

CORRIGÉ CENTRALE PC 2003 Maths 1

Préliminaires

Dans les deux questions préliminaires, nous démontrerons des résultats plus généraux que ceux énoncés, en supposant g à valeurs strictement positives mais pas forcément f .

- 1) a) Puisque $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$ (c'est-à-dire aussi $|f| \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$), l'intégrabilité de f sur $[a; b[$ résulte de celle de g (et des théorèmes de comparaison du cours pour les fonctions positives).

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$, et que g est positive, il existe $x_0 \in [a; b[$ tel que :

$$\forall t \in [x_0; b[, |f(t)| \leq \varepsilon g(t).$$

L'inégalité triangulaire et la croissance des intégrales donne alors :

$$\forall x \in [x_0; b[, \left| \int_x^b f(t) dt \right| \leq \int_x^b |f(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^b g(t) dt.$$

ce qui signifie que $\boxed{\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_x^b g(t) dt\right)}$.

- b) Là encore, puisque $f \underset{b}{\sim} g$, l'intégrabilité de f résulte de celle de g .

$f \underset{b}{\sim} g$ s'écrit aussi : $f - g \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$. Donc d'après la question précédente : $\int_x^b (f - g)(t) dt \underset{b}{=} \mathcal{O}\left(\int_x^b g(t) dt\right)$ et puisque, par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in [a; b[, \int_x^b f(t) dt = \int_x^b g(t) dt + \int_x^b (f - g)(t) dt.$$

on en déduit :

$$\boxed{\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_x^b g(t) dt.}$$

- 2) a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$, et que g est positive il existe $x_0 \in [a; b[$ tel que :

$$\forall t \in [x_0; b[, |f(t)| \leq \varepsilon g(t).$$

À l'aide de la relation de Chasles et de l'inégalité triangulaire on en déduit, pour tout $x \in [x_0; b[$:

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^{x_0} f(t) dt \right| + \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^{x_0} f(t) dt \right| + \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq \left| \int_a^{x_0} f(t) dt \right| + \varepsilon \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

et puisque $\int_a^x g(t) dt > 0$ (car g ne prend que des valeurs strictement positives par hypothèse), on a :

$$0 \leq \frac{\left| \int_a^x f(t) dt \right|}{\int_a^x g(t) dt} \leq \frac{\left| \int_a^{x_0} f(t) dt \right|}{\int_a^x g(t) dt} + \varepsilon \frac{\int_{x_0}^x g(t) dt}{\int_a^x g(t) dt} \leq \frac{\left| \int_a^{x_0} f(t) dt \right|}{\int_a^x g(t) dt} + \varepsilon.$$

Or g est strictement positive, donc la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est croissante; par le théorème de la limite monotone, soit elle admet une limite finie en b , soit elle tend vers $+\infty$. Ici, puisque g n'est pas intégrable

sur $[a; b[$, c'est la 2ème éventualité qui se produit, donc $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x g(t) dt = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{\left| \int_a^{x_0} f(t) dt \right|}{\int_a^x g(t) dt} = 0$

(car x_0 est fixé).

Il existe alors $x_1 \in [a; b[$ tel que $\frac{\left| \int_a^{x_0} f(t) dt \right|}{\int_a^{x_1} g(t) dt} \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [x_1; b[$. En posant $x_2 = \max(x_0, x_1)$ on a :

$$\forall x \in [x_2; b[, 0 \leq \frac{\left| \int_a^x f(t) dt \right|}{\int_a^x g(t) dt} \leq 2\varepsilon,$$

ce qui achève de prouver que $\boxed{\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_a^x g(t) dt\right)}$.

On notera l'analogie entre la démonstration précédente et celle du théorème de Cesàro...

EXEMPLES : FONCTIONS DE RIEMANN. — On considère $[a; b[= [1; +\infty[$, et les fonctions g , f_1 et f_2 définies par :

$$\forall t \geq 1, \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad f_1(t) = \frac{1}{t}, \quad f_2(t) = \frac{1}{t^2}.$$

La fonction g n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. Les fonctions f_1 et f_2 sont toutes deux négligeables devant g en $+\infty$, avec f_1 non intégrable et f_2 intégrable.

On ne peut donc rien dire en général de l'intégrabilité de f .

b) Par définition, $f \underset{b}{\sim} g$ signifie $f - g \underset{b}{=} o(g)$.

On déduit alors du résultat précédent : $\int_a^x (f - g)(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$, ce qui montre que

$$\boxed{\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_a^x g(t) dt.}$$

Par ailleurs, le théorème de comparaison du cours relatif aux intégrales des fonctions équivalentes montre que f n'est pas intégrable sur $[a; b[$, ce que l'équivalent qui vient d'être établi démontre aussi.

Partie I

Dans cette partie, on appliquera les résultats des préliminaires aux intervalles de la forme $]a; b[$, avec des fonctions équivalents ou négligeables au voisinage de a (la généralisation est évidemment valable).

Par ailleurs, toutes les fonctions utilisées ci-après sont continues, donc continues par morceaux : cela ne sera pas toujours rappelé.

I.A.

I.A.1) Pour tout $t \in]0; 1]$, on pose :

$$f(t) = \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{1}{t}.$$

Alors f et g sont deux fonctions continues à valeurs strictement positives, et équivalentes au voisinage de zéro. Comme g n'est pas intégrable sur $]0; 1]$, les résultats des préliminaires 2)b) s'appliquent :

$$\boxed{\int_x^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x.}$$

I.A.2) Pour $x > 0$:

$$\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt = \int_{x^3}^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt - \int_{x^2}^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt,$$

et d'après la question précédente :

$$\int_{x^3}^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x^3) = -3\ln x \quad \text{et} \quad \int_{x^2}^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x^2) = -2\ln x.$$

L'addition des équivalents est ici licite ($-3 + 2 \neq 0!$) donc on peut conclure :

$$\boxed{\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x.}$$

I.B.

I.B.1) Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ et $t \mapsto t$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[2; +\infty[$ donc on peut intégrer par parties :

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \int_2^x \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\frac{1}{\ln t}}_v dt = \left[\frac{t}{\ln t} \right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque pour $t > 1$, $\frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{t} > 0$, et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est une fonction de Riemann non intégrable en $+\infty$.

Puisque $\frac{1}{\ln^2 t} = o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$ en $+\infty$, la question **2)a)** des préliminaires montre alors que

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} \underset{+\infty}{=} o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right).$$

Enfin, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$, $\frac{2}{\ln 2}$ est négligeable devant $\frac{x}{\ln x}$ et finalement, $\boxed{\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}}$.

I.B.2) Établissons par récurrence sur n la formule plus précise suivante :

$$(\mathcal{P}_n) \quad \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \left[\sum_{k=0}^n \frac{k!t}{\ln^{k+1} t} \right]_2^x + (n+1)! \int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+2} t}.$$

La propriété (\mathcal{P}_0) a été démontrée à la question précédente. Supposons que (\mathcal{P}_n) soit vraie. Une intégration par parties (effectuée en dérivant $t \mapsto (\ln t)^{-(n+2)}$ et en intégrant la constante 1) donne :

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+2} t} = \left[\frac{t}{\ln^{n+2} t} \right]_2^x + (n+2) \int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+3} t} \quad (*)$$

ce qui permet d'obtenir \mathcal{P}_{n+1} , et achève la récurrence.

On applique alors à la relation $(*)$ le résultat de la question préliminaire **2)a)** pour f et g respectivement définies par $t \mapsto \frac{1}{\ln^{n+3} t}$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln^{n+2} t}$: f est bien négligeable devant g en $+\infty$, et $tg(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, donc g est prépondérante sur $t \mapsto \frac{1}{t}$ en $+\infty$ et par suite n'est pas intégrable sur $[2; +\infty[$. On conclut que $\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+3} t} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+2} t}\right)$, donc

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+2} t} \sim \frac{x}{\ln^{n+2} x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{x}{\ln^{n+1} x}\right).$$

Or la constante $\sum_{k=0}^n \frac{2k!}{\ln^{k+1}(2)}$ est négligeable devant $\sum_{k=0}^n \frac{k!x}{\ln^{k+1} x}$ (puisque tous les termes de cette somme tendent vers $+\infty$) donc on déduit de la propriété (\mathcal{P}_n) que :

$$\boxed{\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{\ln^{k+1} x} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1} x}\right)}.$$

I.C. Une double intégration par parties (en intégrant à chaque fois l'exponentielle) conduit à :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^t}{t^2+1} dt &= \left[\frac{e^t}{t^2+1} \right]_1^x + 2 \int_2^x \frac{te^t}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \left[\frac{e^t}{t^2+1} + \frac{2te^t}{(t^2+1)^2} \right]_1^x - 2 \int_1^x e^t \left[\frac{1}{(t^2+1)^2} - \frac{4t^2}{(t^2+1)^3} \right] dt \\ &= \left[\frac{e^t}{t^2+1} + \frac{2te^t}{(t^2+1)^2} \right]_1^x + 2 \int_1^x e^t \frac{3t^2-1}{(t^2+1)^3} dt \quad (**) \end{aligned}$$

On commence par un développement asymptotique en $+\infty$ du crochet, la valeur en 1 étant négligeable devant $\frac{e^x}{x^n}$ pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \left[\frac{e^t}{t^2+1} + \frac{2te^t}{(t^2+1)^2} \right]_1^x &= \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + \frac{2e^x}{x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)} + cste \\ &= \frac{e^x}{x^2} \left[1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] + \frac{2e^x}{x^3} \left[1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right). \end{aligned}$$

On prouve ensuite que l'intégrale dans (**) est négligeable devant $\frac{e^x}{x^3}$. Pour cela, on pose $f(t) = e^t \frac{3t^2-1}{(t^2+1)^3}$

et $g(t) = \frac{3e^t}{t^4}$, ce qui définit deux fonctions continues et positives sur $[1; +\infty[$ et équivalentes en $+\infty$. On a

$\lim_{t \rightarrow +\infty} tg(t) = +\infty$ donc g est prépondérante sur $t \mapsto \frac{1}{t}$ en $+\infty$ et par suite n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$;

la question **2)b)** des préliminaires prouve alors que $\int_1^x f(t) dt \sim \int_1^x \frac{3e^t}{t^4} dt$.

Or une nouvelle intégration par parties, et la même démonstration qu'aux questions **I.B.1** et **I.B.2** donnent :

$$\int_1^x \frac{3e^t}{t^4} dt = \left[\frac{3e^t}{t^4} \right]_1^x + 12 \int_1^x \frac{e^t}{t^5} dt = 3 \frac{e^x}{x^4} + o\left(\frac{e^x}{x^4}\right),$$

et cette dernière quantité est négligeable devant $\frac{e^x}{x^3}$ en $+\infty$. Ceci achève de prouver que :

$$\boxed{\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1} dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right).}$$

Partie II

II.A. Quitte à remplacer a par, par exemple, $a' = \max(a, 1)$, on peut supposer $a > 0$. On distingue deux cas.

— $\alpha = 0$.

Alors $\frac{f'(x)}{f(x)}$ est négligeable devant $\frac{1}{x}$ en $+\infty$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[a; +\infty[$, la question **2)a)** des préliminaires montre que :

$$\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln f(x) - \ln f(a) = o\left(\int_a^x \frac{dt}{t}\right) = o(\ln x - \ln a) = o(\ln x).$$

La constante $\ln(f(a))$ étant négligeable devant $\ln x$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = 0$.

— $\alpha \neq 0$.

Alors $\frac{f'(x)}{f(x)}$ est équivalent à $\frac{\alpha}{x}$ en $+\infty$. Comme $x \mapsto \frac{\alpha}{x}$ n'est pas intégrable sur $[a; +\infty[$, la question **2.b)** des préliminaires montre que :

$$\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln f(x) - \ln f(a) \sim \int_a^x \frac{dt}{t} \sim \alpha(\ln x - \ln a) \sim \alpha \ln x.$$

La constante $\ln(f(a))$ étant négligeable devant $\ln x$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \alpha$.

Dans les deux cas, on a montré que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \alpha.}$$

II.B. On suppose dans cette question $\alpha < -1$.

II.B.1) Soit β un réel tel que $\alpha < \beta < -1$. La limite établie à la question précédente montre que $\frac{\ln f(x)}{\ln x} \leq \beta$ pour x assez grand. Comme $\ln x > 0$ pour $x > 1$, on en déduit que $\ln f(x) \leq \ln x^\beta$, donc que $0 \leq f(x) \leq x^\beta$ pour x assez grand. Par comparaison à une fonction de Riemann intégrable au voisinage de $+\infty$, et puisque f est continue sur $[a; +\infty[$, on en déduit que f est intégrable sur $[a; +\infty[$.

II.B.2) Il s'agit de trouver une fonction dont $t \mapsto \frac{tf(t)}{\alpha+1}$ soit une primitive : on pose donc $g(t) = \frac{f(t)+tf'(t)}{\alpha+1}$.

Alors $\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{1}{\alpha+1} \left(1 + \frac{tf'(t)}{f(t)}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ c'est-à-dire $g \sim f$ en $+\infty$. L'intégrabilité de f , qui est continue à valeurs > 0 , et la question **1)b)** des préliminaires montrent, d'une part, l'intégrabilité de g , et d'autre part que, en $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t) dt = \left[\frac{tf(t)}{\alpha+1} \right]_x^{+\infty} = -\frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

Le calcul ci-dessus est justifié par la question précédente, où l'on a montré que $f(t) \leq t^\beta$ pour t assez grand, avec $\beta < -1$, ce qui entraîne que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (tf(t)) = 0$.

II.C. On suppose dans cette question $\alpha > -1$.

II.C.1) Soit β un réel tel que $-1 < \beta < \alpha$. La limite établie à la question **II.A** montre que $\frac{\ln f(x)}{\ln x} \geq \beta$ pour x assez grand. Comme $\ln x > 0$ pour $x > 1$, on en déduit que $\ln f(x) \geq \ln x^\beta$, donc que $f(x) \geq x^\beta$ pour x assez grand. Par comparaison à une fonction de Riemann, on en déduit que f n'est pas intégrable sur $[a; +\infty[$.

II.C.2) On applique cette fois la question **2)b)** des préliminaires, avec la même fonction g qu'à la question **II.B.2)**.

Tout comme dans cette question, on a $g \sim f$ en $+\infty$, avec ici f non intégrable, donc :

$$\int_a^x f(t) dt \underset{+\infty}{\sim} \int_a^x g(t) dt = \left[\frac{tf(t)}{\alpha+1} \right]_a^x = \frac{xf(x)}{\alpha+1} - \frac{af(a)}{\alpha+1}.$$

Or on a vu que $xf(x) \geq x^{\beta+1}$ pour x assez grand, avec $\beta > -1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$ et la constante obtenue dans le calcul ci-dessus est négligeable devant $xf(x)$, de sorte que :

$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

II.C.3) Prenons $f : t \mapsto 2 + \sin t$. f est bien continue et à valeurs strictement positives. Comme elle est bornée, $\frac{\ln f(x)}{\ln x}$ tend vers $\alpha = 0 > -1$.

Cependant, $\int_0^x f(t) dt = 2x - \cos x + 1$ n'est pas équivalent à $xf(x) = x(2 + \sin x)$; en effet, le quotient vaut, si $x \neq 0$, $\frac{2 + \sin x}{2 + \frac{1 - \cos x}{x}}$, qui n'a pas de limite en $+\infty$.

II.D. Il s'agit dans cette question d'étudier les intégrales de Bertrand.

II.D.1) Dans le quotient $\frac{1}{x(\ln x)^\beta}$, on reconnaît la forme $u'(x)[u(x)]^{-\beta}$, où u est le logarithme. Par conséquent (c et c' représentent des constantes dont la valeur exacte importe peu) :

$$\int_2^y \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \begin{cases} \frac{(\ln y)^{-\beta+1}}{-\beta+1} + c & \text{si } \beta \neq 1, \\ \ln(\ln y) + c' & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

On en déduit que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_2^y \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ existe, c'est-à-dire (fonction positive) $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est intégrable sur $[2; +\infty[$, si et seulement si $\beta > 1$.

II.D.2) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^\gamma(\ln x)^\beta}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[2; +\infty[$ et est à valeurs strictement positives. De plus,

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = x[\ln(f)]'(x) = x \left[-\frac{\gamma}{x} - \frac{\beta}{x \ln x} \right] = -\gamma - \frac{\beta}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\gamma.$$

Les questions **II.B.1)** et **II.B.2)** montrent que :

- si $\gamma > 1$, alors f est intégrable sur $[2; +\infty[$;
- si $\gamma < 1$, alors f n'est pas intégrable sur $[2; +\infty[$.

(Le cas $\gamma = 1$ a été traité à la question précédente).

II.E. On ne peut rien conclure dans le cas général : les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ vérifient toutes la condition

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = -1 - \frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1,$$

et parmi elles, certaines sont intégrables (si $\beta > 1$), les autres ne le sont pas.

Partie III.

III.A. h est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \geq 0, \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{-\alpha e^{-\alpha x} f(x) + e^{-\alpha x} f'(x)}{e^{-\alpha x} f(x)} = -\alpha + \frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $x_0 \geq 0$ tel que, pour tout $u \geq x_0$, on ait $0 \leq \frac{h'(u)}{h(u)} \leq \varepsilon$. La croissance de l'intégrale montre alors que, pour tout entier $n \geq x_0 + 1$ et tout $t \in [n-1; n]$:

$$\left| \ln \frac{h(t)}{h(n)} \right| = |\ln h(n) - \ln h(t)| = \left| \int_t^n \frac{h'(u)}{h(u)} du \right| \leq \int_t^n \left| \frac{h'(u)}{h(u)} \right| du \leq \varepsilon(n-t) \leq \varepsilon.$$

On en déduit l'encadrement $-\varepsilon \leq \ln \frac{h(t)}{h(n)} \leq \varepsilon$, puis, comme l'exponentielle est croissante, $e^{-\varepsilon} \leq \frac{h(t)}{h(n)} \leq e^\varepsilon$. En soustrayant 1 et en multipliant par le nombre positif $h(n)$ on obtient :

$$(e^{-\varepsilon} - 1)h(n) \leq h(t) - h(n) \leq (e^\varepsilon - 1)h(n).$$

Or $0 \geq e^{-\varepsilon} - 1 = e^{-\varepsilon}(1 - e^\varepsilon) \geq 1 - e^\varepsilon$ donc finalement :

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall t \in [n-1; n], \quad |h(t) - h(n)| \leq (e^\varepsilon - 1)h(n),$$

où l'on a posé $n_0 = 2 + \lfloor x_0 \rfloor$.

III.B. On remarque :

$$h(n) \int_{n-1}^n e^{\alpha t} dt = h(n) \frac{e^{\alpha n} - e^{\alpha(n-1)}}{\alpha} = f(n) \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, et ε' tel que $0 \leq e^{\varepsilon'} - 1 \leq \varepsilon$. En utilisant la question précédente (avec ε' à la place de ε), on a l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{n-1}^n f(t) dt - \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n) \right| &= \left| \int_{n-1}^n e^{\alpha t} h(t) dt - \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n) \right| \\ &= \left| \int_{n-1}^n e^{\alpha t} [h(t) - h(n)] dt + h(n) \int_{n-1}^n e^{\alpha t} dt - f(n) \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} \right| \\ &= \left| \int_{n-1}^n e^{\alpha t} [h(t) - h(n)] dt \right| \\ &\leq (e^{\varepsilon'} - 1)h(n) \int_{n-1}^n e^{\alpha t} dt = (e^{\varepsilon'} - 1)f(n) \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} \\ &\leq \varepsilon f(n) \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \left| \frac{\int_{n-1}^n f(t) dt}{f(n) \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}} - 1 \right| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\boxed{\int_{n-1}^n f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n)}$.

III.C.

III.C.1) Les fonctions u et v sont constantes sur chaque intervalle $[k-1; k[$, donc

$$\int_{k-1}^k v(t) dt = v(k) = \int_{k-1}^k f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{k-1}^k u(t) dt = u(k) = f(k).$$

III.C.2) *Remarque : il ne s'agit pas dans cette question du théorème de comparaison série-intégrale, qui nécessite l'hypothèse de décroissance de f (ce n'est pas le cas ici).*

La question précédente montre l'équivalent suivant, entre suites à termes positifs :

$$f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

La série de terme général $f(n)$ a donc même nature que celle de terme général $\int_{n-1}^n f(t) dt$, pour $n \geq 1$. Or cette dernière est convergente, puisque sa somme partielle de rang n est $\int_0^n f(t) dt$, et que f est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Donc : la série de terme général $f(n)$ converge.

On note ensuite que la fonction v est intégrable sur \mathbb{R}_+ , car elle est continue par morceaux et positive et que ses intégrales partielles sont majorées : en effet pour $x > 0$, en posant $n = \lfloor x \rfloor + 1$, la question **III.C.1** et la relation de Chasles permettent d'écrire que :

$$\int_0^x v(t) dt \leq \int_0^n v(t) dt = \int_0^n f(t) dt \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Une fois l'intégrabilité de v acquise, la question **III.C.1** prouve aussi que $\int_n^{+\infty} v(t) dt = \int_n^{+\infty} f(t) dt$.

On peut exprimer R_n sous forme intégrale : d'après la question **III.C.1**,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k u(t) dt = \int_n^{+\infty} u(t) dt.$$

Or d'après la question **III.B** (et toujours **III.C.1**) on a $u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} v(t)$ donc en appliquant la question **1)b**) des préliminaires au couple de fonctions $(u, \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} v)$, on obtient

$$R_n = \int_n^{+\infty} u(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} v(t) dt = \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} f(t) dt,$$

ce qui est le résultat demandé.

III.C.3) *Le principe étant ici le même que dans la la question précédente, nous ne détaillerons pas les calculs.*

On prouve comme ci-dessus que la série de terme général $f(n)$ diverge, et que v n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ . L'équivalent demandé peut s'écrire :

$$\int_0^n u(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_0^n v(t) dt.$$

Cela est vrai, grâce à l'équivalent $u \sim \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} v$ établi à la question précédente, et en appliquant la question **2)b**) des préliminaires au couple de fonctions $(u, \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} v)$.

III.D. Dans cette question, $\alpha = 0$. Le résultat de la question **III.A** s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \forall t \in [n-1; n], |f(t) - f(n)| \leq (e^\varepsilon - 1)f(n).$$

et en procédant comme dans **III.B** (il suffit de remplacer $\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}$ par 1), on obtient :

$$\int_{n-1}^n f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(n),$$

c'est-à-dire $u \underset{+\infty}{\sim} v$.

On peut reprendre alors le travail fait aux questions **III.C.2)** et **III.C.3)**, en remplaçant $\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}$ par 1, et on obtient :

La série de terme général $f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur \mathbb{R}_+ , et l'on a $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t) dt$ en cas de convergence et $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^n f(t) dt$ en cas de divergence.

Partie IV.

IV.A. La partie **III** suppose la fonction f définie sur \mathbb{R} . Cela n'est pas nécessaire : on peut remplacer les intégrales et sommes partielles commençant à zéro par des intégrales et sommes partielles commençant à 1 ou 2.

IV.A.1) La fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ vérifie $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x}$, donc α existe et vaut zéro. On applique les résultats de la question **III.D**, avec ici f non intégrable. On obtient directement :

$$\text{la série harmonique } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \text{ diverge et } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n f(t) dt = \ln n.$$

IV.A.2) La fonction $f: x \mapsto \ln x$ vérifie $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x \ln x}$, donc α existe et vaut zéro. On applique les résultats de la question **III.D**, avec ici f non intégrable. On obtient alors (on rappelle qu'une primitive de $t \mapsto \ln t$ est $t \mapsto t \ln t - t \dots$) :

$$\text{la série de terme général } \ln k \text{ diverge et } S_n = \sum_{k=1}^n \ln k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n \ln t dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln n.$$

IV.A.3) La fonction $f: x \mapsto 2^x \ln x$ vérifie $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2 + \frac{1}{x \ln x}$, donc α existe et vaut $\ln 2$. f n'étant pas intégrable au voisinage de $+\infty$, les résultats de la question **III.C.3)** s'appliquent. On calcule l'intégrale de f par parties :

$$\int_1^x 2^t \ln t dt = \left[\frac{2^t \ln t}{\ln 2} \right]_1^x - \int_1^x \frac{2^t}{t \ln 2} dt = \frac{2^x \ln x}{\ln 2} - \int_1^x \frac{2^t}{t \ln 2} dt.$$

Comme $\frac{2^t}{t}$ est négligeable devant $2^t \ln t$ au voisinage de l'infini, et comme $t \mapsto 2^t \ln t$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, la question **2)b)** des préliminaires donne $\int_1^x \frac{2^t}{t \ln 2} dt = o\left(\int_1^x 2^t \ln t dt\right)$ d'où

$$\text{l'on déduit que } \int_1^x 2^t \ln t dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^x \ln x}{\ln 2}.$$

Ici $\frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} = 2 \ln 2$, donc on obtient :

$$\text{la série } \sum_{k \geq 1} 2^k \ln k \text{ diverge et } S_n = \sum_{k=1}^n 2^k \ln k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{n+1} \ln n.$$

Remarque : les trois exemples ci-dessus pouvaient être étudiés directement par les techniques habituelles de comparaison série-intégrale, puisque les trois fonctions en jeu sont monotones. Cependant, comme cela est écrit dans le rapport de l'épreuve, cette solution plus simple n'était pas acceptée...

IV.B. Cette question repose sur l'idée suivante, introduite par l'énoncé à la question **III.C** : la somme partielle de rang n de la série $\sum a_n$ est l'intégrale partielle de la fonction en escalier f définie par $f(t) = a_n$ si $t \in [n; n+1[$:

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^n a_k = \int_0^n f(t) dt.$$

Alors f est intégrable sur \mathbb{R}_+ si et seulement si la série de terme général a_n converge et, dans ce cas, on a

$$R_n(a) = \int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt.$$

IV.B.1) On applique les résultats de la question préliminaire **1)b)** aux fonctions f et g en escalier définies sur \mathbb{R}_+ par $f(t) = a_n$ et $g(t) = b_n$ si $t \in [n; n+1[$. Par hypothèse, $f \sim g$ au voisinage de l'infini et, comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} f$, donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} g$ converge donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ converge et $\int_{n+1}^{+\infty} f \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{n+1}^{+\infty} g$ c'est-à-dire

$$R_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R_n(b).$$

IV.B.2) Reprendre les arguments ci-dessus en appliquant cette fois la question préliminaire **2)b)**.

IV.C.

IV.C.1) On pose $a_k = \frac{1}{k} - [\ln k - \ln(k-1)]$ de sorte que $S_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Un développement limité fournit :

$$a_k = \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} b_k = -\frac{1}{2k^2}.$$

La convergence de la série $\sum b_k$ montre celle de $\sum a_k$. Si l'on note S la somme de cette dernière série, la question IV.B.1) montre que

$$R_n(a) = S - S_n(a) \sim R_n(b).$$

Or en utilisant III.D (ou par une simple comparaison série-intégrale), on a (je ne détaille pas les hypothèses) :

$$R_n(b) = -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2n},$$

et la relation ci-dessus entraîne alors que $S_n(a) - S \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, ce qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n + S + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(Remarque : $S = \gamma$ est la constante d'Euler.)

IV.C.2) On pose $a_n = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, de sorte que :

$$S_n(a) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right).$$

(Remarque : si l'on ne connaît pas la démonstration de la formule de Stirling, il n'est pas facile de trouver cette bonne définition de a_n !)

Un développement limité (omis) donne alors :

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n = -\frac{1}{12n^2}.$$

La même technique que précédemment montre que $S_n(a) = S + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, avec S la somme de la série $\sum a_n$. En prenant l'exponentielle on obtient :

$$\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = e^S \times e^{\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = e^S \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Finalement, en posant $\delta = e^S$, on aboutit bien à :

$$n! \sim \delta e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

IV.C.3) La formule de Stirling permet de dire que $\delta = \sqrt{2\pi}$.

• • • F I N • • •
