CCP 2004 - COMPOSITION de MATHÉMATIQUES II - Série MP

(Jean-Pierre Roudneff, lycée Louis-le-Grand)

Préliminaires

1. Avec les notations de l'énoncé, la k-ième composante de MX vaut $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}x_j$ donc, pour tout $k \in [\![1,\, n]\!]$, $|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}x_j| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|\ \| X \|_\infty \leqslant \| M \| \| X \|_\infty$, ce qui prouve l'inégalité $\| MX \|_\infty \leqslant \| M \| \| X \|_\infty$.

2.a) Pour tous $M = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k B_k$ et $M' = \sum\limits_{k=1}^{d} x'_k B_k$ de $\mathcal{M}$ et tout λ réel,
– $\mathcal{N}(\lambda M) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant d} |\lambda x_k| = |\lambda| \max\limits_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k| = |\lambda| \mathcal{N}(M)$;
– $\forall k \in [\![1,\, d]\!]$, $|x_k + x'_k| \leqslant |x_k| + |x'_k| \leqslant \mathcal{N}(M) + \mathcal{N}(M')$ donc $\mathcal{N}(M+M') \leqslant \mathcal{N}(M) + \mathcal{N}(M')$ par définition d'un "max";
– $\mathcal{N}(M) = 0$ ssi $\forall k \in [\![1,\, d]\!]$, $x_k = 0$ ssi $M = 0$ vu que β est une base de $\mathcal{M}$.
L'application (à valeurs positives) $\mathcal{N}$ est donc une norme sur $\mathcal{M}$.

2.b) L'équivalence des normes dans un espace vectoriel réel de dimension finie justifie instantanément l'existence des constantes strictement positives a et b.

2.c) La notion de convergence ne dépendant pas de la norme choisie (de par l'équivalence des normes), la suite $\big(\| M_p \|\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ssi la suite $\big(\mathcal{N}(M_p)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ssi chaque suite $\big(x_p(k)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Partie I

3.a) La formule de Taylor avec reste intégral $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\ell-1} \dfrac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(x-\lambda)^k + \displaystyle\int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u)\,\mathrm{d}u$ donne l'identité demandée en tenant compte du fait que les ℓ premières dérivées de f s'annulent en λ.

3.b) En effectuant le changement de variable affine défini par $u = x + t(\lambda - x)$, on obtient :

$$f(x) = -(x-\lambda)^\ell \int_0^1 \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(x + t(x-\lambda))\,\mathrm{d}t.$$

La fonction h définie par $h(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(x+t(x-\lambda))\,\mathrm{d}t$ s'écrit $\displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$, où g est, par produit et composition, une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $I \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
En appliquant le théorème de dérivation sous le signe somme (dans le cas de l'intégrale sur un segment), h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I$, $h'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.
En fait, toujours par composition, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times [0,1]$ et le théorème précédent employé de façon itérée montre que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

4.a) Pour tout $j \in [\![1,\, r]\!]$ et tout $k \in [\![0,\, m_j - 1]\!]$, la formule de Leibniz donne

$$f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j) + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} h^{(k-p)}(\lambda_j) \Pi_A^{(p)}(\lambda_j).$$

Or $\forall p \leqslant m_j - 1$, $\Pi_A^{(p)}(\lambda_j) = 0$ donc $\forall j \in [\![1,\, r]\!]$, $\forall k \in [\![0,\, m_j - 1]\!]$, $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$ et on a bien $f \underset{A}{\equiv} g$.

4.b) Pour tout $j \in [\![1,\, r]\!]$, définissons $P_j(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X-\lambda_j)^{m_j}$ et prouvons par récurrence finie sur j la propriété
(H_j) : il existe $h_j \in \mathcal{C}_I^\infty$ telle que $\forall x \in I$, $f(x) - g(x) = P_j(x) h_j(x)$.

– (H_1) est vraie d'après le **3.b)**.

– Supposons (H_{j-1}) vraie (avec $2 \leqslant j \leqslant r$) et prouvons (H_j). Pour cela, appliquons à nouveau la formule de Leibniz au produit $h_{j-1} = (f-g) \times \dfrac{1}{P_{j-1}}$: comme $(f-g)^{(k)}(\lambda_j) = 0$ pour tout $k \in [0, m_j - 1]$, il vient $\forall k \in [0, m_j-1]$, $h_{j-1}^{(k)}(\lambda_j) = 0$. En appliquant la question **3.b)**, il existe $h_j \in \mathcal{C}_I^\infty$ telle que $\forall x \in I$, $h_{j-1}(x) = (x-\lambda_j)^{m_j} h_j(x)$, et (H_j) en résulte.

Ceci achève le raisonnement.

5. (2) $\Longrightarrow$ (1) résulte directement de la question **4.a)**.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Observons que la condition $P \underset{A}{\equiv} Q$ signifie que, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, le réel λ_j est racine de $P-Q$ avec un ordre de multiplicité au moins m_j : le polynôme $P-Q$ est donc divisible par $(X-\lambda_j)^{m_j}$. Les polynômes $(X-\lambda_j)^{m_j}$ étant deux à deux premiers entre eux étant donné que les λ_j sont distincts, $P-Q$ est divisible par leur produit, c'est-à-dire par Π_A.

Partie II

6. L'application φ est clairement linéaire. Elle est de plus injective : en effet, l'égalité $\varphi(P) = \varphi(Q)$ signifie $P \underset{A}{\equiv} Q$ donc $P-Q$ est divisible par Π_A d'après **5.**, d'où $P = Q$ étant donné que $\deg P - Q \leqslant m-1$ et $\deg \Pi_A = m$.

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ et $\mathbb{R}^m$ ayant la même dimension finie, le caractère bijectif de φ en résulte.

7. L'existence et l'unicité de P_f sont dues à la bijectivité de φ : il existe un élément de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ et un seul tel que $\varphi(P_f) = \Big(\big(P^{(k_1)}(\lambda_1)\big)_{0 \leqslant k_1 \leqslant m_1 - 1}, \ldots, \big(P^{(k_r)}(\lambda_r)\big)_{0 \leqslant k_r \leqslant m_r - 1}\Big)$.

8. Par division euclidienne, il existe deux polynômes Q et R tels que $f = Q\Pi_A + R$ et $\deg R \leqslant m-1$. On a alors $f \underset{A}{\equiv} R$, d'où $P_f = R$ pour une question de degré. En substituant A à l'indéterminée X, on en tire $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k = 0 + P_f(A)$ par définition du polynôme minimal, donc $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$.

9.a) Le polynôme caractéristique de A est ici $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal de A divise $(X-1)^2$, mais comme $(X-1)$ n'annule pas A, on conclut que $\Pi_A(X) = (X-1)^2$.

9.b) (1) : si $f(x) = ax+b$, on a directement $f(A) = aA + bI_2$ d'après le **8.**.

(2) : si $f(x) = \sin \pi x$, alors P_f est l'unique polynôme de degré au plus 1 tel que $P_f(1) = 0$ et $P_f'(1) = -\pi$; on vérifie que $P_f(X) = \pi(1-X)$ convient, d'où $f(A) = \pi(I_2 - A)$.

(3) : si $f(x)$ s'écrit $(x-1)^2 g(x)$, alors $f(A) = 0$ vu que l'unique polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que $P_f(1) = P_f'(1) = 0$ est le polynôme nul.

Partie III

10. Par propriété d'isomorphisme de φ, il existe un (unique) polynôme $Q_{j,k}$ tel que $Q_{j,k}^{(k)}(\lambda_j) = 1$ et, pour tous $\ell \in [\![0, m_j - 1]\!]$ avec $\ell \neq k$, $Q_{j,k}^{(\ell)}(\lambda_i) = 0$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}_I^\infty$, le polynôme $\sum\limits_{j=1}^{r} \sum\limits_{k=0}^{m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}$ est de degré au plus m et coïncide avec f sur le spectre de A, donc est égal à P_f.

Soit une seconde famille de polynômes $\widehat{Q}_{j,k}$ répondant à la question. En prenant pour f le polynôme $Q_{j,k}$, on obtient alors $f = P_f = 1.\widehat{Q}_{j,k} + 0$, ce qui établit bien l'unicité.

11.– Si la famille des $Z_{j,k}$ était liée, il existerait des réels $\alpha_{j,k}$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{j=1}^{r} \sum\limits_{k=0}^{m_j - 1} \alpha_{j,k} Z_{j,k} = 0$. Par l'isomorphisme φ, on pourrait trouver un polynôme f, nécessairement non nul et de degré au plus m, tel que $\forall j \in [\![1, r]\!], \forall k \in [0, m_j-1]$, $f^{(k)}(\lambda_j) = \alpha_{j,k}$. Alors $f = P_f = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} Q_{j,k}$ d'où, par substitution, $f(A) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} Z_{j,k} = 0$, ce qui est impossible vu que $\deg f < m$ et $f \neq 0$.

– Pour $f \in \mathcal{C}_I^\infty$ arbitraire, l'égalité $f(A) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$ provient tout simplement des définitions $f(A) = P_f(A)$ et $Z_{j,k} = Q_{j,k}(A)$.

12.a) Le polynôme minimal de A étant $\Pi_A(X) = (X-1)^2$, on a ici $r = 1$, $m_1 = 2$ et $\lambda_1 = 1$. En appliquant la formule du **11.**, on en déduit : $\forall f \in \mathcal{C}_I^\infty$, $f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2$ en posant $Z_1 = Z_{1,1}$ et $Z_2 = Z_{1,2}$.

12.b) En choisissant $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient en particulier $I_2 = Z_1$.
De même, en prenant $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x$, on trouve $Z_1 + Z_2 = A$.
Des deux égalités, on tire que $Z_1 = I_2$ et $Z_2 = A - I_2$.

12.c) Si $\alpha > 0$, l'application $f : x \longmapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut alors appliquer la formule précédente, ce qui donne $f(A) = I_2 + \alpha(A-I_2)$.
On a ainsi $A^\alpha = \alpha A + (1-\alpha)I_2$ et en particulier $A^{2004} = 2004A - 2003I_2$ et $\sqrt{A} = \frac{1}{2}(A+I_2)$.

13.a) Le polynôme caractéristique de A étant $-X(X^2+X) = -X^2(X+1)$ (calcul facile), le polynôme Π_A, qui a les mêmes racines et qui le divise (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), est soit $X(X+1)$ soit $X^2(X+1)$. Or, on vérifie simplement que $A(A + I_3) \neq 0$: par conséquent, $\Pi_A(X) = X^2(X+1)$.
Ce polynôme n'étant pas à racines simples, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

13.b) En utilisant les notations du **10.** (avec $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$), il existe des matrices $Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{2,1}$ telles que $\forall f \in \mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty$, $f(A) = f(0)Z_{1,1} + f'(0)Z_{1,2} + f(-1)Z_{2,1}$.
Les choix successifs de $f(x) = x+1$, x et x^2 conduisent aux égalités $A + I_3 = Z_{1,1}$, $A = Z_{1,2} - Z_{2,1}$ et $A^2 = Z_{2,1}$. On en déduit :

$$Z_{1,1} = A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z_{1,2} = A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{2,1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie IV

14.a) La formule du **10.** établit immédiatement la linéarité de l'application $f \longmapsto P_f$: on a en particulier $P_{\alpha f} = \alpha P_f$ et $P_{f+g} = P_f + P_g$.

14.b) Par définition de P_f et P_g, il existe $h, k \in \mathcal{C}_I^\infty$ telles que $f = P_f + h\Pi_A$ et $g = P_g + k\Pi_A$. Le produit de ces deux égalités se mettant sous la forme $fg = P_f P_g + h_1 \Pi_A$ avec $h_1 \in \mathcal{C}_I^\infty$, on a alors $fg \underset{A}{\equiv} P_f P_g$.
La relation $\underset{A}{\equiv}$ étant clairement transitive (c'est en fait une relation d'équivalence), on obtient $P_f P_g \underset{A}{\equiv} P_{fg}$, d'où l'existence d'un polynôme $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{fg} = P_f P_g + H\Pi_A$ d'après le **5.**.

15.a) – Pour tous $f, g \in \mathcal{C}_I^\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $S(\alpha f) = P_{\alpha f}(A) = \alpha P_f(A) = \alpha S(A)$ et $S(f+g) = P_{f+g}(A) = P_f(A) + P_g(A)$.
– Pour tous $f, g \in \mathcal{C}_I^\infty$ on a $S(fg) = P_{fg}(A) = P_f(A)P_g(A) + H(A)\Pi_A(A) = P_f(A)P_g(A) = S(f)S(g)$ (avec les notations précédentes).
– Enfin, $S(1) = I_n$, où 1 désigne la fonction constante égale à 1.
L'application S est donc un morphisme d'algèbres de $(\mathcal{C}_I^\infty, +, \times, \cdot)$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$.

15.b) En utilisant ce qui précède, $f \in \operatorname{Ker} S$ ssi $f(A) = 0$ ssi $P_f(A) = 0$ ssi $P_f = 0$ ssi $f \underset{A}{\equiv} 0$.
Le noyau de f est donc l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}_I^\infty$ telles que $\forall j \in [\![1, r]\!], \forall k \in [0, m_j-1]$, $f^{(k)}(\lambda_j) = 0$, ou encore qui s'écrivent $h\Pi_A$, avec $h \in \mathcal{C}_I^\infty$ d'après le **4.b)**.

16.a) Par propriétés de morphisme, $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = (S(\cos))^2 + (S(\sin))^2 = S(\cos^2) + S(\sin^2) = S(\cos^2+\sin^2) = S(1) = I_n$.

16.b) – Si les λ_j sont strictement positifs, l'application f_1 appartient à $\mathcal{C}_I^\infty$ (avec $I = \mathbb{R}_+^*$) donc $(\sqrt{A})^2 = (S(f_1))^2 = S(f_1^2) = S(\mathrm{Id}) = A$.

– De même, $A \times \dfrac{1}{A} = S(\mathrm{Id})S(f_1) = S(1) = I_n$. La matrice $\dfrac{1}{A}$ est ainsi l'inverse à droite, donc l'inverse, de A, soit $\dfrac{1}{A} = A^{-1}$.

17. – L'application S étant un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres, son image $\mathcal{M}_A$ est déjà une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, la commutativité de l'algèbre $\mathcal{C}_I^\infty$ entraîne celle de $\mathcal{M}_A$: en effet, pour tous $f, g \in \mathcal{C}_I^\infty$, $f(A)g(A) = (fg)(A) = (gf)(A) = g(A)f(A)$.

– Enfin, comme $f(A) = P_f(A)$ avec égalité lorsque $f \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, on a $\mathcal{M}_A = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]\} = S(\mathbb{R}_{m-1}[X])$, d'où $\dim \mathcal{M}_A \leqslant m$. En ajoutant que S est injective sur $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ (par définition du polynôme minimal), on peut alors conclure que $\dim \mathcal{M}_A \leqslant m$.

18. Les racines du polynôme minimal étant les valeurs propres de A, aucun λ_j n'est nul si A est inversible. En divisant par $-\lambda_1 \dots \lambda_r$, l'égalité $\Pi_A(A) = 0$ se met alors sous la forme $\alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_m A^m = I_n$, soit encore $A \times (\alpha_1 I_n + \alpha_2 A + \cdots + \alpha_m A^{m-1}) = I_n$. Il en ressort que A possède un inverse à droite dans $\mathcal{M}_A$, si bien que $A^{-1} \in \mathcal{M}_A$.

19. (1) $\Longrightarrow$ (2) Si $f(A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle l'est dans $\mathcal{M}_A$ d'après le **18.**, donc il existe $g \in \mathcal{C}_I^\infty$ telle que $f(A)g(A) = I_n$, d'où $P_f(A)P_g(A) = I_n$. Or, selon **14.b)**, $P_{fg}(A) = P_f(A)P_g(A) = I_n$, ce qui implique $P_{fg}(X) = 1$ par unicité de ce polynôme. En reportant dans l'égalité du **14.b)**, on obtient $\forall j \in [\![1, r]\!],\ P_f(\lambda_j)P_g(\lambda_j) = 1$ donc $P_f(\lambda_j) \neq 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Réciproquement, si $\forall j \in [\![1, r]\!],\ P_f(\lambda_j) \neq 0$, alors P_f et Π_A sont premiers entre eux donc il existe deux polynômes réels U et V tels que $UP_f + V\Pi_A = 1$. Par substitution, $U(A)P_f(A) = I_n$, soit $U(A)f(A) = I_n$: la matrice $f(A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

20. Le réel λ est valeur propre de $f(A)$ si et seulement si $f(A) - \lambda I_n = (f - \lambda)(A)$ n'est pas inversible, ce qui équivaut encore, d'après **19.**, à l'existence de $j \in [\![1, r]\!]$ tel que $f(\lambda_j) = \lambda$.

On peut alors conclure que $\Lambda_{f(A)} = f(\Lambda_A)$.

Partie IV

21. La famille β des $Z_{j,k}$ forme clairement une base de $\mathcal{M}_A$. D'après le **2.a)** des Préliminaires, la suite de matrices $\big(f_p(A) - f(A)\big)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si pour tous $\forall j \in [\![1, r]\!]$ et $k \in [\![0, m_j - 1]\!]$, chaque suite $\big(f_p^{(k)}(\lambda_j) - f^{(k)}(\lambda_j)\big)_{p \in \mathbb{N}}$ de ses composantes dans la base β a une limite nulle. Ceci établit bien l'équivalence demandée.

22. Avec les notations précédentes, prenons $f : x \longmapsto e^{tx}$ et $f_p : x \longmapsto \sum\limits_{\ell=0}^{p} \dfrac{(tx)^\ell}{\ell!}$.

Comme $f_p^{(k)} = t^k f_{p-k}$ pour tous $j \in [\![1, r]\!]$ et $k \in [\![0, m_j - 1]\!]$ (avec $k \leqslant p$), la suite $\big(f_p^{(k)}(\lambda_j)\big)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $\big(f^{(k)}(\lambda_j)\big)_{p \in \mathbb{N}}$ par utilisation du développement en série entière de l'exponentielle.

La traduction du résultat du **21.** donne alors l'égalité $f_t(A) = \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} \dfrac{t^\ell}{\ell!} A^\ell$.

23. La solution générale $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ sur $I = \mathbb{R}$ du système différentiel proposé est donnée par $X(t) = \exp(tA)X_0$, soit encore $X(t) = f_t(A)X_0$, avec $X_0 = X(0)$.

D'après le **13.b)**, $f_t(A) = f_t(0)Z_{1,1} + f_t'(0)Z_{1,2} + f_t(-1)Z_{2,1} = \begin{pmatrix} 2+t & -1-t & 1+t \\ 2+t-e^{-t} & -1-t+e^{-t} & 1+t \\ 2-e^{-t} & -1+e^{-t} & 1 \end{pmatrix}$, ce qui conduit à l'expression de $X(t)$ en fonction de la condition initiale $X(0)$.