

Préliminaires

- 1: f est 2π -périodique, paire, continue (car paire), et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par le théorème de Dirichlet, elle est développable en série de Fourier, égale à la somme de sa série de Fourier.

Comme elle est paire, les b_n sont nuls pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x) dx = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos((\alpha+n)x) + \cos((\alpha-n)x) dx$$

$$= (-1)^n \left(\frac{\sin(\alpha\pi)}{(\alpha+n)\pi} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{(\alpha-n)\pi} \right) = (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{(\alpha^2 - n^2)\pi}$$

$\alpha \in]0, 1[$, les cos s'intègrent bien de cette façon

$$\text{On a donc } \boxed{f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{(\alpha^2 - n^2)\pi} \cos(nx) \text{ pour } x \in \mathbb{R}}$$

- 2: On applique ceci en π en divisant par $\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}$

et en utilisant $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$\text{D'où } \pi \cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{(\alpha^2 - n^2)}$$

$$\text{Ce qui donne enfin : } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 - \alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha} \cot(\alpha\pi)}$$

Ce qui prouve en passant que la série converge !...

I L'opérateur différence Δ

- 1: $[\Delta(H)]_n = H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$

$$\boxed{\Delta(H) \text{ est la suite } \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \geq 1}}$$

- 2:

- a) L'image d'une suite indexées par $\mathbb{N}^*$ est clairement une suite indexée par $\mathbb{N}^*$

Reste à montrer que Δ est linéaire.

$$\begin{aligned} [\Delta(\lambda.u + \mu.v)]_n &= (\lambda.u + \mu.v)_{n+1} - (\lambda.u + \mu.v)_n \\ &= \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} - \lambda u_n - \mu v_n = \lambda [\Delta(u)]_n + \mu [\Delta(v)]_n \end{aligned}$$

b) On a donc $U_{n+1} = U_n + u_n$ et $U_1 = a$, on reconnait une suite récurrente linéaire. Les U_k sont déterminés de façon unique par

$$\text{récurrence. Ceci nous donne, } \boxed{U_1 = a, U_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} u_k}$$

c) Ce qu'on vient de faire prouve que l'image de Δ est E tout entier et que le noyau de Δ ne contient qu'une suite qui est nécessairement la suite nulle puisque Δ est linéaire.

$$\begin{aligned} \text{3: } \sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k &= \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} v_k - u_k v_k = \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} v_k - \sum_{k=p}^{q-1} u_k v_k \\ &= \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} v_k - \sum_{k=p-1}^{q-2} u_{k+1} v_{k+1} \text{ en réindexant la deuxième somme.} \\ \sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k &= \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} (v_k - v_{k+1}) - u_p v_p + u_q v_q \text{ en rajoutant ces ter-} \\ &\text{mes pour compenser les différences d'indices au début et à la fin.} \end{aligned}$$

$$\text{On a bien : } \sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k = [u_q v_q - u_p v_p] - \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} (v_{k+1} - v_k)$$

$$\text{et enfin : } \boxed{\sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k = [u_q v_q - u_p v_p] - \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} [\Delta(v)]_k}$$

4: On prend, $p = 1$, $q = n$, $u_k = k$ et $v_k = H_k$ et on obtient, en utilisant $[\Delta(v)]_k = \frac{1}{k+1}$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - H_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k+1} = nH_n - n}$$

II Les fonctions Γ et Ψ d'Euler

$$\text{1: } \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

La fonction qu'on intègre est continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$, elle est positive non identiquement nulle, et l'intégrale, si elle converge sera strictement positive.

Il y a un problème de convergence de l'intégrale en 0 et en $+\infty$

En 0 : $e^{-t} t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ dont l'intégrale ne converge que si $1-x < 1$ ou encore $x > 0$

En $+\infty$: $e^{-\frac{t}{2}} t^{x-1}$ tend vers 0 et donc $e^{-t} t^{x-1}$ est positive, négligeable devant $e^{-\frac{t}{2}}$ dont l'intégrale converge.

L'intégrale ne converge donc que pour $x > 0$ et elle est alors strictement positive.

2: $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$

On choisit de dériver t^x et d'intégrer e^{-t} . Le problème est de savoir si $-e^{-t}t^x$ a une limite finie en 0 et en $+\infty$. Ces deux limites existent et sont nulles.

Comme l'intégrale converge, l'intégration par parties est possible et est de crochet nul.

On obtient immédiatement : $\Gamma(x+1) = - \left(- \int_0^{+\infty} e^{-t} x t^{x-1} dt \right) = x \Gamma(x)$

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$ et la relation de récurrence donne également $\Gamma(n) = (n-1)!$ par récurrence immédiate !

3:

a) Comme $a < b$, $\left[\text{pour } t \in]0, 1], \max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1} \right]$

et $\left[\text{pour } t \geq 1, \max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} \right]$

D'autre part, t^{x-1} est positive, monotone en x , décroissant ou croissant selon la valeur de t

Enfin : $\left[0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}) \right]$

b) Cette question est très longue, ce qui explique qu'on va la rédiger de façon succincte. On va d'abord travailler pour $x \in [a, b]$

- Appelons $f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$, $|f(x, t)| \leq e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ positive et indépendant de x
 $\int_0^{+\infty} e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) dt$ converge car elle converge en 0, y étant équivalent à $e^{-t} t^{a-1}$ et en $+\infty$ car elle y est équivalente à $e^{-t} t^{b-1}$

Ceci prouve que Γ est continue sur $[a, b]$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-t} t^{x-1} \ln t$
 $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) |\ln t|$ positive et indépendant de x
 $\int_0^{+\infty} e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) |\ln t| dt$ converge en 0 et en $+\infty$
 - en 0 : $e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) |\ln t| = e^{-t} t^{a-1} |\ln t| = e^{-t} t^{a/2} |\ln t| \frac{1}{t^{1-a/2}}$
 $e^{-t} t^{a/2} |\ln t|$ tend vers 0 et l'intégrale de $\frac{1}{t^{1-a/2}}$ converge
 - en $+\infty$: $e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) |\ln t| = e^{-t} t^{b-1} |\ln t| = e^{-t/2} e^{-t/2} t^{b-1} |\ln t|$
 $e^{-t/2} t^{b-1} |\ln t|$ tend vers 0 et l'intégrale de $e^{-t/2}$ converge

Ce qui prouve que Γ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t dt$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = e^{-t} t^{x-1} \ln^2 t$

$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) \ln^2 t$ positive et indépendant
 de x
 $\int_0^{+\infty} e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) \ln^2 t dt$ converge en 0 et en $+\infty$
 - en 0 : $e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) \ln^2 t = e^{-t} t^{a-1} \ln^2 t = e^{-t} t^{a/2} \ln^2 t \frac{1}{t^{1-a/2}}$
 $e^{-t} t^{a/2} \ln^2 t$ tend vers 0 et l'intégrale de $\frac{1}{t^{1-a/2}}$ converge
 - en $+\infty$: $e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) \ln^2 t = e^{-t} t^{b-1} \ln^2 t = e^{-t/2} e^{-t/2} t^{b-1} \ln^2 t$
 $e^{-t/2} t^{b-1} \ln^2 t$ tend vers 0 et l'intégrale de $e^{-t/2}$ converge
 Ce qui prouve que Γ est de classe C^2 sur $[a, b]$ et $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln^2 t dt$
 • Enfin, $\boxed{\Gamma \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0, +\infty[}$, $\boxed{\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t dt}$
 et $\boxed{\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln^2 t dt}$

4: $\boxed{\ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right) = \ln(x)}$

$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ d'où $\boxed{\Psi(x) = \ln(\Gamma(x))'}$

On dérive la première relation, ce qui donne $\boxed{\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}}$

$\Delta\left((\Psi(n+\alpha))_{n \geq 1}\right)_k = \Psi(k+1+\alpha) - \Psi(k+\alpha) = \frac{1}{k+\alpha}$

$\boxed{\text{La suite } \Delta\left((\Psi(n+\alpha))_{n \geq 1}\right) \text{ est la suite } \left(\frac{1}{n+\alpha}\right)_{n \geq 1}}$

$\Delta\left((\Psi(n-\alpha))_{n \geq 1}\right)_k = \Psi(k+1-\alpha) - \Psi(k-\alpha) = \frac{1}{k-\alpha}$

$\boxed{\text{La suite } \Delta\left((\Psi(n-\alpha))_{n \geq 1}\right) \text{ est la suite } \left(\frac{1}{n-\alpha}\right)_{n \geq 1}}$

III Formule des compléments

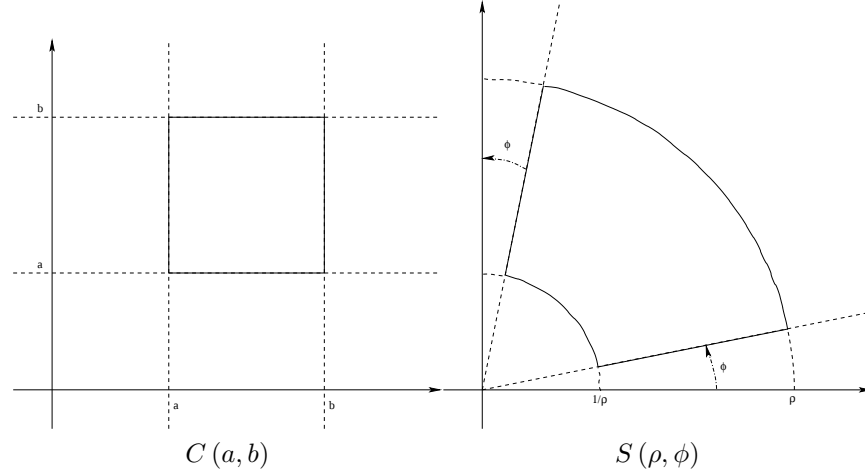
1: $\tan^{2x-1} \theta$ est continue, positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, le problème est un problème de convergence de l'intégrale en 0 et en $\frac{\pi}{2}$

- en 0 : $\tan^{2x-1} \theta \sim \theta^{2x-1} = \frac{1}{\theta^{1-2x}}$ dont l'intégrale converge si et seulement si $1-2x < 1$, c'est à dire $x > 0$

- en $\frac{\pi}{2}$: $\tan^{2x-1} \theta \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^{2x-1}}$ dont l'intégrale converge si et seulement si $2x - 1 < 1$, c'est à dire $x < 1$

$I(x)$ converge si et seulement si $x \in]0, 1[$

2: Voilà les deux figures demandées, données sans commentaires particuliers



3: $G(\rho, \varphi) = \iint_{S(\rho, \varphi)} \left(\frac{v}{u}\right)^{2x-1} e^{-(u^2+v^2)} du dv$

On pose $u = r \sin \theta$ et $v = r \cos \theta$, $du dv = r dr d\theta$ et le nouveau domaine devient : $r \in \left[\frac{1}{\rho}, \rho\right]$ et $\theta \in \left[\varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi\right]$

D'où $G(\rho, \varphi) = \int_{\frac{1}{\rho}}^{\rho} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \tan^{2x-1} \theta e^{-r^2} r dr d\theta = \int_{\frac{1}{\rho}}^{\rho} e^{-r^2} r dr \times \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \tan^{2x-1} \theta d\theta$
qui est le produit de 2 intégrales simples

On reconnaît l'opposé de la moitié de la dérivée de e^{-r^2} dans la première intégrale et on obtient :

$$G(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} \left(e^{-1/\rho^2} - e^{-\rho^2} \right) \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \tan^{2x-1} \theta d\theta$$

Donc, quand $\varphi \rightarrow 0$, $G(\rho, \varphi) \rightarrow \frac{1}{2} \left(e^{-1/\rho^2} - e^{-\rho^2} \right) \frac{\pi}{2 \sin \pi x}$

De plus, quand $\rho \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{2} \left(e^{-1/\rho^2} - e^{-\rho^2} \right) \frac{\pi}{2 \sin \pi x} \rightarrow \frac{\pi}{4 \sin \pi x}$

Finalement $\boxed{\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\varphi \rightarrow 0} G(\rho, \varphi) \right) = \frac{\pi}{4 \sin \pi x}}$

4: $F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) = \iint_{C\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)} \left(\frac{v}{u}\right)^{2x-1} e^{-(u^2+v^2)} du dv$

$$= \int_{\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} \int_{\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} v^{2x-1} e^{-v^2} \frac{1}{u^{2x-1}} e^{-u^2} du dv \text{ car le domaine est ici un rectangle}$$

$$F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) = \int_{\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} v^{2x-1} e^{-v^2} dv \times \int_{\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^{2x-1}} e^{-u^2} du \text{ qui est le produit}$$

de 2 intégrales simples

On pose $t = v^2$ dans la première et $t = u^2$ dans la seconde

$$F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{x-1} e^{-t} dt \times \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{-x} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{x-1} e^{-t} dt \times \int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt$$

Quand $\rho \rightarrow +\infty$, $\int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{x-1} e^{-t} dt \rightarrow \Gamma(x)$ et $\int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt \rightarrow \Gamma(1-x)$
car ce sont des intégrales convergentes en 0 et en $+\infty$

$$\text{Finalement } \boxed{\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{1}{4} \Gamma(x) \Gamma(1-x)}$$

$$F\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho\right) = \iint_{C(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho)} \left(\frac{v}{u}\right)^{2x-1} e^{-(u^2+v^2)} du dv$$

$$= \int_{\frac{\sin \varphi}{\rho}}^{\rho} \int_{\frac{\sin \varphi}{\rho}}^{\rho} v^{2x-1} e^{-v^2} \frac{1}{u^{2x-1}} e^{-u^2} du dv \text{ car le domaine est ici un rectangle}$$

$$F\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho\right) = \int_{\frac{\sin \varphi}{\rho}}^{\rho} v^{2x-1} e^{-v^2} dv \times \int_{\frac{\sin \varphi}{\rho}}^{\rho} \frac{1}{u^{2x-1}} e^{-u^2} du \text{ qui est le produit}$$

de 2 intégrales simples

On pose $t = v^2$ dans la première et $t = u^2$ dans la seconde

$$F\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho\right) = \frac{1}{2} \int_{\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}\right)^2}^{\rho^2} t^{x-1} e^{-t} dt \times \frac{1}{2} \int_{\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}\right)^2}^{\rho^2} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt$$

Quand $\varphi \rightarrow 0$, $F\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho\right) \rightarrow \frac{1}{4} \int_0^{\rho^2} t^{x-1} e^{-t} dt \times \int_0^{\rho^2} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt$ car ce
sont des intégrales convergentes en 0

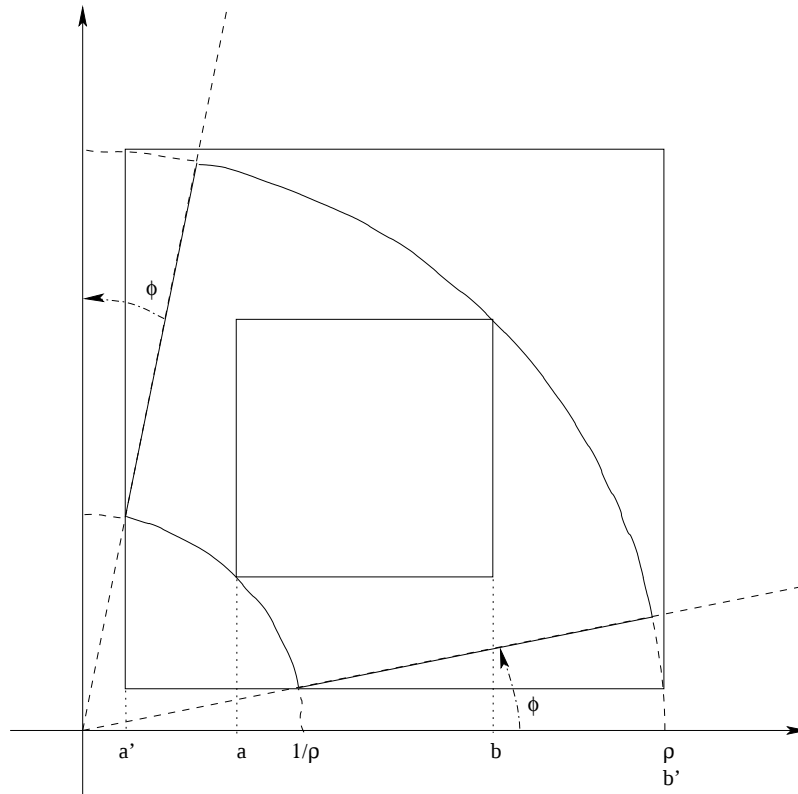
Quand $\rho \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \times \int_0^{+\infty} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt \rightarrow \frac{1}{4} \Gamma(x) \Gamma(1-x)$
car ce sont des intégrales convergentes en $+\infty$

$$\text{Finalement } \boxed{\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\varphi \rightarrow 0} F\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho\right) \right) = \frac{1}{4} \Gamma(x) \Gamma(1-x)}$$

- 5: Voici la figure demandée avec φ assez petit, on voit bien l'inclusion des domaines. Si φ n'est pas assez petit, alors le petit carré n'est pas entièrement inclus dans le secteur de couronne circulaire...

Deux sommets du petit carré sont bien sur les arcs de cercle, à cause de
" $\frac{1}{\rho\sqrt{2}}$ " et " $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$ "

Deux "sommets" du secteur de couronne sont bien sur les cotés su grand carré, à cause de " $\frac{\sin \varphi}{\rho}$,"



$$\text{Ici } [a, b] = \left[\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right] \text{ et } [a', b'] = \left[\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho \right]$$

Comme la fonction qu'on intègre est positive, l'inclusion des domaines donne des inégalités sur les intégrales dans le même sens

$$\text{Pour } \varphi \text{ assez petit } F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \leq G(\rho, \varphi) \leq F\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho\right)$$

6: On passe à la limite quand $\varphi \rightarrow 0$ puis quand $\rho \rightarrow +\infty$ et on obtient

$$\frac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(1-x) \leq \frac{\pi}{4\sin \pi x} \leq \frac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(1-x)$$

$$\text{Ce qui donne enfin } \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \text{ pour } x \in]0, 1[$$

Conclusion

1: On prend le logarithme dans la formule des compléments

$$\ln(\Gamma(x)) + \ln(\Gamma(1-x)) = \ln \pi - \ln(\sin \pi x), \text{ qu'on dérive}$$

$$\Psi(x) - \Psi(1-x) = -\pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} \text{ c'est à dire}$$

$$\boxed{\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot \pi x \text{ pour } x \in]0, 1[}$$

2:

$$\text{a) } \frac{1}{X^2 - \alpha^2} = \frac{A}{X - \alpha} + \frac{B}{X + \alpha} \quad (\alpha \neq 0, \text{ on a deux pôles simples})$$

On calcule A en multipliant par $X - \alpha$ et en prenant $X = \alpha$ et B en multipliant par $X + \alpha$ et en prenant $X = -\alpha$

$$A = \frac{1}{2\alpha} \text{ et } B = -\frac{1}{2\alpha} \quad \boxed{\frac{1}{X^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{X - \alpha} - \frac{1}{X + \alpha} \right)}$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k - \alpha} - \frac{1}{k + \alpha} \right) = \frac{1}{2\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k - \alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \alpha} \right)$$

qui ne pose pas de problème car $\alpha \in]0, 1[$

$$= \frac{1}{2\alpha} \left(\sum_{k=1}^n (\Psi(k+1-\alpha) - \Psi(k-\alpha)) - \sum_{k=1}^n (\Psi(k+1+\alpha) - \Psi(k+\alpha)) \right)$$

en utilisant la deuxième partie

$$= \frac{1}{2\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \Psi(k+1-\alpha) - \sum_{k=1}^n \Psi(k-\alpha) - \sum_{k=1}^n \Psi(k+1+\alpha) + \sum_{k=1}^n \Psi(k+\alpha) \right)$$

$$= \frac{1}{2\alpha} (\Psi(n+1-\alpha) - \Psi(1-\alpha) - \Psi(n+1+\alpha) + \Psi(1+\alpha)) \text{ car les termes se simplifient 2 par 2}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} (\Psi(1+\alpha) - \Psi(1-\alpha)) + \frac{1}{2\alpha} (\Psi(n+1-\alpha) - \Psi(n+1+\alpha))}$$

3:

$$\text{a) Il suffit de montrer que } \Psi' \text{ est positive, c'est à dire que } \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$$

est positive ou encore $\Gamma'^2 \leq \Gamma''\Gamma$

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t dt \right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t/2} t^{(x-1)/2} \times e^{-t/2} t^{(x-1)/2} \ln t dt \right)^2$$

forme à laquelle on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t dt \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} (e^{-t/2} t^{(x-1)/2})^2 dt \times \int_0^{+\infty} (e^{-t/2} t^{(x-1)/2} \ln t)^2 dt$$

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t dt \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \times \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln^2 t dt \text{ ce qui est bien le résultat demandé}$$

b) Ψ est donc croissante $\Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \geq 0$ et comme $\alpha \in]0, 1[$

$$\Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n)$$

$$\Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leq (\Psi(n+2) - \Psi(n+1)) + (\Psi(n+1) - \Psi(n))$$

On a bien
$$0 \leq \Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$

4: On a donc $\Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et enfin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} (\Psi(1+\alpha) - \Psi(1-\alpha))$$

ce qui est le résultat donné
par Maple