

CONCOURS COMMUN CINP 2024 CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 - FILIÈRE MP

m.laamoum2@gmail.com ¹

EXERCICE 1

Q1.

- Polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow \underline{\underline{C_1+C_2}}}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ X+2 & X-4 & 6 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow \underline{\underline{L_2-L_1}}}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ 0 & X-2 & 4 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\ &= (X+2) \begin{vmatrix} X-2 & 4 \\ -1 & X+3 \end{vmatrix} \\ &= (X+2)(X^2 + X - 2) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X+2)^2(X-1)}$ et $Sp(A) = \{1, -2\}$.

- Sous espaces propres de A :
 - ▷ $E_{-2}(A)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 2z = -2x \\ -6x + 4y - 6z = -2y \\ -x + y - 3z = -2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 6y - 6z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x - y + z = 0 \end{aligned}$$

ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{E_{-2}(A) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$.

▷ $E_1(A)$

¹<https://tinyurl.com/2qyzzrbd>

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 2z = x \\ -6x + 4y - 6z = y \\ -x + y - 3z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 3y - 6z = 0 \\ -x + y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 4z \\ y = 6z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 6z \end{cases} \end{aligned}$$

donc $E_1(A) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- Diagonalisation de A :

A est diagonalisable car chaque sous espace propre est de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associée, donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$\triangleright D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\triangleright \text{Posons } v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} v_1 = 2e_1 + 6e_2 + e_3 \\ v_2 = e_1 + e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} e_2 = v_2 - e_1 \\ e_3 = v_3 + e_1 \\ v_1 = 2e_1 + 6(v_2 - e_1) + (v_3 + e_1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(-v_1 + 6v_2 + v_3) \\ e_2 = \frac{1}{3}(v_1 - 3v_2 - v_3) \\ e_3 = \frac{1}{3}(-v_1 + 6v_2 + 4v_3) \end{cases} \end{aligned}$$

donc $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Q2. Application:

\triangleright Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = AX_n$, comme $Y_n = P^{-1}X_n$ alors $PY_{n+1} = APY_n$ et $Y_{n+1} = P^{-1}APY_n$ or $A = PDP^{-1}$ donc $Y_{n+1} = DY_n$ et

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n \\ \beta_{n+1} = -2\beta_n \\ \gamma_{n+1} = -2\gamma_n \end{cases}$$

ce qui donne $\begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 \\ \beta_n = (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_{n+1} = (-2)^n \gamma_0 \end{cases}$ et $Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ (-2)^n \gamma_0 \end{pmatrix}$

▷ Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui a une matrice M associée $P^{-1}M$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue, ce qui assure la convergence de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P^{-1}X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a clairement $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$.

Si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = P \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Q3. En Python, cela se fait avec `s[1]`.

La transposition (2 3) est une permutation qui échange les éléments 2 et 3 et laisse 0 et 1, donc la liste Python représentant la transposition (2 3) dans \mathcal{S}_4 serait `[0, 1, 3, 2]`.

Q4. Fonction `comp` pour la composition de permutations :

```

1 def comp(s1, s2):
2     n = len(s1)
3     result = [0] * n
4     for i in range(n):
5         result[i] = s1[s2[i]]
6     return result

```

Q5. Fonction `inv(s)` pour l'inverse d'une permutation :

```

1 def inv(s):
2     n = len(s)
3     result = [0] * n
4     for i in range(n):
5         result[s[i]] = i
6     return result

```

Q6. Pour vérifier si un sous-ensemble G de \mathcal{S}_n est un sous-groupe, nous devons vérifier trois conditions : l'élément neutre (l'identité) est-il présent, est-il stable par la composition et l'inversion. Voici une fonction Python groupe pour cela :

```

1 def groupe(G):
2     n = len(G[0])
3     # Verifier l'identite
4     identity = list(range(n))
5     if identity not in G:
6         return False
7
8     # Verifier la stabilite par composition
9     for s1 in G:
10        for s2 in G:
11            if comp(s1, s2) not in G:
12                return False
13
14    # Verifier la stabilite par l'inversion
15    for s in G:
16        if inv(s) not in G:
17            return False
18
19    return True

```

Q7. Pour trouver le sous-groupe engendré par une permutation, nous devons composer successivement la permutation jusqu'à ce que nous revenions à la permutation initiale. Voici une fonction Python `eyelique` pour cela :

```

1 def eyelique(s):
2     subgroup = [s]
3     current = s
4     while True:
5         current = comp(s, current)
6         if current == s:
7             break
8         subgroup.append(current)
9     return subgroup

```

NB: les fonctions Python sont données seulement à titre indicatif.

PROBLÈME

Q9. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ on a

$$\begin{aligned}
 X^T M X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix} \\
 &= 2x^2 + 2xy + y^2 \\
 &= x^2 + (x + y)^2
 \end{aligned}$$

donc $X^T M X \geq 0$ et si $X^T M X = 0$ alors $x = y = 0$ ce qui est absurde, donc $X^T M X > 0$ et A est définie positive .

Caractérisation spectrale

Q9. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel : $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ et de la norme euclidienne $\|X\| = \sqrt{X^T X}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, montrons que M est définie positive si et seulement si $Sp(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

M est symétrique et réelle, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable dans une base orthonormée . Posons $Sp(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et (V_1, \dots, V_n) une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M , avec $MV_i = \lambda_i V_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Si M est définie positive :

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $V_i \neq 0$ donc $V_i^T M V_i > 0$ de plus $V_i^T M V_i = \lambda_i V_i^T V_i = \lambda_i \|V_i\|^2$, donc $\lambda_i > 0$ ainsi $Sp(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

- Si $Sp(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$:

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, il existe des réelles x_1, \dots, x_n non tous nuls tels que $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$, on a donc

$$M X = \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j V_j$$

et

$$\begin{aligned} X^\top MX &= \left(\sum_{i=1}^n x_i V_i^\top \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j V_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_j V_i^\top V_j \end{aligned}$$

or $V_i^\top V_j = \langle V_i, V_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ donc

$$X^\top MX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

ce qui donne $X^\top MX > 0$ et M est définie positive .

Q10. Application:

• $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$, on a $P'(t) = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3)$. On obtient le tableau des variations

t	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
$P'(t)$		+	0	-	0	+
$P(t)$	$-\infty$	-3	1	-3	$+\infty$	

le théorème des valeurs intermédiaires assure que P s'annule sur les intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$, et $]3, +\infty[$. De plus $P(0) = -3$ donc P s'annule sur l'intervalle $]0, 1[$, ainsi P admet trois racines positives .

Les racines de P sont approximativement : 0.46791 ; 1.6527 et 3.8794 .

• Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ c'est une matrice symétrique réelle , calculons son polynôme caractéristique de

A :

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & X-2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X^2 - 5X + 5) - X + 2 \\ &= X^3 - 6X^2 + 9X - 3 \end{aligned}$$

B est une matrice symétrique réelle et $Sp(B) \subset \mathbb{R}^{*+}$ donc elle est définie positive .

Un critère en dimension 2

Q11. Si M de taille n est symétrique définie positive donc $Sp(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et on a $\text{Tr}(M) = \sum_{\lambda \in Sp(M)} \lambda > 0$

et $\det(M) = \prod_{\lambda \in Sp(M)} \lambda > 0$.

Q12. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique vérifiant $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$, on a $Sp(M) = \{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{R}$, donc $\lambda + \mu > 0$ et $\lambda\mu > 0$, par suite λ et μ sont non nulles et de même signe de plus λ, μ et $\lambda + \mu$ sont de même signe d'où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ce qui prouve que M est définie positive.

Q13. Soit $M = \text{diag}(3, 1, -1)$, $\det(M) = 3$ et $\text{Tr}(M) = 3$ mais elle n'est pas définie positive.

Q14. Application:

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$

Les points critiques de f sont solutions du système (S) suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

on a alors

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0 \\ 1 - \frac{1}{x y^2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{xy} \\ &\Leftrightarrow x = y \text{ et } x^3 = 1 \end{aligned}$$

f admet un seul point critiques dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ qui est $(1, 1)$.

La nature de ce point est déterminée par la matrice Hessienne de f en $(1, 1)$.

$$\text{On a } H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3 y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{y^3 x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{y^2 x^2},$$

$$\text{donc } H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det H_f(1, 1) = 3 > 0$ et $\text{Tr } H_f(1, 1) = 4 > 0$ alors $H_f(1, 1)$ est définie positive donc $(1, 1)$ est un minimum local.

Le critère de Sylvester

Q15. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

• Si $X_k \neq 0$, posons alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ qu'on va noter par blocs $X = \begin{bmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{bmatrix}$, et

posons $M = \left(\begin{array}{c|c} M_k & B \\ \hline C & A \end{array} \right)$ avec $A \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$, on a alors

$$MX = \left(\begin{array}{c|c} M_k & B \\ \hline C & A \end{array} \right) \begin{bmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_k X_k \\ C X_k \end{bmatrix}$$

et

$$X^\top MX = \begin{bmatrix} X_k^\top & | & 0_{1,n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_k X_k \\ C X_k \end{bmatrix} = X_k^\top M_k X_k$$

- Si $X_k = 0$, on prend $X = \begin{bmatrix} Y \\ 0_{n-k,1} \end{bmatrix}$ avec $Y \in \ker(M_k) \setminus \{0\}$.

Ce qui donne $X^\top M X = Y^\top M_k Y = X_k^\top M_k X_k = 0$.

Ainsi il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$

Q16. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a $M_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, soit $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. D'après la question **Q15**.

il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$ or M est définie positive donc $X^\top M X > 0$ d'où $X_k^\top M_k X_k > 0$ et M_k symétrique réelle définie positive, ainsi M vérifie le critère de Sylvester.

Q17. Soit $n \geq 2$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\det(M) > 0$. On pose

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & U \\ \hline U^\top & \alpha \end{array} \right) \text{ avec } M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

avec M_{n-1} définie positive.

- On a $\det(M_{n-1}) > 0$ donc M_{n-1} elle est inversible, soit $V = -(M_{n-1})^{-1}U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, il vérifie alors $M_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$.

- Soit $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & V \\ \hline 0_{1,n-1} & 1 \end{array} \right)$, on a

$$\begin{aligned} MQ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & U \\ \hline U^\top & \alpha \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & V \\ \hline 0_{1,n-1} & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & M_{n-1}V + U \\ \hline U^\top & U^\top V + \alpha \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline U^\top & U^\top V + \alpha \end{array} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q^\top M Q &= \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline V^\top & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline U^\top & U^\top V + \alpha \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline V^\top M_{n-1} + U^\top & U^\top V + \alpha \end{array} \right) \end{aligned}$$

remarquons que $V^\top M_{n-1} + U^\top = (M_{n-1}V + U)^\top = 0$ et $U^\top V + \alpha \in \mathbb{R}$ qu'on note β , ce qui donne

$$Q^\top M Q = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array} \right).$$

On sait que $\det M > 0$ et $\det M_{n-1} > 0$, du fait que $\det Q = 1$ on a $\det Q^\top M Q = \det M = \beta \det M_{n-1}$ d'où $\beta > 0$.

Ce qui montre que $Q^\top M Q$ s'écrit par blocs $\left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array} \right)$ avec $\beta > 0$.

Q18. Posons \mathcal{P}_n : "Toute matrice symétrique réelle d'ordre n vérifiant le critère de Sylvester est définie positive".

\mathcal{P}_1 est évident, soit $n \geq 2$ supposons \mathcal{P}_n vrai, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique vérifiant le critère de Sylvester, donc pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ on a $\det M_k > 0$, en particulier pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc M_n qui est symétrique réelle d'ordre n vérifie le critère de Sylvester, par hypothèse de récurrence elle est définie positive.

D'après la question **Q17**, il existe une matrice Q et un réel $\beta > 0$ tels que $Q^\top M Q = \left(\begin{array}{c|c} M_n & 0_{n,1} \\ \hline 0_{1,n} & \beta \end{array} \right)$ avec

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} I_n & V \\ \hline 0_{1,n} & 1 \end{array} \right), \quad Q \text{ est donc inversible.}$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ posons $Y = Q^{-1}X$ alors $Y \neq 0$ et

$$X^T M X = (QY)^T M (QY) = Y^T (Q^T M Q) Y$$

posons $Y = \begin{bmatrix} Z \\ y \end{bmatrix}$ avec $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned} X^T M X &= \begin{bmatrix} Z^T & | & y \end{bmatrix} \left(\begin{array}{c|c} M_n & 0_{n,1} \\ \hline 0_{1,n} & \beta \end{array} \right) \begin{bmatrix} Z \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Z^T & | & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_n Z \\ \beta y \end{bmatrix} \\ &= Z^T M_n Z + \beta y^2 \end{aligned}$$

comme $(Z, y) \neq (0_{n,1}, 0)$ $\beta > 0$ et M_n est symétrique définie positive alors $X^T M X > 0$, d'où M définie positive ce qui montre \mathcal{P}_{n+1} , d'où le résultat pour tout $n \geq 1$.

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$,

$C(x)$ est symétrique, elle est définie positive si elle vérifie le critère de Sylvester. Les mineurs principaux de $C(x)$ sont :

$$2, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

et

$$\det C(x) = 2 \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2$$

On a $\det C(x) > 0$ si et seulement si $x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$.

Ainsi $C(x)$ est symétrique, elle est définie positive si et seulement si $x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$.

Q20 On remarque que le mineur principal d'ordre 3, $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7$, donc la matrice n'est pas définie positive.

Q21. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, posons $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz$ on a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x(4x + 2y - 3z) + y^2 + z^2 \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mais la matrice A n'est pas symétrique !, la relation reste valable si on passe au transposée, donc $f(x, y, z) =$

$$(x, y, z) A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ par suite}$$

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \left(\frac{1}{2}(A + A^T) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ qui est symétrique.}$$

Les mineurs principaux de cette matrice symétrique sont : 4 , $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ et $\det\left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right) = \frac{3}{4}$, donc elle est définie positive, ainsi $f(x, y, z) > 0$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta_n = \det(S_n)$, le développement suivant la première ligne donne :

$$\Delta_n = \sqrt{3}\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3}\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

$\Delta_n = \sqrt{3}\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, l'équation caractéristique est $X^2 - \sqrt{3}X + 1 = 0$, dont les solutions sont $r = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $\bar{r} = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

Par suite $\Delta_n = \alpha e^{\frac{i\pi}{6}} + \beta e^{-\frac{i\pi}{6}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a $\Delta_1 = \sqrt{3}$ et $\Delta_2 = 2$ donc

$$\begin{cases} \alpha e^{\frac{i\pi}{6}} + \beta e^{-\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3} \\ \alpha e^{\frac{i\pi}{3}} + \beta e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2 \end{cases}$$

par suite $\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & e^{-\frac{i\pi}{6}} \\ 2 & e^{-\frac{i\pi}{3}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\frac{i\pi}{6}} & e^{-\frac{i\pi}{6}} \\ e^{\frac{i\pi}{3}} & e^{-\frac{i\pi}{3}} \end{vmatrix}} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{\begin{vmatrix} e^{\frac{i\pi}{6}} & \sqrt{3} \\ e^{\frac{i\pi}{3}} & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\frac{i\pi}{6}} & e^{-\frac{i\pi}{6}} \\ e^{\frac{i\pi}{3}} & e^{-\frac{i\pi}{3}} \end{vmatrix}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, donc $\alpha = -ie^{\frac{i\pi}{6}}$ et $\beta = ie^{-\frac{i\pi}{6}}$

ainsi on a

$$\Delta_n = i(-e^{\frac{i(n+1)\pi}{6}} + e^{-\frac{i(n+1)\pi}{6}}) = 2 \sin\left(\frac{n+1}{6}\pi\right)$$

par suite $\Delta_1 = \sqrt{3}$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = \sqrt{3}$, $\Delta_4 = 1$ et $\Delta_5 = 0$

Ainsi S_n est symétrique définie positive si et seulement si $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.