Corrigé de la composition de Maths-A-(XLC) de l'école Polytechnique

Proposé par A. NAIMI, Professeur en classe de MP au lycée Moulay.Youssef Rabat.

Partie I

1 .

(a) - On verifie que $\dim M_2(\mathbb{C}) = 8$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont une base est :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)$$

- Soit maintenant a, b, c, d, e, f, g, h des réels et $A = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, alors

$$A \in \mathcal{L} \text{ ssi } \begin{cases} {}^tA = -\bar{A} \\ Tr(A) = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a+ib = -\left(\overline{a+ib}\right) \\ e+if = -\left(\overline{c+id}\right) \\ c+id = -\left(\overline{e+if}\right) \\ g+ih = -\left(\overline{g+ih}\right) \\ a+g+i(b+h) = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a = 0 \\ e = -c \\ f = d \\ g = 0 \\ h = -b \end{cases} \text{ ssi } A = \begin{pmatrix} ib & -e+id \\ e+id & -ib \end{pmatrix}$$

ssi $A = b.E + e.F + d.G$ ssi $A \in vect(E, F, G)$.

On conclue alors que $\mathcal{L} = vect(E, F, G)$ et comme (E, F, G) est une famille libre du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$, alors $\mathcal{L}$ est un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ de dimension 3, dont une base est (E, F, G).

(b) On vérifie que $\begin{cases} [E, F] = -2G \\ [F, G] = -2E \\ [G, E] = -2F \end{cases}$

2 .

(a) Comme $|||.|||$ est une norme d'algèbre, alors on vérifie la convergence absolue de cette série dans le banach $(M_n(\mathbb{C}), |||.|||)$.
C'est donc une série convergente.

(b) On vérifie que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right)P$.

D'autre part l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans lui même qui à $X \in M_n(\mathbb{C})$ associe $P^{-1}XP$ est continue car linéaire et son espace vectoriel de départ $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie.

Donc la suite $\left(P^{-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right)P\right)_N$ converge vers $P^{-1}\exp(A)P$.

Et par passage à la limite dans la première égalitée, on obtient l'égalitée $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P$.

(c) Notons $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & . & . & . \\ 0 & \ddots & . & . \\ \vdots & \ddots & \ddots & . \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Comme l'ensemble des matrices triangulaire supérieur de $M_n(\mathbb{C})$ est une algèbre,alors pour tout N entier naturel, la matrice $\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k$ est triangulaire supérieur de la forme

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\lambda_1^k & .. & .. & .. \\ 0 & \ddots & .. & .. \\ \vdots & \ddots & \ddots & .. \\ 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix}$$

donc par passage à la limite $(N \to +\infty)$ et compte tenue du résultat sur les suites d'un espace vectoriel de dimension finie, on obtient :

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & . & . & . \\ 0 & \ddots & . & . \\ \vdots & \ddots & \ddots & . \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(d) Soit A dans $M_n(\mathbb{C})$.
Comme toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, alors A l'est aussi, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & . & . & . \\ 0 & \ddots & . & . \\ \vdots & \ddots & \ddots & . \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ tels que $A = P^{-1}TP$,
et d'après le **2.b)** : $\exp(A) = P^{-1}\exp(T)P$.

Donc $\det(\exp(A)) = \det(\exp(T))$,or d'aprè le **2c),** $\exp(T)$ est de la forme $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & . & . & . \\ 0 & \ddots & . & . \\ \vdots & \ddots & \ddots & . \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
et est donc de déterminant
$\prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) = \exp(Tr(T))$ et $Tr(T) = Tr(A)$ puisque les deux matrices T et A sont semblable;
D'où $\det(\exp(A)) = \exp(Tr(A))$.

Partie II

3. On a besoin du petit résultat suivant : Si $M \in GL_2(\mathbb{C})$ alors $\overline{M} \in GL_2(\mathbb{C})$ et $\left(\overline{M}\right)^{-1} = \overline{M^{-1}}$.
Puisque $\overline{M}.\overline{M^{-1}} = \overline{M.M^{-1}} = \overline{I_2} = I_2$.
- D'abord $U(2,\mathbb{C}) \subset GL_2(\mathbb{C})$.
En effet, si $A \in U(2,\mathbb{C})$, alors ${}^tA.\bar{A} = I_2$ et comme ${}^tA$ et $\bar{A}$ sont toutes les deux carrées, alors elle sont inversible et l'inverse de l'une est l'autre ; donc ${}^tA$ est inversible, donc A aussi.donc $A \in GL_2(\mathbb{C})$.
D'où l'inclusion.
- $U(2,\mathbb{C})$ est non vide car contient I_2.
- Soient maintenant A, B éléments de $U(2,\mathbb{C})$, alors

$$\begin{aligned} {}^t\left(AB^{-1}\right)\left(\overline{AB^{-1}}\right) &= {}^t\left(B^{-1}\right).{}^tA.\bar{A}.\overline{(B^{-1})} \\ &= {}^t\left(B^{-1}\right)\overline{(B^{-1})} \text{ car } A \in U(2,\mathbb{C}) \\ &= \left({}^tB\right)^{-1}.\left(\overline{B}\right)^{-1} \text{ d'après le résultat ci dessus et les propriétées de la transposition.} \\ &= \left(\overline{B}.{}^tB\right)^{-1} \end{aligned}$$

Or $B \in U(2,\mathbb{C})$, donc ${}^tB.\overline{B} = I_2$ et comme tout à l'heure l'inverse de ${}^tB$ est $\overline{B}$ donc $\overline{B}.{}^tB = I_2$.
D'où ${}^t\left(AB^{-1}\right)\left(\overline{AB^{-1}}\right) = I_2$ et par suite $AB^{-1} \in U(2,\mathbb{C})$.
On conclut alors que $U(2,\mathbb{C})$ est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.
* D'autre part l'application det définie un morphisme de groupe du groupe $GL_2(\mathbb{C})$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$donc son noyau est un sous groupe du groupe $GL_2(\mathbb{C})$ et $SU(2,\mathbb{C})$ est l'intersection de ce noyau avec $U(2,\mathbb{C})$; c'est donc un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$, alors $\begin{cases} {}^tA.\overline{A} = I_2 \\ \det A = 1 \end{cases}$, donc $\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = 1 \\ |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{b} + c\bar{d} = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$.
La troisième égalitée est équivalente à $(a,c) \in \{(b,d)\}^{\perp}$ dans l'espace hermitien $\mathbb{C}^2$ muni de son produit scalaire usuel.

Mais $\{(b,d)\}^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ de dimension 1 et on remarque qu'il contient le vecteur $\left(\overline{d}, -\overline{b}\right)$.

Donc $\{(b,d)\}^{\perp} = \mathbb{C}.\left(\overline{d}, -\overline{b}\right)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\left\{ \begin{array}{c} a = \lambda\overline{d} \\ c = -\lambda\overline{b} \end{array} \right.$, donc $ad - bc = \lambda\left(|b|^2 + |d|^2\right)$

Or d'après ce qui précède $ad - bc = |b|^2 + |d|^2 = 1$, donc $\lambda = 1$ et par suite $\left\{ \begin{array}{c} a = \overline{d} \\ c = -\overline{b} \end{array} \right\}$.

Donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$ puisque d'une part $a = \overline{d}$ et d'autre part d'après les relations ci dessus $|b|^2 + |d|^2 = 1$.

Réciproquement, par un calcul simple on vérifie que toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec a, b des complexes tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ est dans $SU(2, \mathbb{C})$.
D'où le résultat.

5 .

(a) Comme $MX = \lambda X$, alors $||MX||_2^2 = |\lambda|^2\,||X||_2^2$ ou encore ${}^t\left(\overline{MX}\right)(MX) = |\lambda|^2 .{}^t\left(\overline{X}\right)(X)$.
Or ${}^t\left(\overline{MX}\right)(MX) = {}^t\,\overline{X}.{}^t\overline{M}MX$ et puisque $M \in SU(2, \mathbb{C})$, alors ${}^tM\overline{M} = I_2$ donc ${}^t\overline{M}M = \overline{I_2} = I_2$.
Donc ${}^t\left(\overline{MX}\right)(MX) = {}^t\left(\overline{X}\right)(X)$ et l'égalitée précédente devient ${}^t\left(\overline{X}\right)(X) = |\lambda|^2 .{}^t\left(\overline{X}\right)(X)$ ou encore $||X||_2^2 = |\lambda|^2\,||X||_2^2$ et $||X||_2 \neq 0$ puisque $X \neq 0$, d'où $|\lambda|^2 = 1$ et par suite $|\lambda| = 1$.

(b) ${}^tX.\overline{M}.\overline{Y}. = {}^t\left({}^t\overline{M}X\right).\overline{Y}$.
$= {}^t\left(M^{-1}X\right).\overline{Y}$ car $M \in SU(2, \mathbb{C})$.
$= {}^t\left(\frac{1}{\lambda}X\right).\overline{Y}$ car $MX = \lambda X$ et $\lambda \neq 0$.
$= \frac{1}{\lambda}.{}^tX.\overline{Y}$
$= 0$ par hypothèse.
D'où ${}^tX.\overline{M}.\overline{Y}. = 0$.

6 .

(a) Soit A un élément de $SU(2, \mathbb{C})$, alors d'après le résultat de la question **4.** , ils existent a, b complexe tels que :
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.(*).
le polynôme caracteristique χ_A de la matrice A vaut donc $X^2 - 2\alpha X + 1$ où $\alpha = \text{Re}(a)$.
Remarquer que $|\alpha| \leq |a| \leq 1$.
- Si $\alpha = 1$, alors compte tenue de l'égalitée (*) : $a = \alpha$ et $b = 0$ et donc $A = I_2$.
Donc $A = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}P$ avec $P = I_2 \in SU(2, \mathbb{C})$ et $\theta = 0$.
- Si $\alpha = -1$, alors pareille comme dans le cas précédent $A = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}P$ avec $P = I_2 \in SU(2, \mathbb{C})$ et $\theta = \pi$.
- Supposons $\alpha \notin \{-1, 1\}$, alors χ_A admet deux racines complexes conjugué chacun de module 1 et distinctes à savoir :
$\alpha + i\sqrt{1-\alpha^2}$ et $\alpha - i\sqrt{1-\alpha^2}$. Soit θ un argument du complexe $\alpha + i\sqrt{1-\alpha^2}$, de telle sorte que $\alpha + i\sqrt{1-\alpha^2} = e^{i\theta}$.
La matrice A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et admet $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ comme valeurs propres, reste à chercher une base de vecteurs propres.
Soit alors X et Y des vecteurs propre de la matrice A associé respectivement aux valeurs propre $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.
Quitte à diviser par $||X||_2$ et $||Y||_2$, on peut supposer X et Y unitaires au sens de la norme $||.||_2$.
Montrons maintenant qu'ils sont orthogonaux dans le hermitien $\mathbb{C}^2$.
On a d'une part ${}^tX.\overline{A}.\overline{Y} = {}^t\,X.\overline{AY} = {}^t\,X.\overline{e^{-i\theta}Y} = e^{i\theta}.{}^tX.\overline{Y}$.

D'autre part,

$${}^{t}X.\overline{A}.\overline{Y} = {}^{t}X.{}^{t}\left(A^{-1}\right)\overline{Y} \text{ car } A \text{ etant dans } SU\left(2,\mathbb{C}\right), \text{ donc } \overline{A} = {}^{t}\left(A^{-1}\right)$$
$$= {}^{t}\left(A^{-1}X\right).\overline{Y}$$
$$= {}^{t}\left(e^{-i\theta}X\right).\overline{Y} \text{ car } AX = e^{i\theta}X.$$
$$= e^{-i\theta}.{}^{t}X.\overline{Y}$$

On a donc $e^{i\theta}.{}^{t}X.\overline{Y} = e^{-i\theta}.{}^{t}X.\overline{Y}$ donc $\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).{}^{t}X.\overline{Y} = 0$ et comme $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$, alors ${}^{t}X.\overline{Y} = 0$.
Et si on note par Q la matrice carrée complexe d'ordre 2 dont les colonnes sont X et Y, alors $A = P^{-1}.D.P$ où $D = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ et $P = Q^{-1}$.

On a ${}^{t}Q.\overline{Q} = \begin{pmatrix} ||X||_2^2 & {}^{t}X.\overline{Y} \\ {}^{t}Y.\overline{X} & ||Y||_2^2 \end{pmatrix}$, donc ${}^{t}Q.\overline{Q} = I_2$, par suite $Q \in SU\left(2,\mathbb{C}\right)$ et comme ce dernier est un groupe alors $P = Q^{-1} \in SU\left(2,\mathbb{C}\right)$.

On a donc montré que toute matrice de $SU\left(2,\mathbb{C}\right)$ s'écrit sous la forme $P^{-1}.\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.P$ avec $P \in SU\left(2,\mathbb{C}\right)$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Le sens réciproque est immediat puisque deux matrices semblables ont même trace.
Soient maintenant $R, S \in SU\left(2,\mathbb{C}\right)$ tels que $Tr\left(R\right) = Tr\left(S\right)$.
D'après le résultat de la question **6.a.**, ils existent $P, Q \in SU\left(2,\mathbb{C}\right)$ et θ, φ réels tels que

$$\begin{cases} R = P^{-1}.\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.P \\ S = Q^{-1}.\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}.Q \end{cases}$$

donc $\begin{cases} Tr\left(R\right) = 2\cos\theta \\ Tr\left(S\right) = 2\cos\varphi \end{cases}$ et comme $Tr\left(R\right) = Tr\left(S\right)$, alors $\theta = \varphi \ [2\pi]$ ou $\theta = -\varphi \ [2\pi]$.

- Supposons $\theta = \varphi \ [2\pi]$, alors $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ et $R = P^{-1}.\left(QSQ^{-1}\right).P = T^{-1}ST$ où on a posé $T = Q^{-1}P$.
Et cette dernière matrice est dans $SU\left(2,\mathbb{C}\right)$ puisque ce dernier est un groupe et contient P et Q.

- Supposons $\theta = -\varphi \ [2\pi]$, alors $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$
Par aileur un calcul simple montre que

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a donc } R = P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.P$$
$$= P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.P$$
$$= P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left(QSQ^{-1}\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.P$$
$$= T^{-1}S.T \text{ où on a posé } T = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.P.$$

Et les trois matrices $Q^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P$ sont dans le groupe $SU\left(2,\mathbb{C}\right)$ donc leur produit $T = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.P \in SU\left(2,\mathbb{C}\right)$.
Donc $R = T^{-1}S.T$ et $T \in SU\left(2,\mathbb{C}\right)$. D'où le résultat.

7 .

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons $\Delta_n(A,B) = \left|\left|\left| \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(A+B)^k - \left(\sum\limits_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}A^p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{n} \frac{1}{q!}B^q\right) \right|\right|\right|$.

Comme $[A,B]=0$, alors A et B commutent donc par application de la formule de binôme :

$\Delta_n(A,B) = \left|\left|\left| \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum\limits_{r=0}^{k} C_k^r A^r B^{k-r} - \left(\sum\limits_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}A^p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{n} \frac{1}{q!}B^q\right) \right|\right|\right|$.

Or $\left(\sum\limits_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}A^p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{n} \frac{1}{q!}B^q\right) = \sum\limits_{0\le p,q\le n} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}A^pB^q$. et $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\sum\limits_{p+q=k} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}A^pB^q\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\sum\limits_{r=0}^{k} C_k^r A^r B^{k-r}$

Donc $\Delta_n(A,B) = \left|\left|\left| \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\sum\limits_{p+q=k} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}A^pB^q\right) - \sum\limits_{0\le p,q\le n} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}A^pB^q \right|\right|\right|$

$= \left|\left|\left| \sum\limits_{p+q\le n} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}A^pB^q - \sum\limits_{0\le p,q\le n} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}A^pB^q \right|\right|\right|$

$= \left|\left|\left| \sum\limits_{(p,q)\in I\setminus J} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}A^pB^q \right|\right|\right|$ où on a posé $I = \{0,...,n\}^2$ et $J = \left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \ / \ p+q\le n\right\}$.

Et par application de l'inégalitée triangulaire et compte tenue du fait que $|||.|||$ est une norme d'algèbre, il vient :

$\Delta_n(A,B) \le \sum\limits_{(p,q)\in I\setminus J} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}|||A|||^p\,|||B|||^q$.

Mais en reprenant des calculs analogues aux précédents, on obtient aussi :

$\sum\limits_{(p,q)\in I\setminus J} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}|||A|||^p\,|||B|||^q = \left(\sum\limits_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}|||A|||^p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{n} \frac{1}{q!}|||B|||^q\right) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(|||A|||+|||B|||\right)^k$.

On a donc $0 \le \Delta_n(A,B) \le \left(\sum\limits_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}|||A|||^p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{n} \frac{1}{q!}|||B|||^q\right) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(|||A|||+|||B|||\right)^k$ pour tout n entier naturel.

Mais la suite de terme géneral $\left(\sum\limits_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}|||A|||^p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{n} \frac{1}{q!}|||B|||^q\right) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(|||A|||+|||B|||\right)^k$ converge vers $\exp(|||A|||)\exp(|||B|||) - \exp(|||A|||+|||B|||)$ et ce dernier terme est nul.

Donc la suite $(\Delta_n(A,B))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

D'autre part, par définition de l'exponentille d'une matrice et par continuité de la norme $|||.|||$ et du produit matricielle dans $M_2(\mathbb{C})$, la suite $(\Delta_n(A,B))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|||\exp(A+B) - \exp A.\exp B|||$.

D'où l'égalitée $\exp(A+B) = \exp A.\exp B$.

(b) Par continuité sur $M_2(\mathbb{C})$ des applications $A \to^t A$ et $A \to \overline{A}$, on montre que si $A \in M_2(\mathbb{C})$, alors :

${}^t(\exp(A)) = \exp({}^tA)$ et $\overline{\exp(A)} = \exp(\overline{A})$.

Soit maintenant $A \in \mathcal{L}$, alors ${}^t(\exp(A))\,.\overline{\exp(A)} = \exp({}^tA)\,.\exp(\overline{A})$.

Mais comme $A \in \mathcal{L}$, alors ${}^tA + \overline{A} = 0$, donc ${}^tA = -\overline{A}$, par suite ${}^tA$ et $\overline{A}$ commutent et d'après le résultat du **7.a**:

$$\exp({}^tA)\,.\exp(\overline{A}) = \exp({}^tA+\overline{A})\,.$$

On a donc ${}^t(\exp(A))\,.\overline{\exp(A)} = \exp({}^tA+\overline{A})$ et comme $A \in \mathcal{L}$, alors ${}^tA+\overline{A} = 0$, donc $\exp({}^tA+\overline{A}) = I_2$.

D'où ${}^t(\exp(A))\,.\overline{\exp(A)} = I_2$.

D'autre part, d'après le résultat du **2.d**, $\det(\exp(A)) = \exp(Tr(A))$ et $Tr(A) = 0$ puisque $A \in \mathcal{L}$.

Donc $\det(\exp(A)) = 1$.

On conclut alors que $\exp(A) \in SU(2,\mathbb{C})$ et par suite l'image de $\mathcal{L}$ par l'apllication exp est contenue dans $SU(2,\mathbb{C})$.

(c) Soit $A \in SU(2,\mathbb{C})$,alors d'après le résultat du **6.a,** $\exists P \in SU(2,\mathbb{C})$ et $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}P$.

En posant $M = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}$ et en utlisant le **2.b**, on montre que $A = \exp\left(P^{-1}MP\right)$.

Reste à vérifier que la matrice $P^{-1}MP \in \mathcal{L}$.

En effet, ${}^t\left(P^{-1}MP\right) + \overline{P^{-1}MP} = {}^tP.M.{}^tP^{-1} + \overline{P^{-1}}\,\overline{MP} = .{}^tP.M.{}^tP^{-1} + \left(\overline{P}\right)^{-1}\overline{MP}$ car la matrice M est symetrique.

Or $P \in SU(2, \mathbb{C})$ donc ${}^tP.\overline{P} = I_2$ donc $\begin{cases} \left(\overline{P}\right)^{-1} = {}^tP \\ {}^tP^{-1} = \overline{P} \end{cases}$.

Donc ${}^t\left(P^{-1}MP\right) + \overline{P^{-1}MP} = .{}^tP\left(M + \overline{M}\right)\overline{P}$ et $M + \overline{M} = 0$, d'où ${}^t\left(P^{-1}MP\right) + \overline{P^{-1}MP} = 0$.

D'autre part $Tr\left(P^{-1}MP\right) = Tr(M)$ et $Tr(M) = 0$, donc $Tr\left(P^{-1}MP\right) = 0$.

On conclue alors que $P^{-1}MP \in \mathcal{L}$ et par suite $A = \exp\left(P^{-1}MP\right) \in \exp(\mathcal{L})$. D'où la surjection.

(d) Non puisque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{pmatrix}$ sont des éléments distincts de $\mathcal{L}$ et leur exponentielle est le même : c'est I_2.

8 .

(a) Soit $A \in G\backslash\{I_2, -I_2\}$, alors d'après le **6.a** , $\exists P \in SU(2, \mathbb{C})$ et $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}P$ et comme $A \notin \{I_2, -I_2\}$, alors $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

D'autre part en posant $Q = P^{-1}$, alors $Q \in SU(2, \mathbb{C})$ puisque $SU(2, \mathbb{C})$ est un groupe contenant P et on a $\begin{cases} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ \\ Q \in SU(2, \mathbb{C}) \\ A \in G \end{cases}$ donc par hypothèse faite sur le groupe G, l'élément $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in G$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D'où le résultat.

(b) On vérifie que les coefficients diagonaux de cette matrice sont : $|a|^2 + \left(1 - |a|^2\right)e^{-2i\theta}$ et $|a|^2 + \left(1 - |a|^2\right)e^{2i\theta}$.

(c) Soit $a \in [0, 1]$.et posons $b = \sqrt{1 - a^2}$. On a alors $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$, et par suite la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in SU(2, \mathbb{C})$ et comme $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in G$, alors par hypothèse faite sur le groupe G, l'élément $A\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}A^{-1} \in G$.

D'autre part, $\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}^{-1} \in G$ puisque G est un groupe contenant l'élément $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$;

et toujours puisque G est un groupe alors il contient l'élément $A\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}A^{-1}.\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$, donc sa trace est dans $\underset{g\in G}{\cup}\{Tr(g)\}$ qui vaut d'après le **b.:** $|a|^2 + \left(1 - |a|^2\right)e^{-2i\theta} + |a|^2 + \left(1 - |a|^2\right)e^{2i\theta}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} |a|^2 + \left(1 - |a|^2\right)e^{-2i\theta} + |a|^2 + \left(1 - |a|^2\right)e^{2i\theta} &= 2|a|^2 + 2\left(1 - |a|^2\right)\cos(2\theta) \\ &= 2\cos(2\theta) + 4|a|^2(\sin\theta)^2 \in \underset{g\in G}{\cup}\{Tr(g)\} \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $a \in [0, 1]$,, $2\cos(2\theta) + 4a^2(\sin\theta)^2 \in \underset{g\in G}{\cup}\{Tr(g)\}$.

Donc l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par l'application : $a \to 2\cos(2\theta) + 4a^2(\sin\theta)^2$ qui vaut $[2\cos(\theta), 2]$ est contenue dans $\underset{g\in G}{\cup}\{Tr(g)\}$. et en posant $\delta = 2(1 - \cos(\theta))$, alors $\delta > 0$ puisque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et $[2 - \delta, 2] \subset \underset{g\in G}{\cup}\{Tr(g)\}$. D'où le résultat.

9. Soit $M \in SU(2,\mathbb{C})$.

D'après le **6.a,** il existe $P \in SU(2,\mathbb{C})$ et il existe $\varphi \in \mathbb{R}$.tels que $M = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} P$.

D'autre part, puisque la suite $\left(2\cos\left(\frac{\varphi}{k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$converge vers $2 \rangle 2-\delta, a$, alors il existe q entier naturel non nul tel que

$2\cos\left(\frac{\varphi}{q}\right) \rangle 2-\delta$.

donc $Tr\left(\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{q}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{q}} \end{pmatrix}\right) = 2\cos\left(\frac{\varphi}{q}\right) \in [2-\delta, 2]$, or $[2-\delta,2] \subset \bigcup_{g\in G}\{Tr(g)\}$.

Donc $\exists g \in G$ tel que $Tr\left(\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{q}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{q}} \end{pmatrix}\right) = Tr(g)$ et les deux éléments $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{q}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{q}} \end{pmatrix}$ et g sont dans $SU(2,\mathbb{C})$

(Le premier c'est la question **4** et pour le second c'est parceque $g \in G$ et G sous groupe de $SU(2,\mathbb{C})$)

Donc d'après la question **6.b** ils existe $Q \in SU(2,\mathbb{C})$ tel que $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{q}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{q}} \end{pmatrix} = Q^{-1}gQ$, alors par hypothèse faite sur G, l'élément $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{q}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{q}} \end{pmatrix} = Q^{-1}gQ \in G$ et puisque G est un groupe, alors $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{q}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{q}} \end{pmatrix}\right)^q \in G$.

Donc par hypothèse faite sur G, l'élément $M = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} P \in G$.

D'où l'égalitée $G = SU(2,\mathbb{C})$.

Partie III

10. On vérifie que l'on a : $\begin{cases} e\circ z - z\circ e = 2iz \\ e\circ w - w\circ e = -2iw \\ z\circ w - w\circ z = 4ie \end{cases}$.

11. Raisonnons par récurrence.

- On a $e\left(z^0(v)\right) = e(v) = \lambda v$,donc $e\left(z^0(v)\right) = \mu_0 z^0(v)$.

D'où le résultat pour $k=0$

- Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $e\left(z^k(v)\right) = \mu_k z^k(v)$, alors en composant la première égalitée cidessus par z^k,

puis par le vecteur v il vient $\left(e\circ z^{k+1}\right)(v) - \left(z\circ e\circ z^k\right)(v) = 2iz^{k+1}(v)$.

Donc $e\left(z^{k+1}(v)\right) = (2i+\mu_k)\, z^{k+1}(v)$, donc $e\left(z^{k+1}(v)\right) = \mu_{k+1}z^{k+1}(v)$, où on a posé $\mu_{k+1} = 2i+\mu_k$.

D'où le résultat pour $k+1$.

On conclue alors que pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $e\left(z^k(v)\right) = \mu_k z^k(v)$ et les μ_k sont deux à deux distincts

12. Notons $I = \left\{k \in \mathbb{N} \mid z^k(v) \neq 0\right\}$.

D'après ce qui précèdède, pour tout $k \in I$, $z^k(v)$ est un vecteur propre de e.

Donc la famille $\left(z^k(v)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de vecteurs propres de e associés à des valeurs propres distincts, donc libre et étant une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie, alors elle est finie et donc I est fini et comme c'est une partie finie de $\mathbb{N}$ et non vide ca contient $z^0(v) = v \neq 0$ (v est un vecteur propre de e), alors I possède un plus grand élément p.

On a donc $z^p(v) \neq 0$ et $z^{p+1}(v) = 0$. En notant $v_0 = z^p(v)$, alors v_0 est un vecteur propre de e et $z(v_0) = 0$.

D'où le résultat.

13. Remarquons d'abord que l'on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $v_{k+1} = w(v_k)$.

Montrons maintenant par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)\, v_k$.

- Comme $e(v_0) = \lambda_0.v_0$, alors l'égalitée est vérifiée pour $k=0$.

- Soit $k\in\mathbb{N}$ et supposons $e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)\, v_k$.

D'après le résultat de la question **10,** on a : $e \circ w - w \circ e = -2iw$ et en composant cette égalitée à droite par w^k puis par le vecteur
v_0, on obtient :
$e\left(w^{k+1}(v_0)\right) - w\left(e\left(w^k(v_0)\right)\right) = -2iw^{k+1}(v_0)$ donc $e(v_{k+1}) - w(e(v_k)) = -2iv_{k+1}$ et en tenant compte de l'hypothèse de récurrence,
il vient : $e(v_{k+1}) - w((\lambda_0 - 2ik)v_k) = -2iv_{k+1}$ ou encore .$e(v_{k+1}) - (\lambda_0 - 2ik)v_{k+1} = -2iv_{k+1}$ ou encore $e(v_{k+1}) = (\lambda_0 - 2i(k+1))v_{k+1}$.
D'où l'égalitée pour $k+1$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, :

$$e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)v_k$$

Remarquons que les complexes $\lambda_0 - 2ik$ sont deux à deux distincts.
De la même manière et en utilisant la troisième égalitée du résultat de la question **10**., on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, :

$$z(v_k) = 4k(i\lambda_0 + k - 1)v_{k-1}$$

14. (a) Notons $J = \{k \in \mathbb{N} \mid . (v_0, ..., v_k) \text{ est libre}\}$.
Alors J est une partie de $\mathbb{N}$ non vide car contient 0 ($v_0 \neq 0$ car c'est un vecteur propre de e) et majorée par $\dim \mathcal{E} - 1$, elle admet donc un plus grand élément n.
On a donc $(v_0, ..., v_n)$ est libre et $(v_0, ..., v_{n+1})$ liée, donc $v_{n+1} = 0$ car sinon et d'après le résultat de la question **13.** $(v_0, ..., v_{n+1})$ serait une famille de vecteurs propres de e associés aux valeurs propres $(\lambda_0 - 2ik)_{0 \leq k \leq n}$ qui sont distictes deux à deux, donc libre !
On a donc $(v_0, ..., v_n)$ est libre et $v_{n+1} = 0$.
(b) D'après le résultat de la question **13.,** on a $z(v_{n+1}) = 4(n+1)(i\lambda_0 + n)v_n$ et comme $v_{n+1} = 0$ et $v_n \neq 0$, alors $\lambda_0 = in$ et donc toujours par le **13.,** on obtient $\left\{\begin{array}{c} e(v_k) = i(n-2k)v_k \\ z(v_k) = -4k(n-k+1)v_{k-1} \end{array}\right.$
pour tout k.
En particulier $\left\{\begin{array}{c} e(v_n) = -inv_n \\ z(v_n) = -4nv_{n-1} \end{array}\right.$.
D'autre part, puisque $e(v_0) = \lambda_0 v_0$, alors $e(v_0) = inv_0$.
Les autres relations sont immediates.

FIN