

E3A - PSI - 2020

Épreuve d'exercices

Exercice 1

Soient $J = [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions définies sur J par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. À $x \in J$ fixé, la suite $(|f_n(x)|)_{n \geq 0}$ est décroissante et de limite nulle. La série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ vérifie donc les hypothèses du critère spécial des séries alternées et est ainsi convergente, d'où la convergence simple de la série $\sum f_n$.

2. Pour $x \in J$, $|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{nx}}$, terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1/2 < 1$). Ainsi, la série $\sum f_n$ ne converge-t-elle absolument en aucun point et donc *a fortiori* pas normalement sur J (ni sur aucun intervalle, d'ailleurs).

3. Pour $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, la majoration du reste par le critère spécial et la décroissance de $|f_n|$ donnent

$$|R_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d'où la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur J .

4. La convergence uniforme permet d'utiliser le théorème de la double limite. Ainsi, en utilisant le symbole de Kronecker,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,0} = 1.$$

5.1. La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann alternée ; elle vérifie les hypothèses du critère spécial (signe alterné, valeur absolue décroissante et de limite nulle) et est donc convergente.

5.2. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, de dérivée $h'(t) = -\frac{1}{2t^{3/2}}$ donne

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}} \quad \therefore \\ \varphi(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \right] \\ \left| \varphi(x) - 1 - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{\zeta(3/2)}{2x^{3/2}} \quad \therefore \\ \varphi(x) &= 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Toutes les matrices triangulaires sont à diagonales propres. Si $n = 2$, ce sont les seules. Si $n \geq 3$, ce n'est plus le cas. Par exemple, $A = E_{1,3} + E_{3,2}$ est à diagonale nulle et vérifie $A^3 = 0$, donc est à diagonale propre.

2. En développant le déterminant par rapport à la première ligne, il vient

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X & 0 & -\alpha \\ 0 & X & -\beta \\ -\alpha & -\beta & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & -\beta \\ -\beta & X \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 0 & X \\ -\alpha & -\beta \end{vmatrix} = X(X^2 - \beta^2) - \alpha(\alpha X) = X^3 - (\alpha^2 + \beta^2)X.$$

La matrice M est à diagonale propre si, et seulement si, $\chi_M = X^3$, donc si $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, soit (on est dans \mathbb{R}), si $\alpha = \beta = 0$, donc si, et seulement si, M est la matrice nulle.

3.1. Rappelons les résultats du cours : $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_1) = \frac{1}{1/3} = 3$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{2/3}{(1/3)^2} = 6$.

3.2. En utilisant $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et le système complet d'événements $\{(X_1 = k); k \geq 1\}$, il vient

$$(X_1 = X_2) = (X_1 = X_2) \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} (X_1 = k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X_1 = k, X_2 = k).$$

3.3. D'après la question 2, $B(\omega)$ est à diagonale propre si, et seulement si $X_1(\omega) - X_2(\omega) = X_2(\omega) - X_3(\omega) = 0$, soit $X_1(\omega) = X_2(\omega) = X_3(\omega)$. La décomposition réalisée à la question 3.2 s'étend sans difficulté à trois variables aléatoires — ce qui montre en passant que $(X_1 = X_2 = X_3)$ est un événement — et il vient, par additivité dénombrable relativement aux événements deux à deux incompatibles, puis par indépendance mutuelle des X_i ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X_1 = k, X_2 = k, X_3 = k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = k, X_3 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = k)^3 \\ &= \frac{1}{3^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3^3} \times \frac{1}{1 - (2^3/3^3)} = \frac{1}{19}. \end{aligned}$$

4.1. Par définition de la trace et la formule du produit de deux matrices,

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^T a_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

Rappelons que $\text{tr}(A^T A) = \|A\|_2^2$ norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (mais on a refait le calcul).

4.2. D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$. Il s'ensuit

$$\text{tr}(A^T A) = \text{tr}((PD^T P^T)(PDP^T)) \stackrel{(P^T P = I_n)}{=} \text{tr}(PD^T DP^T) \stackrel{(D^T = D)}{=} \text{tr}(PD^2 P^T) \stackrel{(1)}{=} \text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

(1) : la trace est un invariant de similitude. Autrement dit, la norme euclidienne canonique d'une matrice réelle carrée est un invariant de similitude orthogonale.

4.3. Soit A une matrice symétrique réelle. Les deux questions précédentes montrent que A est à diagonale propre si, et seulement si,

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2.$$

Ainsi, les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont les matrices diagonales.

Exercice 3

1.1. Quand t tend vers l'infini, $\frac{t}{1+t^2}$ tend vers 0. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \lambda - f(t) &= \lambda - \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \lambda - \left(1 - \frac{t^2}{2(1+t^2)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{t^4}{(1+t^2)^4}\right)\right) = \lambda - 1 + \frac{1}{2t^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^4}\right) \quad \therefore \\ &\underset{(t \rightarrow +\infty)}{\sim} \begin{cases} \lambda - 1 & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \frac{1}{2t^2} & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

1.2. La fonction $t \mapsto \frac{\lambda - f(t)}{t}$ est continue sur $[a, +\infty[$, donc la convergence de $I(\lambda)$ ne dépend que du comportement de la fonction au voisinage de l'infini. Or, $\frac{\lambda - f(t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda - 1}{t}$ si $\lambda \neq 1$ et $\frac{\lambda - f(t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2t^3}$ si $\lambda = 1$. Par comparaison avec les intégrales de référence, $I(\lambda)$ est convergente si, et seulement si, $\lambda = 1$.

1.3. La linéarité de l'intégrale sur un segment et la convergence de $I(1)$ permettent d'écrire

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_a^x \frac{dt}{t} - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt \underset{(x \rightarrow +\infty)}{=} \int_a^x \frac{dt}{t} + \mathcal{O}(1) = \ln x + \mathcal{O}(1) \sim \ln x.$$

2. Attention : f est redevenue une fonction continue quelconque. Si $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ sont convergentes, on peut utiliser la linéarité de l'intégrale pour obtenir la convergence de

$$I(\lambda) - I(\mu) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^{+\infty} \frac{\mu - f(t)}{t} dt = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \mu}{t} dt$$

et cette dernière intégrale ne converge que si $\lambda = \mu$. À f donnée, il existe donc au plus une valeur de λ telle que $I(\lambda)$ converge.

3.1. La fonction H_λ est une primitive de la fonction continue $\lambda - f$ et est donc de classe \mathcal{C}^1 . On $H'_\lambda(x) = \lambda - f(x)$.

3.2. On réalise une intégration par parties. Sous réserve de justification,

$$\int_a^{+\infty} H_\lambda(t) \times \frac{1}{t^2} dt = \left[H_\lambda(t) \times \left(-\frac{1}{t} \right) \right]_a^{t \rightarrow +\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{H'_\lambda(t)}{t} dt = I(\lambda).$$

Supposons que H_λ soit bornée. Alors, l'intégrale de gauche est convergente en vertu du théorème de comparaison. Le crochet tend vers 0 et l'intégrale obtenue, $I(\lambda)$ est donc également convergente et sa valeur égale à la première.

4.1. Comme f est continue, φ est dérivable et l'on a $\varphi'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$. Ainsi, φ est constante. La relation de Chasles donne alors

$$\begin{aligned} H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) &= \int_a^{x+T} (\lambda - f(t)) dt - \int_a^x (\lambda - f(t)) dt = \int_x^{x+T} (\lambda - f(t)) dt \\ &= \lambda T - \varphi(x) = \lambda T - \varphi(0) = \lambda T - \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$

4.2. La suite $(H_\lambda(a+nt))_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $\lambda T - \int_0^T f(t) dt$ d'après la question précédente.

Il s'ensuit qu'elle n'est bornée que si elle est constante, *i.e.* si, et seulement si, $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, valeur moyenne de f .

4.3. La formule obtenue à la question 4.1. exprime alors que la fonction H_{λ_0} est T -périodique. Étant continue et périodique, elle est bornée.

4.4. D'après la question 3.2, l'intégrale $I(\lambda_0)$ converge et, d'après la question 2, c'est la seule valeur de λ pour laquelle ce soit le cas.

4.5. Si $\lambda \neq \lambda_0$, on reprend l'idée utilisée à la question 1.3. Les justifications sont identiques.

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_a^x \frac{\lambda_0}{t} dt - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt = \lambda_0 \ln x + \mathcal{O}(1).$$

5.1. On pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin t} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$. Pour $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin t}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et l'équivalent $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ montre qu'elle est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur n). Il s'ensuit que l'intégrale définissant A_n est faussement impropre, donc convergente.

5.2. Quand t tend vers 0

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} = \frac{\sin t - t}{t \sin t} \sim \frac{-t^3/6}{t^2} = -\frac{t}{6}.$$

5.3. Notons ψ la fonction de la question précédente. Elle est continue sur $]0, \pi/2]$ et prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $[0, \pi/2]$.

$$A_n - B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt = - \int_0^{\pi/2} |\sin(nt)|\psi(t) dt \quad \therefore \quad |A_n - B_n| \leq \int_0^{\pi/2} |\psi(t)| dt.$$

5.4.1. On souhaiterait appliquer la question 4.5 à la fonction π -périodique $f = |\sin|$ et $a = 0$, mais les questions précédentes faisaient l'hypothèse $a > 0$. Toutefois, comme $\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt$ est ici convergente, cela ne change pas le résultat. Plus précisément, la question 4.2 montre dans un premier temps que $\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \neq 0$. En prenant $a = \pi/2$ et en utilisant l'expression asymptotique $\lambda_0 \ln x + \mathcal{O}(1)$ obtenue à la question 4.5, il vient

$$\begin{aligned} B_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin u|}{u} du + \int_{\pi/2}^{n\pi/2} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &= \text{Cste} + \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \mathcal{O}(1) = \frac{2}{\pi} \ln n + \mathcal{O}(1) \sim \frac{2}{\pi} \ln n. \end{aligned}$$

5.4.2. La question 5.3, puis l'équivalent ci-dessus donnent que

$$A_n = B_n + (A_n - B_n) = B_n + \mathcal{O}(1) \sim B_n \sim \frac{2}{\pi} \ln n.$$

Exercice 4

1. On utilise la bilinéarité de Φ et son caractère symétrique. Il vient

$$\begin{aligned} \Phi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j}, y_1\vec{i} + y_2\vec{j}) &= x_1y_1\Phi(\vec{i}, \vec{i}) + x_2y_2\Phi(\vec{j}, \vec{j}) + x_1y_2\Phi(\vec{i}, \vec{j}) + x_2y_1\Phi(\vec{j}, \vec{i}) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1) \cos \theta \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette expression matricielle peut s'avérer pratique.

2. Pour montrer que Φ est un produit scalaire, il reste à étudier $\Phi(\vec{X}, \vec{X})$.

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{X}, \vec{X}) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \cos \theta = (|x_1| - |x_2|)^2 + 2|x_1x_2|(1 \pm \cos \theta) \\ &\geq (|x_1| - |x_2|)^2 + 2|x_1x_2|(1 - |\cos \theta|) \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, $\Phi(\vec{X}, \vec{X})$ étant la somme de deux quantités positives et l'hypothèse $0 < \theta < \pi$ assurant que $|\cos \theta| < 1$, elle est nulle si, et seulement si, $|x_1| = |x_2|$ et $|x_1x_2| = 0$, donc si, et seulement si $\vec{X} = \vec{0}$. Ainsi, Φ est bien un produit scalaire sur E . (On pouvait aussi écrire plus naturellement $\Phi(\vec{X}, \vec{X}) = (x_1 + x_2 \cos \theta)^2 + (1 - \cos^2 \theta)x_2^2$).

3. Pour $\vec{X} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, on calcule

$$\begin{aligned} f(\vec{X}) &= x_1\vec{j} + x_2(-\vec{i} + 2 \cos \theta \vec{j}) = -x_2\vec{i} + (x_1 + 2 \cos \theta x_2)\vec{j} \\ \Phi(f(\vec{X}), f(\vec{X})) &= (-x_2)^2 + (x_1 + 2 \cos \theta x_2)^2 - 2x_2(x_1 + 2 \cos \theta x_2) \cos \theta \\ &= x_1^2 + (1 + 4 \cos^2 \theta - 4 \cos^2 \theta)x_2^2 + (4 - 2) \cos \theta x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \cos \theta = \Phi(\vec{X}, \vec{X}). \end{aligned}$$

4. On utilise le procédé de Gram-Schmidt en orthonormalisant la base (\vec{i}, \vec{j}) . Par hypothèse, $\Phi(\vec{i}, \vec{i}) = 1$, donc \vec{i} est bien de norme 1. On pose $\vec{k}' = \vec{j} - \Phi(\vec{i}, \vec{j})\vec{i} = \vec{j} - \cos \theta \vec{i}$. Par construction, $\Phi(\vec{i}, \vec{k}') = 0$ et l'on calcule $\Phi(\vec{j}, \vec{k}') = 1 - \cos^2 \theta > 0$. On prend alors finalement

$$\vec{k} = \frac{\vec{k}'}{\sqrt{\Phi(\vec{k}', \vec{k}')}} = \frac{\vec{k}'}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \vec{i} + \frac{1}{\sin \theta} \vec{j}.$$

5. La première colonne de la matrice C donne $f(\vec{i}) = \vec{j}$ et l'on a par ailleurs $\vec{j} = \sin \theta \vec{k} + \cos \theta \vec{i}$. Dans la base (\vec{i}, \vec{k}) , la matrice de f est donc une matrice orthogonale dont la première colonne est $(\cos \theta \quad \sin \theta)^T$ et qui est de déterminant $\det(C) = 1$. On a donc $\text{mat}_{(\vec{i}, \vec{k})}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et f est la rotation d'angle θ .

On peut aussi (mais c'est plus long) utiliser la formule de changement de base, poser $P = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta / \sin \theta \\ 0 & 1 / \sin \theta \end{pmatrix}$, calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix}$, puis

$$\text{mat}_{(\vec{i}, \vec{k})}(f) = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta / \sin \theta \\ 0 & 1 / \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

6. Si f est la rotation d'angle θ , f^m est celle d'angle $m\theta$ (pour $m \in \mathbb{N}^*$, et même pour tout $m \in \mathbb{Z}$). Ainsi, $f^m = \text{id}_E$ si, et seulement si, $m\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit, compte tenu de ce que $\theta > 0$, pour $\theta \in \left\{ \frac{2k\pi}{m}; k \in \mathbb{N}^* \right\}$.