CONCOURS MINES-PONTS

CORRIGÉ MATHÉMATIQUES II - MP

m.laamoum@gmail.com

Fonctions de matrices symétriques, continuité et convexité

Matrices de permutations

1 ▷ L'application ω associe à une permutation $\sigma \in \mathcal{B}_n$ la matrice $\omega(\sigma) = (\delta_{i,\sigma(j)})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$.
Soit $i, j \in [\![1, n]\!]^2$, on a $[\omega(\sigma)\omega(\sigma')]_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)}$, $\delta_{k,\sigma'(j)} = 0$ pour $k \neq \sigma'(j)$ donc

$$[\omega(\sigma)\omega(\sigma')]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))} = [\omega(\sigma \circ \sigma')]_{i,j}$$

2 ▷ Soit $\sigma \in \mathcal{B}_n$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de $\omega(\sigma)$ est $C_j = \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma(j)} \\ \vdots \\ \delta_{n,\sigma(j)} \end{pmatrix}$ c'est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tout les termes sont nuls sauf celui d'indice $\sigma(j)$, c'est le $\sigma(j)$-ème vecteur de la base canonique, $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$, de $\mathbb{R}^n$; $C_j = \varepsilon_{\sigma(j)}$. Donc $(C_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, pour le produit scalaire usuel. Ainsi $\omega(\sigma) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\omega(\mathcal{B}_n) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3 ▷ Soit $\sigma \in \mathcal{B}_n$ et $(d_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\mathrm{Diag}\left((d_i)_{1\leq i\leq n}\right) = (d_i\delta_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Diag}\left((d_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}\right) = (d_{\sigma(i)}\delta_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} .$$

Posons $M = \mathrm{Diag}\left((d_i)_{1\leq i\leq n}\right)\omega(\sigma)$ et $M' = \omega(\sigma)\ \mathrm{Diag}\left((d_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}\right)$. Montrons que $M = M'$.
On a pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$

$$[M]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_i\delta_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} \quad = d_i\delta_{i,\sigma(j)} \quad \text{et} \quad [M']_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}d_{\sigma(k)}\delta_{k,j} = d_{\sigma(j)}\delta_{i,\sigma(j)}$$

Ce qui donne $[M]_{ij} = [M']_{ij} = \begin{cases} d_{\sigma(j)} & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$ et $M = M'$.
4 ▷ Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ et $D' = \mathrm{Diag}(d'_1, \ldots, d'_n)$ deux éléments de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.
i)⇒ii) D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D', donc il existe $\sigma \in \mathcal{B}_n$ telle que $d'_i = d_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $D' = \mathrm{Diag}\left(d_{\sigma(1)}, \ldots, d_{\sigma(n)}\right)$.
D'après la question 3 on a $D\ \omega(\sigma) = \omega(\sigma)\ D'$, comme $\omega(\sigma) \in \omega(\mathcal{B}_n) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\omega(\sigma)^{-1} = {}^t\omega(\sigma)$ et

$$D' = {}^t\omega(\sigma)\ D\ \omega(\sigma)$$

ii)⇒i) Soit $M \in \omega(\mathcal{B}_n)$ telle que $D' = {}^tMDM$, il existe $\sigma \in \mathcal{B}_n$ telle que $M = \omega(\sigma)$, la question 3 donne

$$DM = M\ \mathrm{Diag}\left(d_{\sigma(1)}, \ldots, d_{\sigma(n)}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Diag}\left(d_{\sigma(1)}, \ldots, d_{\sigma(n)}\right) = {}^tMDM$$

donc $D' = \mathrm{Diag}\left(d_{\sigma(1)}, \ldots, d_{\sigma(n)}\right)$ ainsi D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'.

Fonctions de matrices symétriques

5 $\triangleright$ Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}\,(s_1, \ldots, s_n)$ tel que $S = P\ D\ {}^tP$, $S \in \mathcal{S}_n(I)$ donc $\text{Sp}(S) = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset I$.
En prenant $\Omega = {}^tP$, on obtient : $S = {}^t\Omega \text{Diag}\,(s_1, \ldots, s_n)\,\Omega$ avec $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$.

6 $\triangleright$ Soit $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$, supposons que dans $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ il y a m éléments deux à deux différents notés $a_1, .., a_m$, avec $1 \leq m \leq n$, alors $\{a_1, \ldots, a_m\} = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Posons

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}_{m-1}[X] & \to & \mathbb{R}^m \\ P & \mapsto & (P(a_1), \ldots, P(a_m)) \end{array}$$

φ est linéaire . Soit $P \in \ker \varphi$ alors il admet m racines deux à deux distinctes (les a_i) et il est de degré inferieur à $n-1$, donc $P = 0$. Ainsi $\ker \varphi = \{0\}$ et φ est injective, entre deux espaces de même dimension donc elle est bijective .
Soit $P = \varphi^{-1}(f(a_1), \ldots, f(a_m))$, on a alors $\forall i \in [\![1, m]\!], P\,(a_i) = f\,(a_i)$ ou encore $\forall i \in [\![1, n]\!], P\,(s_i) = f\,(s_i)$.
P est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange , il a pour expression $P(X) = \sum\limits_{k=1}^{r} f\,(a_k) \prod\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$.

7 $\triangleright$ Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $\Omega, \Omega' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq n}, (s_i')_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ telles que

$$S = {}^t\Omega\ \text{Diag}\left((s_i)_{1 \leq i \leq n}\right)\ \Omega\ =\ {}^t\Omega'\ \text{Diag}\left((s_i')_{1 \leq i \leq n}\right)\ \Omega',$$

Considérons P le polynôme verifiant : $\forall i \in [\![1, n]\!], P\,(s_i) = f\,(s_i)$.
Par récurrence on a pour tout entier k

$$S^k = {}^t\Omega\ \text{Diag}\left((s_i^k)_{1 \leq i \leq n}\right)\ \Omega\ =\ {}^t\Omega'\ \text{Diag}\left(\left((s_i')^k\right)_{1 \leq i \leq n}\right)\ \Omega'\ \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),$$

ce qui donne

$$P(S) = {}^t\Omega\ \text{Diag}\left((P(s_i))_{1 \leq i \leq n}\right)\ \Omega\ =\ {}^t\Omega'\ \text{Diag}\left((P\,(s_i'))_{1 \leq i \leq n}\right)\ \Omega' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),$$

ainsi

$$P(S) = {}^t\Omega\ \text{Diag}\left((f\,(s_i))_{1 \leq i \leq n}\right)\Omega = {}^t\Omega' \text{Diag}\left((f\,(s_i'))_{1 \leq i \leq n}\right)\ \Omega' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\ .$$

8 $\triangleright$

— Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $s_1, \ldots, s_n \in I$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t\Omega\ \text{Diag}\left((s_i)_{1 \leq i \leq n}\right)\Omega$.

On a $u : \mathbb{R}^I \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)}$, si $\varphi \in \mathbb{R}^I$ alors $u(\varphi)(S) = {}^t\Omega\ \text{Diag}\left((\varphi\,(s_i))_{1 \leq i \leq n}\right)\Omega$.
Soit $f, g \in \mathbb{R}^I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} u(f + \lambda g)(S) & = & {}^t\Omega\ \text{Diag}\left(((f + \lambda g)\,(s_i))_{1 \leq i \leq n}\right)\Omega \\ & = & {}^t\Omega\ \text{Diag}\left((f\,(s_i))_{1 \leq i \leq n}\right)\Omega + \lambda {}^t\Omega\ \text{Diag}\left((g\,(s_i))_{1 \leq i \leq n}\right)\Omega \\ & = & u(f) + \lambda u(g)(S) \end{array}$$

C'est vrai pour tout $S \in \mathcal{S}_n(I)$, on en déduit que $u(f + \lambda g) = u(f) + \lambda u(g)$ et u est linéaire .

— $v : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$, pour $\varphi \in \mathbb{R}^I$ et $S \in \mathcal{S}_n(I)$ on a $v(\varphi) = \text{Tr}\ (u(\varphi))$.
Tr et u sont linéaires donc v est linéaire .

— Ecrivons $xI_n = {}^tI_n \text{Diag}(x, \ldots, x) I_n$ avec I_n la matrice identité, $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Donc $u(\varphi)\,(xI_n) = {}^tI_n \text{Diag}(\varphi(x), \ldots, \varphi(x)) I_n = \varphi(x) I_n$.
Ainsi, $\forall \varphi \in \mathbb{R}^I, \forall x \in I,\ \ u(\varphi)\,(xI_n) = \varphi(x) I_n$.

9 $\triangleright$

— Injectivité de u :
Soit $\varphi \in \ker(u)$. Donc $u(\varphi) = 0$ et pour tout $S \in \mathcal{S}_n(I), u(\varphi)(S) = 0_n$, en particulier, pour tout $x \in I$, $xI_n \in \mathcal{S}_n(I)$, donc $u(\varphi)\left(xI_n\right) = \varphi(x)I_n = 0_n$. Ainsi, pour tout $x \in I, \varphi(x) = 0$, φ est la fonction nulle $0_{(\mathbb{R}^I)}$. Donc $\ker\ (u) = \left\{0_{(\mathbb{R}^I)}\right\}$ et u est injective .

— Surjectivité de u :

- Si $n = 1$, alors $\mathcal{S}_n(I)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont assimilés à I et $\mathbb{R}$. .
  $u : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^I$, si $\varphi \in \mathbb{R}^I$ et $S = (s) = {}^tI_1(s)I_1$ alors $u(\varphi)(s) = (\varphi\,(s))$ ainsi $u(\varphi) = \varphi$.
  u est l'application identité de $\mathbb{R}^I$, donc elle est surjective .

- Si $n > 1$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{\alpha I_n, \alpha \in \mathbb{R}\}$ et f la fonction , de $\mathcal{S}_n(I)$ vers $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,constante égale à A. Supposons qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}^I$ vérifiant $u(\varphi) = f$, alors pour $x \in I$, $u(\varphi)\left(xI_n\right) = \varphi(x)I_n = A$, ce qui est absurde , u n'est pas surjective.
  Ainsi, u est surjective si et seulement si $n = 1$.

10 $\triangleright$ f est polynomiale , soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f\ (x) = P(x)$ pour tout $x \in I$.
Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $s_1, \ldots, s_n \in I$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t\Omega \text{ Diag}\left(\left(s_i\right)_{1 \le i \le n}\right)\Omega$. On a alors

$$\begin{aligned} u(f)(S) &= {}^t\Omega \text{ Diag}\left(\left(f(s_i)\right)_{1 \le i \le n}\right)\Omega \\ &= {}^t\Omega \text{ Diag}\left(\left(P(s_i)\right)_{1 \le i \le n}\right)\Omega \\ &= P\left({}^t\Omega \text{ Diag}\left(\left(s_i\right)_{1 \le i \le n}\right)\Omega\right) \\ &= P(S) \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall S \in \mathcal{S}_n(I), u(f)(S) = P(S)$. En particulier , pour tout $x \in I$, $u(f)\left(xI_n\right) = P\left(xI_n\right) = P(x)I_n$. D'après la question 8 on a $u(f)\left(xI_n\right) = f(x)I_n$. Ce qui donne pour tout $x \in I$, $f(x) = P(x)$. Ainsi, f est polynomiale et la réciproque est vraie.
11 $\triangleright$ Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $s_1, \ldots, s_n \in I$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t\Omega \text{ Diag}\left(\left(s_i\right)_{1 \le i \le n}\right)\Omega$.

— Convergence simple :
On suppose que $\varphi_k \overset{CVS}{\longrightarrow} \varphi$ sur I donc $\forall x \in I$, $\varphi_k(x) \underset{k \to +\infty}{\to} \varphi(x)$.

- On a
$$u(\varphi_k)(S) = \Omega\ {}^t\text{Diag}((\varphi_k\,(s_i))_{1 \le i \le n})\Omega = \Omega\ {}^tD_k\Omega$$

  La suite $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $D = \text{Diag}((\varphi\,(s_i))_{1 \le i \le n})$, et l'application $M \mapsto {}^t\Omega\ M\ \Omega$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue .
  Ainsi, $u(\varphi_k)(S) \underset{k \to +\infty}{\to} u(\varphi)(S)$ et $u(\varphi_k) \overset{CVS}{\longrightarrow} u(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

- Tr est continue, elle est linéaire en dimension finie , donc $\text{Tr}\left(u(\varphi_k)\right)(S) \underset{k \to +\infty}{\to} \text{Tr}\left(u(\varphi)\right)(S)$, par suite $v(\varphi_k) \overset{CVS}{\longrightarrow} v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

— Convergence uniforme .
Toute les normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes , on choisit la norme euclidienne $\|.\|_2$ donnée par $\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(A\ {}^tA)}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Remarquons que $\|{}^t\Omega\ A\ \Omega\|_2 = \|A\|_2$.

- On a
$$\|u(\varphi_k)(S)-u(\varphi)(S)\|_2^2 = \|\mathrm{Diag}\left((\varphi_k(s_i)-\varphi(s_i))_{1\leq i\leq n}\right)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_k(s_i)-\varphi(s_i)|^2$$
Donc $\|u(\varphi_k)(S)-u(\varphi)(S)\|_2 \leq \sqrt{n}\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I}$, avec $\|.\|_{\infty,I}$ est la norme de la convergence uniforme sur I,ceci est valable pour tout S dans $\mathcal{S}_n(I)$ par suite
$$\|u(\varphi_k)-u(\varphi)\|_{\infty,\mathcal{S}_n(I)} = \sup_{S\in\mathcal{S}_n(I)} \|u(\varphi_k)(S)-u(\varphi)(S)\|_2 \leq \sqrt{n}\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I}$$
Si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur I, alors $\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ par suite
$$\|u(\varphi_k)-u(\varphi)\|_{\infty,\mathcal{S}_n(I)} \underset{k\to+\infty}{\to} 0,$$
ainsi $(u(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $u(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.
- La trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres , donc
$$|v(\varphi_k)(S)-v(\varphi)(S)| = \left|\sum_{i=1}^{n}(\varphi_k(s_i)-\varphi(s_i))\right| \leq n\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I}$$
et
$$\sup_{S\in\mathcal{S}_n(I)} |v(\varphi_k)(S)-v(\varphi)(S)| \leq n\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I}$$
ainsi $(v(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

Norme et convexité

12 $\triangleright$ Soit $S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, $\mathbb{R}^n$ admet une base orthonormée $(V_1,\ldots,V_n)$ formée de vecteurs propres de S. Notons λ_i la valeur propre associée à V_i.
Soit $X\in\mathbb{R}^n$, il s'écrit $X=\sum\limits_{i=1}^{n} x_iV_i$. On a alors
$$SX=\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_iV_i \text{ et } {}^tXSX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_ix_j\lambda_i\ {}^tV_iV_j$$
$(V_1,\ldots,V_n)$ est orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ donc $\langle V_i,V_j\rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^tV_iV_j=\delta_{i,j}$, ainsi ${}^tXSX=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2$ et
$$\min(\mathrm{Sp}(S))\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq {}^tXSX \leq \max(\mathrm{Sp}(S))\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
Comme ${}^tXX=x_1^2+\cdots+x_n^2$, on a donc
$$\min(\mathrm{Sp}(S))\ {}^tXX \leq {}^tXSX \leq \max(\mathrm{Sp}(S))\ {}^tXX$$
Si $X\in\sum$ alors ${}^tXX=1$.On en déduit
$$\forall X\in\Sigma,\ \min(Sp(S)) \leq {}^tXSX \leq \max(Sp(S))$$
Puisque ${}^tV_iSV_i=\lambda_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ alors $Sp(S)\subset\{\ {}^tXSX\ ;\ X\in\Sigma\}$ et $\min(\mathrm{Sp}(S))$ (resp $\max(\mathrm{Sp}(S))$) est atteint, donc
$$\min(\mathrm{Sp}(S))=\min\left\{\ {}^tXSX\ ;\ X\in\Sigma\right\} \text{ et } \max(\mathrm{Sp}(S))=\max\left\{\ {}^tXSX\ ;\ X\in\Sigma\right\}$$

13 $\triangleright$

— Soit $S, S' \in \mathcal{S}_n(I)$ et $t \in [0,1]$. Pour $X \in \Sigma$, on a

$$^tX((1-t)S + tS')X = (1-t)\ ^tXSX + t\ ^tXS'X$$

Comme $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$, la question précédente donne

$$(1-t)\min(\mathrm{Sp}(S)) + t\min(\mathrm{Sp}(S')) \leq\ ^tX((1-t)S+tS')X \leq (1-t)\max(\mathrm{Sp}(S)) + t\max(\mathrm{Sp}(S'))$$

Donc $(1-t)\min(\mathrm{Sp}(S)) + t\min(\mathrm{Sp}(S')) \leq \min\{\ ^tX((1-t)S+tS')X\ ;\ X \in \Sigma\} = \min\left(\mathrm{Sp}((1-t)S+tS')\right)$, de même on a $\max\left(\mathrm{Sp}((1-t)S+tS')\right) \leq (1-t)\max(\mathrm{Sp}(S)) + t\max(\mathrm{Sp}(S'))$, par suite

$$\mathrm{Sp}((1-t)S+tS') \subset [(1-t)\min(\mathrm{Sp}(S)) + t\min(\mathrm{Sp}(S')), (1-t)\max(\mathrm{Sp}(S)) + t\max(\mathrm{Sp}(S'))] \qquad (*)$$

Les spectres S, S' sont dans I qui est convexe, donc l'intervalle ci-dessus est inclus dans I , ainsi $\mathrm{Sp}((1-t)S+tS') \subset I$ et $(1-t)S+tS' \in \mathcal{S}_n(I)$.
On a montré que $\forall S, S' \in \mathcal{S}_n(I), \forall\ t \in [0,1]$, $(1-t)S+tS' \in \mathcal{S}_n(I)$ donc $\mathcal{S}_n(I)$ est une partie convexe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

— Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\rho(M) = \max\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$ (appelé rayon spectral) .

- Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Sp}(\alpha S) = \{\alpha\lambda; \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\}$, $\mathrm{Sp}(S)$ est fini, donc $\rho(\lambda S) = |\lambda|\rho(S)$.
- Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(S) = 0$, alors $\mathrm{Sp}(S) = \{0\}$, comme S est diagonalisable, alors $S = 0_n$.
- Soit $S, S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
  La relation (*) de la question 12 pour $t = \frac{1}{2}$, donne

  $$\mathrm{Sp}(S+S') \subset [\min(\mathrm{Sp}(S)) + \min(\mathrm{Sp}(S')), \max(\mathrm{Sp}(S)) + \max(\mathrm{Sp}(S'))]$$

  de plus

  $$-\rho(S) \leq \min(\mathrm{Sp}(S)) \leq \max(\mathrm{Sp}(S)) \leq \rho(S)\ ,$$

  donc $\mathrm{Sp}(S+S') \subset [-\rho(S) - \rho(S'), \rho(S) + \rho(S')]$, ce qui donne $\rho(S+S') \leqslant \rho(S) + \rho(S')$.

Ainsi, ρ est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Continuité des fonctions de matrices symétriques

14 $\triangleright$ Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique χ_S , de S , est de degré n , donc χ est définie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}_n[X]$.
Posons $\chi_S(X) = X^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i(S)X^i$. Les application $a_i : S \mapsto a_i(S)$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de S , donc elles sont continues . Considérons l'application $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^n$ qui a un polynôme $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ associe le $n+1$- uplet $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$, Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^n$, elle est donc continue .
Comme $\chi = \Phi^{-1} \circ (a_0, ..., a_{n-1}, 1)$ alors χ est continue.
15 $\triangleright$ Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. Ce qui se traduit par $\rho(M_k - M) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, on a $|\rho(M_k) - \rho(M)| \leq \rho(M_k - M)$ (inégalité triangulaire) donc $\rho(M_k) \underset{k\to+\infty}{\to} \rho(M)$.
Ainsi $(\rho(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Comme $\|\Lambda_k\| \leq \rho(M_k)$ pour tout $\in \mathbb{N}$ alors $(\Lambda_k)_{k\in\ \mathbb{N}}$ bornée dans $\mathbb{R}^n$, elle admet donc une valeur d'adhérence .
Posons $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \ldots, \lambda_{n,k})$ et φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, telle que $\Lambda_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\to} \Lambda$ avec $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Du fait que $\lambda_{1,k} \leq \cdots \leq \lambda_{n,k}$ et par passage à la limite on a $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et Λ est une valeur d'adhérence croissante.

16 $\triangleright$ Supposons que $\left(\Lambda_{\alpha(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Or $M_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} M$, donc $M_{\alpha(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} M$. On sait que χ est continue et donc $\chi(M_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi(M)$, par suite $\chi(M_{\alpha(k)}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi(M)$. Posons $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$ et $\Lambda_{\alpha(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (\ell_1, ..., \ell_n)$ une suite croissante, donc

$$\chi_{M_{\alpha(k)}} = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_{i,\alpha(k)})$$

et

$$\chi_{M_{\alpha(k)}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{i=1}^{n}(X - \ell_i)$$

Par unicité de la limite, on a

$$\chi_M = \prod_{i=1}^{n}(X - \ell_i)$$

Ainsi $(\ell_1, ..., \ell_n)$ est la suite croissante des valeurs propres de M et $\Lambda_{\alpha(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Sp}_{\uparrow}(M)$.

17 $\triangleright$ La suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bornée dans $\mathbb{R}^n$ et admet une unique valeur d'adhérence $\Lambda = \mathrm{Sp}_{\uparrow}(M)$.
Si on suppose que $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers Λ,donc

$$\exists\varepsilon > 0 \ ,\forall m \in \mathbb{N} \ , \ (\ \exists k > m \text{ et } \|\Lambda_k - \Lambda\| > \varepsilon)$$

Pour $m = 0$ il existe un entier noté $\varphi(0) > 0$ tel que $\left\|\Lambda_{\varphi(0)} - \Lambda\right\| > \varepsilon$ et pour $m = \varphi(0)$ il existe un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\left\|\Lambda_{\varphi(1)} - \Lambda\right\| > \varepsilon$ ...
Ainsi, par récurrence, on construit une suite d'entiers $(\varphi(m))_{m\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $\left\|\Lambda_{\varphi(m)} - \Lambda\right\| > \varepsilon$. $\left(\Lambda_{\varphi(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée donc admet une valeur d'adhérence Λ' différente de Λ , elle est aussi valeur d'adhérence de $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ce qui absurde . Donc $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers Λ .
On a donc pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et toute suite $(M_k)_k$ tendant vers M, $\left(\mathrm{Sp}_{\uparrow}(M_k)\right)_k$ converge vers $\mathrm{Sp}_{\uparrow}(M)$ dans $\mathbb{R}^n$. Donc $\mathrm{Sp}_{\uparrow}$ est continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

18 $\triangleright$ Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, Il suffit de montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M\ {}^tM = I_n\}$. Les applications suivantes

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ A & \mapsto & (A,\ {}^tA) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi_2 : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array}$$

sont continues , φ_1 est linéaire en dimension finie et φ_2 est bilinéaire en dimension finie . Ainsi l'application $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ est continue et $\psi(M) = M\ {}^tM$.
Ainsi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par ψ du fermé $\{I_n\}$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé .

— On a pour toute matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_2 = \mathrm{Tr}(M\ {}^tM) = n$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

19 $\triangleright$ Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, montrons $u(\varphi)$ est continue par la caractérisation séquentielle de la continuité .
Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}_n(I)$ qui converge vers une matrice M. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$ le spectre ordonné de M_k. Pour tout k, il existe $\Omega_k \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M_k = \ {}^t\Omega_k \ \mathrm{Diag}((\lambda_{i,k})_{1\le i\le n}))\ \Omega_k$$

On a alors

$$u(\varphi)(M_k) = \ {}^t\Omega_k \ \mathrm{Diag}((\varphi(\lambda_{i,k})_{1\le i\le n}))\ \Omega_k$$

Soit L une valeur d'adhérence de la suite $(u(\varphi)(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$, et $\left(u(\varphi)(M_{\sigma(k)})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous suite qui converge vers L.

On sait que la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le spectre croissant $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de M.
Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact, il existe une suite extraite $(\Omega_{\sigma(\tau(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\Omega_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
On a $\lambda_{i,\sigma(\tau(k))} \underset{k\to+\infty}{\to} \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ donc

$$M_{\sigma(\tau(k))} \underset{k\to+\infty}{\to} {}^t\Omega \ \mathrm{Diag}((\lambda_i)_{1\leq i\leq n})\Omega) \quad \text{et} \quad u(\varphi)(M_{\sigma(\tau(k))}) \underset{k\to+\infty}{\to} {}^t\Omega \ \mathrm{Diag}((\varphi(\lambda_i))_{1\leq i\leq n})\Omega$$

$(M_{\sigma(\tau(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous suite convergente de $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donc elle converge vers M, par unicité de la limite, on a

$$M = {}^t\Omega \ \mathrm{Diag}((\lambda_i)_{1\leq i\leq n})\Omega$$

par suite

$${}^t\Omega \ \mathrm{Diag}((\varphi(\lambda_i))_{1\leq i\leq n})\Omega = u(\varphi)(M)$$

On a donc $u(\varphi)(M_{\sigma(\tau(k))}) \underset{k\to+\infty}{\to} u(\varphi)(M)$.
Puisque $\left(u(\varphi)(M_{\sigma(k)})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers L alors $\left(u(\varphi)(M_{\sigma(\tau(k))})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers L, d'où $L = u(\varphi)(M)$.
La suite $(u(\varphi)(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ admet donc une valeur d'adhérence unique $L = u(\varphi)(M)$.
De plus toutes les suites $(\varphi(\lambda_{i,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ sont bornées , pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc la suite $(\rho(u(\varphi)(M_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(u(\varphi)(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée . D'après question 17 on a $(u(\varphi)(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(\varphi)(M)$. Ce qui prouve $u(\varphi)$ est continue.
Comme l'application Tr est continue alors $v(\varphi)$ est aussi continues.

Convexité des fonctions de matrices symétriques

20 $\triangleright$

— Soit $U \in \mathcal{U}_S$. Il existe alors $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $U = {}^t\Omega S\Omega$. Posons $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Remarquons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[U]_{k,k} = {}^t\varepsilon_k \ U \ \varepsilon_k$, donc $[U]_{k,k} = {}^tX \ S \ X$ avec $X = \Omega \ \varepsilon_k$.
Comme $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t\varepsilon_k \ \varepsilon_k = 1$ alors $X \in \Sigma$.
D'après la question 12, on a ${}^tXSX \in [\min(\mathrm{Sp}(S)), \max(\mathrm{Sp}(S))] \subset I$, donc $[U]_{k,k} \in I$.

— Soit f convexe sur I et $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Notons $\mathrm{Sp}_{\uparrow}(S) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ on a

$$v(f)(S) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \ .$$

Considérons la matrice $\Omega = (\omega_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $U = {}^t\Omega D\Omega$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
On a D et U sont dans $\mathcal{U}_S$ et

$$\sum_{k=1}^{n} f([D]_{k,k}) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) = v(f)(S)$$

D'autre part, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\omega_{ij} = {}^t\varepsilon_i\Omega\varepsilon_j$, posons $X_j = \Omega \ \varepsilon_j$ la $j-$ème colonne de Ω. Alors :

$$[U]_{jj} = {}^tX_j\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) X_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}^2 \ \lambda_i$$

On sait que les colonnes d'une matrice orthogonale sont unitaires donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_{ij}^2 = 1$, ce qui donne

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}^2 \ \lambda_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}^2 \ f(\lambda_i)\right)$$

ainsi

$$\sum_{j=1}^{n} f([U]_{jj}) = \sum_{j=1}^{n} f\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}^2\lambda_i\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}^2 \ f(\lambda_i)\right)$$

par interversion des $\sum$ dans la dernière somme on obtient $\sum\limits_{j=1}^{n} f\left([U]_{jj}\right) \leq v(f)(S)$.

Comme $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left([D]_{k,k}\right) = v(f)(S)$ alors

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{n} f\left([U_{k,k}]\right); U \in \mathcal{U}_S\right\} = v(f)(S)$$

21 $\triangleright$ Soit f est convexe sur I et $(A,B) \in \mathcal{S}_n(I)^2$, pour $t \in [0,1]$, $(1-t)\ A + t\ B \in \mathcal{S}_n(I)$. Soit $U = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = {}^t\Omega\ ((1-t)A + tB)\ \Omega$. On a :

$$v(f)((1-t)A + tB) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\lambda_i\right) = \sum_{k=1}^{n} f([U]_{k,k})$$

Or, $[U]_{k,k} = (1-t)[{}^t\Omega A\Omega]_{k,k} + t[{}^t\Omega B\Omega]_{k,k}$ et par convexité de f on a

$$v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t)\sum_{k=1}^{n} f([{}^t\Omega A\Omega]_{k,k}) + t\sum_{k=1}^{n} f([{}^t\Omega B\Omega]_{k,k})$$

De la question précédente on a $\sum\limits_{k=1}^{n} f([{}^t\Omega A\Omega]_{k,k}) \leq v(f)(A)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} f([{}^t\Omega B\Omega]_{k,k}) \leq v(f)(B)$. Ainsi

$$v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

22 $\triangleright$ Si f est convexe alors $v(f)$ l'est aussi d'après la question 21.
Réciproquement, supposons que $v(f)$ est convexe sur $\mathcal{S}_n(I)$. Soit $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$, on a

$$v(f)((1-t)xI_n + tyI_n) \leq (1-t)v(f)(xI_n) + tv(f)(yI_n)$$

les matrices qu'on a sont diagonales , ce qui donne

$$nf((1-t)x + ty) \leq n((1-t)f(x) + ty)$$

par suite f est convexe .