on déduit de la question 1°) que $c_n(P(f)) = c_n(f) + c_n(f'') = (1 - n^2) c_n(f)$, d'où :

$$A(f) = \pi \langle P(f), f \rangle = \pi \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1 - n^2) |c_n(f)|^2.$$

Comme la fonction f est réelle, on remarque de plus que $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$.

On en déduit donc que $|c_n(f)| = |c_{-n}(f)|$, ce qui implique :

$$A(f) = \pi \langle P(f), f \rangle = \pi \left(|c_0(f)|^2 - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2 - 1) |c_n(f)|^2 \right).$$

On pose dans toute la suite : $\boxed{c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = c}$, et le nombre réel c est positif.

10°) L'appartenance de f à E_c équivaut à l'appartenance de f à E avec $c = c_0(f) \geq 0$:

$$\langle P(f), f \rangle = c^2 - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2 - 1) |c_n(f)|^2.$$

On en déduit que l'expression $\langle P(f), f \rangle$ a pour maximum c^2 , ce maximum étant atteint pour les fonctions de E_c telles que $c_k(f) = 0$ pour $k \geq 2$, c'est à dire pour les fonctions :

$$f(t) = c + c_1 e^{it} + \overline{c_1} e^{-it} \quad \text{ou} \quad c + a \cos(t) + b \sin(t), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

11°) Pour $f \in E$ vérifiant i) et ii), on a $c = c_0(f) \geq 0$, et 8°, 9°) et 10°) impliquent donc :

$$A(f) = \pi \langle P(f), f \rangle \leq \pi c_0^2(f) = \frac{L^2(f)}{4\pi}.$$

L'égalité est donc réalisée pour $f(t) = c + a \cos(t) + b \sin(t)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, c'est à dire pour $\overrightarrow{OM}(t) = (c + a \cos(t) + b \sin(t)) \overrightarrow{u}_t + (-a \sin(t) + b \cos(t)) \overrightarrow{v}_t$, ou encore :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (a + b + c \cos(t)) \overrightarrow{e}_1 + (b + c \sin(t)) \overrightarrow{e}_2.$$

Il s'agit ici du cercle centré en $(a + b, b)$ et de rayon c avec a, b, c quelconques et $c \geq 0$.

Les courbes Γ_f réalisant l'égalité $A(f) = \frac{L^2(f)}{4\pi}$ sont par conséquent les cercles.

12°)a) Pour $h \in \text{Ker}(P) = \text{Vect}(\cos, \sin)$, il est clair que $c_0(h) = 0$.

Pour $f \in E$ et $h \in \text{Ker}(P)$, on a donc $L(f) = 2\pi c_0(f)$ et $c_0(h) = 0$, d'où :

$$L(f + h) = 2\pi c_0(f + h) = 2\pi c_0(f) + 2\pi c_0(h) = L(f).$$

On a d'autre part $A(f) = \pi \langle P(f), f \rangle$ et on en déduit par linéarité et symétrie de P :

$$A(f + h) = \pi \langle P(f) + P(h), f + h \rangle = \pi \langle P(f), f \rangle + 2\pi \langle f, P(h) \rangle + \langle P(h), h \rangle.$$

Comme $h \in \text{Ker}(P)$, on en déduit que $A(f + h) = \pi \langle P(f), f \rangle = A(f)$.

12°)b) La courbe Γ_{f+h} se déduit de la courbe Γ_f par translation car on a :

$$\overrightarrow{OM_{f+h}(t)} = (f(t) + h(t))\vec{u}_t + (f'(t) + h'(t))\vec{v}_t = \overrightarrow{OM_f(t)} + \overrightarrow{OM_h(t)} = \overrightarrow{OM_f(t)} + \vec{V}$$

En effet, comme $h \in \text{Ker}(P)$, on a $h(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$ et un calcul simple montre que :

$$\overrightarrow{OM_h(t)} = (\alpha \cos(t) + \beta \sin(t))\vec{u}_t + (-\alpha \sin(t) + \beta \cos(t))\vec{v}_t = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 = \vec{V}.$$

13°) Pour $r \geq 0$, on a donc $L(f+r) = L(f) + 2\pi c_0(r) = L(f) + 2\pi r$.

En revanche, comme la fonction constante r n'appartient pas à $\text{Ker}(P)$, la formule établie à la question précédente ne s'applique plus, mais le caractère linéaire et symétrique de P avec les égalités évidentes $P(r) = r$ et $\langle r, f \rangle = r \langle 1, f \rangle = r c_0(f) = r L(f) / 2\pi$ donne :

$$A(f+r) = \pi \langle P(f) + P(r), f+r \rangle = \pi \langle P(f) + r, f+r \rangle = A(f) + r L(f) + \pi r^2.$$

14°)a) La projection orthogonale d'un point M sur D_θ est le point P défini par :

$$\overrightarrow{OP} = \langle \vec{u}_\theta, \overrightarrow{OM} \rangle \vec{u}_\theta.$$

Par conséquent, le projeté orthogonal de $M(t)$ sur D_θ est le point $P(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OP}(t) = \langle \vec{u}_\theta, f(t)\vec{u}_t + f'(t)\vec{v}_t \rangle \vec{u}_\theta = (f(t) \cos(t-\theta) - f'(t) \sin(t-\theta)) \vec{u}_\theta.$$

Comme la fonction $t \rightarrow f(t) \cos(t-\theta) - f'(t) \sin(t-\theta)$ est continue, l'image de $[0, 2\pi]$ est un segment de \mathbb{R} , ce qui prouve bien que la projection de Γ_f sur D_θ est un segment, et pour obtenir sa longueur, on étudie les extrema de $t \rightarrow f(t) \cos(t-\theta) - f'(t) \sin(t-\theta)$:

$$\frac{d}{dt} (f(t) \cos(t-\theta) - f'(t) \sin(t-\theta)) = -(f(t) + f''(t)) \sin(t-\theta).$$

Comme $f + f'' > 0$, cette dérivée s'annule en θ et $\theta + \pi$ modulo 2π , et cette dérivée étant négative sur $[\theta, \theta + \pi]$ et positive sur $[\theta + \pi, \theta + 2\pi]$, on voit que le maximum est atteint en θ et le minimum en $\theta + \pi$, de sorte que la longueur de la projection orthogonale de Γ_f sur D_θ , qui est la différence entre ce maximum et ce minimum, est $f(\theta) + f(\theta + \pi)$.

14°)b) Cette longueur $f(\theta) + f(\theta + \pi)$ est constante si et seulement si cette fonction reste égale à sa valeur en 0, c'est à dire si et seulement si : $\forall \theta, f(\theta) + f(\theta + \pi) = f(0) + f(\pi)$.

D'après 4°, ceci a lieu si et seulement si $c_0(f) = \frac{f(\pi) + f(0)}{2}$ et $c_{2p}(f) = 0$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

14°)c) Dans ce cas où le diamètre apparent est constant, on a donc :

$$L(f) = 2\pi c_0(f) = \pi(f(\pi) + f(0)) = \pi l.$$

Les conditions $c_0(f) = \frac{f(\pi) + f(0)}{2}$, ou $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \pi(f(0) + f(\pi))$, et $c_{2p}(f) = 0$ si $p \in \mathbb{N}^*$ sont réalisées si la fonction f est constante, $f(t) = R$, et c'est le cas des cercles de centre O . Mais c'est aussi le cas pour d'autres fonctions, comme les suivantes pour $0 < r < R$:

$$f(t) = R + r \sin(t).$$

Et cette fonction est bien dans E et vérifie i) et ii) pour $0 < r < R$ car $f > 0$ et $f + f'' > 0$.

Enfin, on a bien aussi $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \pi(f(0) + f(\pi))$, et $c_{2p}(f) = 0$ si $p \in \mathbb{N}^*$.

15°) Montrons que pour M_1 et M_2 appartenant à Γ_f , alors le segment $M_1 M_2$ est inclus dans $\Omega(f)$, ce qui implique d'ailleurs la convexité de $\Omega(f)$.

Considérons donc un point $M(t)$ situé entre M_1 et M_2 et vérifions que tous les points $M(\tau)$ de la courbe Γ_f (qu'on obtient donc pour $t - \pi \leq \tau \leq t + \pi$) sont situés d'un même côté de la tangente à Γ_f en $M(t)$, dont une équation est d'après la question 5.b) :

$$x \cos(t) + y \sin(t) - f(t) = 0.$$

Les coordonnées dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'un point $M(\tau)$ de Γ_f sont :

$$X(\tau) = f(\tau) \cos(\tau) - f'(\tau) \sin(\tau) \quad ; \quad Y(\tau) = f(\tau) \sin(\tau) + f'(\tau) \cos(\tau).$$

En reportant ces coordonnées dans l'équation de la tangente en $M(t)$, on obtient :

$$\varphi(\tau) = (f(\tau) \cos(\tau) - f'(\tau) \sin(\tau)) \cos(t) + (f(\tau) \sin(\tau) + f'(\tau) \cos(\tau)) \sin(t) - f(t).$$

Ce qui donne après simplification $\varphi(\tau) = f(\tau) \cos(\tau - t) - f'(\tau) \sin(\tau - t) - f(t)$, et :

$$\varphi'(\tau) = -(f(\tau) + f''(\tau)) \sin(\tau - t).$$

Comme $f + f'' > 0$, cette dérivée est positive sur $[t - \pi, t]$ et négative sur $[t, t + \pi]$, et $\tau \rightarrow \varphi(\tau) = f(\tau) \cos(t - \tau) - f'(\tau) \sin(t - \tau) - f(t)$ est maximale en t où elle vaut 0.

En reportant donc dans l'équation de la tangente en $M(t)$ les coordonnées d'un point $M(\tau)$, on obtient une expression toujours négative, ce qui prouve bien que tous ces points sont dans un même demi-plan délimité par cette tangente en $M(t)$. Comme ce demi-plan est convexe, et comme il contient les points M_1 et M_2 , il contient donc le segment $M_1 M_2$.
