**Correction de première épreuve de mathématiques MP**
Mines-Ponts 2011
Proposée par M. Chehabi

## A. Décomposition de Dunford

**1-** On a $P = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Comme pour tout $(i,j) \in [[1,r]]^2$ tel que $i \neq j$ on a $P_i$ et $P_j$ sont premiers entre eux alors d'après le théorème de décomposition des noyaux :

$$KerP(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} KerP_i(f)$$

D'après le théorème de Cayley Hamilton on a $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ donc

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

**2-** On a $\forall x \in F_i$ , $(f_i - \lambda_i id_{F_i})^{\alpha_i}(x) = (f - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i}(x) = 0$ donc le polynôme $P_i = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ annule $f_i$.
On a $\pi_{f_i}$ le polynôme minimal de $f_i$ divise alors $P_i$ et donc $\lambda_i$ est la seule racine du polynôme caractéristique $\chi_{f_i}$ de l'endomorphisme $f_i$ .
D'autre part , Soit $B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$ une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
( où $\forall i \in [[1,r]]$, $B_i$ une base de $F_i$ ).
Puisque $\forall i \in [[1,r]]$, $F_i$ est stable par $f$ on a

$$\mathcal{M}at_B\ f = \begin{pmatrix} \mathcal{M}at_{B_1}\ f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{M}at_{B_2}\ f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{M}at_{B_r}\ f_r \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $i \in [[1,r]]$ , $\chi_{f_i}$ divise $\chi_f = P$
Ainsi il existe $\beta_i \in [[1,\alpha_i]]$ tel que $\chi_{f_i} = (\lambda_i - X)^{\beta_i}$ puis $\dim F_i = \beta_i$.
$\forall i \in [[1,r]]$, on a $\beta_i = \alpha_i$.
Car sinon il existe $j \in [[1,r]]$, tel que $\beta_j < \alpha_j$ et alors $\sum_{i=1}^{r} \beta_i < \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$.
Or $\sum_{i=1}^{r} \beta_i = n$ car $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ et $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n$ degré de $P$, ce qui est absurde.
Ainsi $\chi_{f_i} = (\lambda_i - X)^{\alpha_i} = P_i$.

**3-** Soit $i \in [[1,r]]$, l'endomorphisme $f_i \in \mathcal{L}(F_i)$ est trigonalisable donc il existe une base $\mathcal{B}_i$ de $F_i$ telle que :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_i}\ f_i = T_i$$

où $T_i$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est formée par les $\lambda_i$ :

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \times & \cdots & \times \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \times \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Posons $N_i = T_i - \lambda_i I_{\alpha_i}$ , on a $N_i$ est triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle donc $N_i$ est nilpotente ( $N_i^{\alpha_i} = 0$ ).
Notons $\mathcal{B} = \overset{r}{\underset{i=1}{\cup}} \mathcal{B}_i$ c'est une base de de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$.
On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\ f &= \begin{pmatrix} \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1}\ f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_2}\ f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_r}\ f_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\alpha_2} + N_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix} = A' \end{aligned}$$

Soit $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathcal{B}$.
On a

$$P^{-1}AP = A'$$

**4-** Posons

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N' = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_r \end{pmatrix}$$

On a $A' = D' + N'$ et $D'N' = N'D'$ donc $A = D + N$ où $D = PD'P^{-1}$ et $N = PN'P^{-1}$.
On a bien $D$ diagonalisable et $N$ est nilpotente et $DN = ND$.

**Un exemple pour** $n = 3$.

**5-** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .
Soit $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ .
On a le polynôme caractéristique de $f$ est $\chi_f(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.
Notons $E_1(f)$ ( resp $E_2(f)$ ) le sous espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ ( resp $\lambda_2 = 2$ ).
On a $E_1(f) = F_1$ et $E_2(f) \subset F_2$
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned} u \in E_1(f) &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } z = y \end{aligned}$$

donc $E_1(f) = Vect(u_1)$ où $u_1 = (0, 1, 1)$

$$\begin{array}{rcl} u & \in & E_2(f) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 2x-2y+z=0 \\ x-y=0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & z=0 \ \text{ et } \ \ y=x \end{array}$$

donc $E_2(f) = Vect(u_2)$ où $u_2 = (1,1,0)$.

$$u \in F_2 \Longleftrightarrow y - x = 0$$

donc $F_2 = Vect(u_2, u_3)$ où $u_3 = (0,0,1)$.
On a $f(u_3) = (1,1,2) = u_2 + 2u_3$.
$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Posons

$$D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$N = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de $A$.

## B. Commutation et conjugaison

**6-** Soit $P$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\begin{array}{rcl} (conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ \ conj_P)(X) & = & P^{-1}\left[A(PXP^{-1}) - (PXP^{-1})A\right]P = (P^{-1}AP)X - X(P^{-1}AP) \\ & = & comm_{P^{-1}AP}(X). \end{array}$$

D'où

$$conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ \ conj_P = comm_{P^{-1}AP}$$

**7-** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale et $(i,j) \in [[1,n]]^2$.

Posons $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, ...., \lambda_n)$.

$$\begin{aligned} comm_A(E_{i,j}) &= AE_{i,j} - E_{i,j}A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (E_{k,k}E_{i,j} - E_{i,j}E_{k,k}) \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j} \end{aligned}$$

Donc $E_{i,j}$ est un vecteur propre de $comm_A$.
Ainsi $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de $comm_A$.
Donc $comm_A$ est diagonalisable et les valeurs propres de $comm_A$ sont les $\lambda_i - \lambda_j$ , $(i,j) \in [[1,n]]^2$.

**8-** On suppose que $A$ est diagonalisable donc il existe une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ...., \lambda_n)$ et une matrice $P$ inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$P^{-1}AP = D$$

On a d'après la question 6, pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$

$$(conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ \ conj_P)(E_{i,j}) = comm_D(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$$

Comme $conj_P$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(conj_P)^{-1} = conj_{P^{-1}}$ on a :

$$comm_A(conj_P(E_{i,j})) = (\lambda_i - \lambda_j)(conj_P(E_{i,j}))$$

donc

$$comm_A(PE_{i,j}P^{-1}) = (\lambda_i - \lambda_j)(PE_{i,j}P^{-1})$$

On a $(PE_{i,j}P^{-1})_{1\leq i,j\leq n}$ est l'image de la base $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ par l'automorphisme $conj_P$ donc c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de plus elle est formée de vecteurs propres de $comm_A$.
Ainsi $comm_A$ est daigonalisable.

**9-** Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrons par récurrence que $\forall m \in \mathbb{N} \quad comm_A^m(X) = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \ A^{m-k}XA^k$
Pour $m = 0$ c'est trivial
Soit $m \in \mathbb{N}$ , supposons que $comm_A^m(X) = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \ A^{m-k}XA^k$.
On a

$$\begin{aligned} comm_A^{m+1}(X) &= A\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k A^{m-k}XA^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k A^{m-k}XA^k\right)A \\ &= A^{m+1}X + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k[C_m^k + C_m^{k-1}]A^{m+1-k}XA^k + (-1)^{m+1}XA^{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k C_{m+1}^k A^{m+1-k}XA^k \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \ comm_A^m(X) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k A^{m-k}XA^k$$

Supposons que $A$ est nilpotente , alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = 0$.
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\begin{aligned} comm_A^{2m}(X) &= \sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k A^{2m-k} X A^k \\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_{2m}^k \underbrace{A^{2m-k}}_{=0} X A^k + \sum_{k=m+1}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k A^{2m-k} X \underbrace{A^k}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $comm_A$ est nilpotente .

**10-** On suppose que $A$ est nilpotente et $comm_A = 0$.
Alors pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a $AX = XA$.
Posons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ .
Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$ on a $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{k,i}E_{k,j} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{j,k}E_{i,k}$.
alors $\forall r \in [[1,n]] \setminus \{i\}$ $a_{r,i} = 0$ et $a_{i,i} = a_{j,j}$.
ainsi $A$ est une matrice scalaire ,donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda I_n$.
$A$ est nilpotente donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = 0$ alors le polynôme $Q = X^m$ annule $A$, par suite la seule valeur propre de $A$ est 0 et $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
En particulier $Tr(A) = 0$ donc $0 = tr(\lambda I_n) = n\lambda$ et alors $\lambda = 0$ puis $A = 0$.

**11-** Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de $A$ où $D$ est diagonalisable , $N$ est nilpotente et $DN = ND$.
On a $comm_A = comm_{D+N} = comm_D + comm_N$.
D'après la question 8) on a $comm_D$ est diagonalisable et d'après la question 9) on a $comm_N$ est nilpotente.
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , en utilisant que le fait que $DN = ND$ on a

$$\begin{aligned} (comm_D \circ comm_N)(X) &= DNX - DXN - NXD + XND \\ &= NDX - DXN - NXD + XDN \\ &= N(DX - XD) - (DX - XD)N \\ &= (comm_N \circ comm_D)(X) \end{aligned}$$

donc $comm_D \circ comm_N = comm_N \circ comm_D$
Ainsi la décomposition de Dunford de $comm_A$ est

$$comm_A = comm_D + comm_N$$

**Conclusion**
D'après la question 8) on a , si $A$ est diagonalisable, alors $comm_A$ est diagonalisable.
Réciproquement, supposons que $comm_A$ est diagonalisable alors
$comm_A = comm_A + 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$ est la décomposition de Dunford de $comm_A$.
Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de $A$ où $D$ est diagonalisable , $N$ est nilpotente et $DN = ND$.

On a la décomposition de Dunford de $comm_A$ est $comm_A = comm_D + comm_N$ .
D'après l'unicité de cette décomposition on a

$$comm_A = comm_D \quad \text{et} \quad comm_N = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$$

On a $N$ est nilpotente et $comm_N = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$ alors d'après la question 10) on a $N = 0$.
Donc $A = D$ puis $A$ est diagonalisable.
Ainsi

$$A \text{ est diagonalisable si et seulement si } comm_A \text{ est diagonalisable}$$

**C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe .**

**12-** Soit $u$ un endomorphisme de $E$

$(i) \Longrightarrow (ii)$ supposons que $u$ est diagonalisable alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ formée de vecteurs propres de $u$ , $r \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ et $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$.
tels que

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\ u = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\alpha_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

alors

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\ u^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 I_{\alpha_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r^2 I_{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

Si 0 n'est pas valeur propre de $u$ alors 0 n'est pas valeur propre de $u^2$ donc
$Ker\ u = \{0\} = Ker\ u^2$.
Sinon, supposons que $\lambda_1 = 0$ alors $dimKer\ u = \alpha_1 = dimKer\ u^2$ et de $Ker\ u \subset Ker\ u^2$ on a $Ker\ u = Ker\ u^2$.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$
Supposons que $Ker\ u = Ker\ u^2$
Soit $x \in Ker\ u \cap Im\ u$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ et $u(x) = 0$.
On a $u^2(y) = 0$ donc $y \in Ker\ u^2 = Ker\ u$ et alors $x = u(y) = 0$.
Ainsi $Ker\ u \cap Im\ u = \{0\}$

**13-** Soit $(\alpha_1, ...., \alpha_q) \in \mathbb{C}^q$ tel que $\sum_{k=1}^{q} \alpha_k \varphi_k = 0$.

Alors $\forall x \in E \qquad b\left(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k \varepsilon_k, x\right) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k b(\varepsilon_k, x) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \varphi_k(x) = 0$

Comme $b$ est non dégénérée alors $\sum_{k=1}^{q} \alpha_k \varepsilon_k = 0$ puis $\forall k \in [[1, q]]$ , $\alpha_k = 0$ ( car $(\varepsilon_1, ...., \varepsilon_q)$ est libre ). Ainsi la famille $(\varphi_1, ..., \varphi_q)$ est libre de $E^*$.

**14-** Soit $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in F^{\perp b}$ et $j \in [[1, q]]$. On a $b(x, \varepsilon_j) = 0$

donc $0 = b\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k, \varepsilon_j\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k b\left(e_k, \varepsilon_j\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \varphi_j\left(e_k\right) = \alpha_j$
alors $x = \sum\limits_{k=q+1}^{n}\alpha_k e_k$ puis $F^{\perp b} \subset Vect(e_{q+1}, ...., e_n)$.
Réciproquement $\forall k \in [[q+1, n]]$ et $\forall h \in [[1, q]]$ on a $b(e_k, \varepsilon_h) = \varphi_h(e_k) = 0$.
Donc $Vect(e_{q+1}, ...., e_n) \subset F^{\perp b}$.
Enfin $F^{\perp b} = Vect(e_{q+1}, ...., e_n)$.
On a alors $dimF^{\perp b} = n - q$ puis $dimF + dimF^{\perp b} = n$.

**D. Critère de Klarès**

**15-** Soient $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
On a puisque $tr$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \varphi(X + \lambda Y, Z) &= tr((X + \lambda Y)Z) = tr(XZ) + \lambda tr(YZ) \\ &= \varphi(X, Z) + \lambda\varphi(Y, Z) \end{aligned}$$

On a $\varphi(X, Y) = tr(XY) = tr(YX) = \varphi(Y, X)$
Donc $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique.
Soit $X = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{\perp\varphi}$ alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $tr(XY) = 0$.
Alors en particulier, pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$ , $tr(XE_{j,i}) = 0$
On a $XE_{j,i} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}x_{k,l}E_{k,l}E_{j,i} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}x_{k,l}\delta_{l,j}E_{k,i} = \sum\limits_{k=1}^{n}x_{k,j}E_{k,i}$
donc $tr(XE_{j,i}) = \sum\limits_{k=1}^{n}x_{k,j}tr(E_{k,i}) = x_{i,j}$
alors pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$ $x_{i,j} = 0$ puis $X = 0$.
Ainsi $\varphi$ est non dégénérée.

**16-** Soit $Y \in Im(comm_A)$ , alors il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $Y = AX - XA$.
Soit $Z \in Ker(comm_A)$, alors $AZ = ZA$
On a $\varphi(Y, Z) = tr(YZ) = tr((AX - XA)Z) = tr(AXZ) - tr(XAZ) = 0$
Car puisque $AZ = ZA$ on a $tr(XAZ) = tr(XZA)$ et $tr(XZA) = tr(AXZ)$.
Ainsi $Y \in \{Ker(comm_A)\}^{\perp\varphi}$ puis

$$Im(comm_A) \subset \{Ker(comm_A)\}^{\perp\varphi} \qquad (1)$$

On a d'après la question 14) $dim\{Ker(comm_A)\}^{\perp\varphi} = dim\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) - dimKer(comm_A)$
donc d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $comm_A$.

$$dim\{Ker(comm_A)\}^{\perp\varphi} = dim\left(Im(comm_A)\right) \qquad (2)$$

De (1) et (2) on a alors $\{Ker(comm_A)\}^{\perp\varphi} = Im(comm_A)$.

**17-** Supposons que $A$ est nilpotente , alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = 0$.
Soit $Y \in Ker(comm_A)$ alors $AY = YA$ donc $(AY)^m = A^m Y^m = 0$.
On a alors $AY$ est nilpotente donc comme dans la question 10) on a $tr(AY) = 0$.
donc $A \in \{Ker(comm_A)\}^{\perp\varphi}$
Comme $\{Ker(comm_A)\}^{\perp\varphi} = Im(comm_A)$ alors il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que

$A = comm_A(X)$.
On a $comm_{A+\lambda I_n}(X) = comm_A(X) + \lambda comm_{I_n}(X) = A$ car $comm_{I_n}(X) = 0$.

**18-** On a d'après la question 3) il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\alpha_2} + N_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix} = D' + N'$$

où

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} \text{ et } N' = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_r \end{pmatrix}$$

Où $\forall i \in [[1, r]]$ , $N_i$ est nilpotente.
On a d'après la question 17) , pour tout $i \in [[1, r]]$ il existe $X_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ tel que $N_i = comm_{N_i+\lambda_i I_{\alpha_i}}(X_i)$

Posons $Y = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X_r \end{pmatrix}$ ,on a

$$\begin{aligned} comm_{P^{-1}AP}(Y) &= \begin{pmatrix} comm_{N_1+\lambda_1 I_{\alpha_1}}(X_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & comm_{N_r+\lambda_r I_{\alpha r}}(X_r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_r \end{pmatrix} = N' \end{aligned}$$

Donc $N = PN'P^{-1} = Pcomm_{P^{-1}AP}(Y)P^{-1} = comm_A(PYP^{-1})$.
Posons $X = PYP^{-1}$ on a $N = comm_A(X)$.

**19- Conclusion**
Supposons que $A$ est diagonalisable alors d'après la question 8) , $comm_A$ est diagonalisable et alors d'après la question 12) on a $Ker(comm_A) = Ker\left((comm_A)^2\right)$ .
Réciproquement supposons que $Ker(comm_A) = Ker\left((comm_A)^2\right)$ alors d'après la question 12) on a $Ker(comm_A) \cap Im(comm_A) = \{0\}$.
Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de $A$ où $D$ est diagonalisable , $N$ est nilpotente et $DN = ND$.
D'après la question 18) on a $N \in Im(comm_A)$
On a $AN = (D + N)N = DN + N^2 = ND + N^2 = NA$ donc $N \in Ker(comm_A)$
Ainsi $N \in Ker(comm_A) \cap Im(comm_A) = \{0\}$ puis $A = D$ est diagonalisable.
Ainsi

$$A \text{ est diagonalisable si et seulement si } Ker(comm_A) = Ker\left((comm_A)^2\right)$$