

I Cas $n = 1$ et méthode d'Euler

I.A - La méthode d'Euler

I.A.1) Quand N est grand, la longueur de l'intervalle $[k/N, (k+1)/N]$ est petite, et comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, la dérivée est quasi constante sur cet intervalle.

Une valeur approchée de la variation de f est alors obtenue en prenant la valeur de la dérivée en k/N .

I.A.2) Par exemple :

```
Euler:=proc(f,N)
local y,Suite,k;
y:=1;Suite:=[y];
for k from 1 to N do
  y:=y+f(y)/N;Suite:=[op(Suite),y]
end do;
Suite
end proc;
```

I.B - Préliminaires

I.B.1) On a une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et sans second membre.

De plus, on a une condition initiale $y(0) = 1$. Cette équation a donc une solution unique sur $\mathbb{R}$, de la forme $y = ke^x$, avec ici $k = 1$, compte tenu de la condition initiale.

I.B.2) On connaît l'inégalité : $t - 1 < E(t) \leq t$. Pour $t > 0$, cela donne : $\frac{t-1}{t} < \frac{E[t]}{t} \leq 1$.

Compte tenu du théorème d'encadrement, la limite en $+\infty$ de $\frac{E[t]}{t}$ est bien 1.

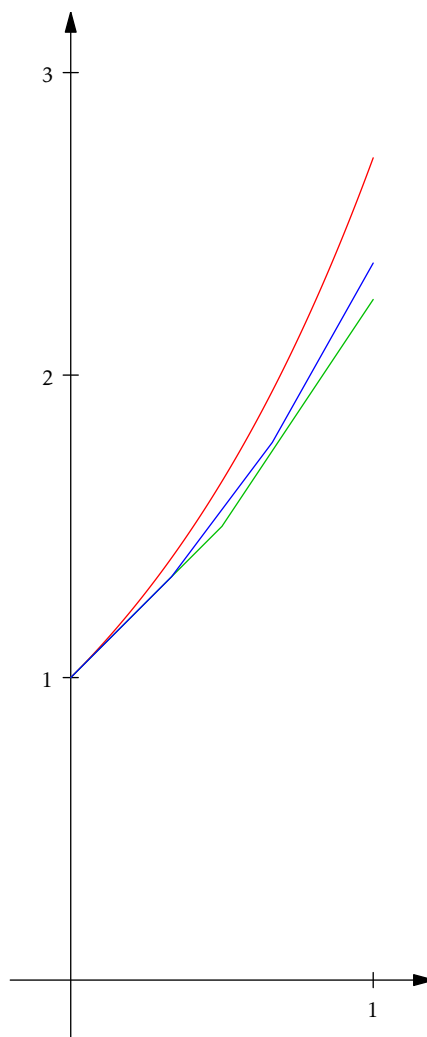
I.C - Mise en œuvre de la méthode d'Euler pour $\mathcal{E}_1$

I.C.1) Ici $f(y) = y$, donc $f(\tilde{y}_k) = \tilde{y}_k$, ce qui permet de mettre ce terme en facteur.

I.C.2) La suite $(\tilde{y}_k)$ est géométrique, on a donc $\tilde{y}_k = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k \tilde{y}_0 = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k$.

I.C.3) a) On va tracer :

- la solution exacte, l'exponentielle, en rouge,
- la première approximation d'Euler, y_2 en vert,
- et enfin, la seconde approximation d'Euler, y_3 , en bleu.



- b) y_N est affine sur l'intervalle $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ et vaut respectivement $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^k$ et $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{k+1}$ aux deux bornes.

La fonction proposée par l'énoncé vaut bien $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^k$ pour $t = \frac{k}{N}$

et $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^k \left(\frac{k+1}{N} + 1 - \frac{k}{N}\right) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{k+1}$ pour $t = \frac{k+1}{N}$.

C'est donc la fonction affine cherchée.

- c) Remarquons d'abord que la formule est valable pour $t = 1$ car $E[N] = N$.

Ensuite, si $t \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$, alors $Nt \in [k, k+1[$, et donc, $k = E[Nt]$.

Sur cette intervalle, la formule donnée par l'énoncé est bien la même que dans la question précédente.

Pour t , on a décrit complètement l'intervalle $[0, 1]$, ce qui assure le résultat.

$$\begin{aligned} \text{I.C.4) } y_N(t) &= \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{E[Nt]} \left(t + 1 - \frac{E[Nt]}{N}\right) = e^{E[Nt] \ln(1+1/N)} \left(t + 1 - \frac{E[Nt]}{N}\right) \\ &= e^{tE[Nt](1/(Nt) + o(1/(Nt)))} \left(t + 1 - t \frac{E[Nt]}{Nt}\right) \end{aligned}$$

L'exposant de l'exponentielle tend clairement vers t donc l'exponentielle tend vers e^t .

Comme le second terme du produit tend vers 1, $y_N(t) \rightarrow e^t$, ce qui est le résultat demandé.

I.D - Étude d'un cas particulier avec second membre

I.D.1) On a une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec second membre continu sur $\mathbb{R}$, et condition initiale en 0.

Sans second membre, les solutions sont de la forme $y = k e^t$.

On cherche une solution particulière à l'équation avec second membre sous la forme

$$y = e^{-t}(a \cos(t) + b \sin(t)).$$

Alors, $y' = e^{-t}(-a \sin(t) + b \cos(t)) - y$ et donc, $y' - y = e^{-t}((-2a + b) \cos(t) + (-a - 2b) \sin(t))$.

Il suffit donc que a et b vérifient la système :
$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ -a - 2b = -2 \end{cases}$$

$a = 0$ et $b = 1$ conviennent.

La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y = k e^t + e^{-t} \sin(t)$.

$y(0) = 0$ donne $k = 0$.

La solution de l'équation différentielle avec la condition initiale est donc $y = e^{-t} \sin(t)$.

I.D.2) On remarque que $y = e^{-t} \sin(t) = \operatorname{Im}(e^{(-1+i)t})$.

L'exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.

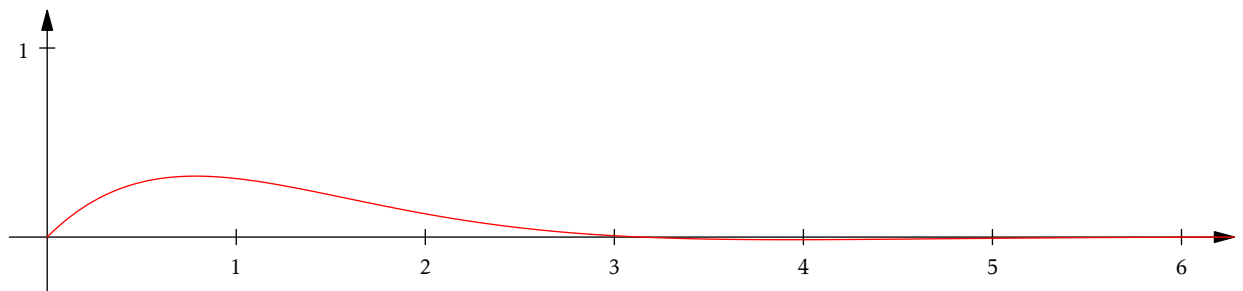
$$\text{On a donc } \forall t \in \mathbb{R}, e^{(-1+i)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1+i)^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n e^{3in\pi/4}}{n!} t^n.$$

Ce qui donne en prenant la partie imaginaire $\forall t \in \mathbb{R}, y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) t^n$.

I.D.3) Comme le suggère l'énoncé, on zappe l'étude (facile) de la fonction...

On trouve, si on cherche, un maximum en $\pi/4$ et un minimum, peu visible, en $5\pi/4$.

Ce qui donne



I.D.4) h est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$, la singularité en $+\infty$.

Comme $|y(t)| \leq e^{-t}$, y est intégrable, donc son intégrale converge.

De la même façon, l'intégrale de $e^{-t} \cos(t)$ converge aussi.

$$\text{On a donc } \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+i)t} dt \right) = \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i} \right]_0^{+\infty} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1-i} \right) = \frac{1}{2}$$

II Généralités

II.A - Quelques propriétés qualitatives des solutions de $\mathcal{E}_n$

II.A.1) $y'' - y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.

L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$, de racines simples $r = 1$ et $r = -1$.

Les solutions réelles sont donc $y = A e^t + B e^{-t}$ avec A et B réels, tandis que les solutions complexes sont $y = A e^t + B e^{-t}$ avec A et B complexes !

II.A.2) y est n -fois dérivable, donc $y^{(n)}$ aussi, donc y est $2n$ -fois dérivable, donc $y^{(n)}$ aussi...

Par récurrence très élémentaire, y est indéfiniment dérivable, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

II.A.3) On dérive donc la relation $y^{(n)} - y = 0$, ce qui donne $y^{(n+1)} - y' = 0$, ou encore $y^{(n)} - y' = 0$.

On a bien y' qui est aussi solution de $\mathcal{E}_n$.

II.A.4) Si y est une solution à valeurs réelles de $\mathcal{E}_n$, c'est aussi une solution à valeurs complexes !

On prend donc $\tilde{y} = y$ qui est bien une solution à valeurs complexes, et on a bien $y = \Re(\tilde{y})$ car y et $\tilde{y}$ sont réelles et égales !

Réciproquement, comme $\mathcal{E}_n$ est à coefficients réels, les parties réelles des solutions à valeurs complexes sont aussi solutions, et à valeurs réelles !

II.B - Structure de l'ensemble des solutions

II.B.1) Il suffit de montrer que, dans l'ensemble des applications $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

l'application $\varphi : y \rightarrow y^{[n]} - y$ est un endomorphisme.

Ceci est élémentaire compte tenu de la linéarité de la dérivation et que la dérivée d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ainsi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, son noyau est bien un espace vectoriel réel.

$$\text{II.B.2) On a } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \text{ donc, } Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } y \text{ est solution de } \mathcal{E}_n \text{ si et seulement si } Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Mais } \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ si et seulement si } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a bien y solution de $\mathcal{E}_n$ si et seulement si $Y' = AY$, avec la matrice A précisée ci dessus.

II.B.3) θ est linéaire par linéarité de la dérivation et de la prise de la valeur d'une application en un point.

θ est bijective car $Y' = AY$, système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients

$$\text{constants sans second membre, avec la condition initiale } Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix},$$

possède (surjective) une solution unique (injective).

On a donc montré que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n , celle de $\mathbb{R}^n$.

III Les cas $n = 3$ et $n = 4$

III.A - Le cas $n = 3$: méthode de variation de la constante

III.A.1) Quand on a $y = e^t$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y^{(n)} = y$, donc y est solution de $\mathcal{E}_n$.

Ceci est bien sûr encore vrai pour $n = 3$.

III.A.2) $z(t) = y(t)e^{-t}$, qu'on peut aussi écrire $y(t) = z(t)e^t$. On note h la fonction exponentielle, jamais nulle.

On a donc $y''' = z'''h + 3z''h + 3z'h + z(t)h$.

L'équation différentielle devient donc $z'''h + 3z''h + 3z'h = 0$, ou encore $z''' + 3z'' + 3z' = 0$.

III.A.3) On pose $Z = z'$, l'équation différentielle devient $Z'' + 3Z' + 3Z = 0$.

On a une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 3 = 0$, dont les racines sont $r_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Sur $\mathbb{C}$, on a donc $Z = A'e^{r_1 t} + B'e^{r_2 t}$.

Sur $\mathbb{R}$, on a $Z = \left(\alpha' \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \beta' \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-3t/2}$.

Sur $\mathbb{C}$, on a donc $z = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + C$.

Sur $\mathbb{R}$, on a $z = \left(\alpha \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \beta \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-3t/2} + \gamma$.

III.A.4) Sur $\mathbb{C}$, on a donc $y = Ae^{(r_1+1)t} + Be^{(r_2+1)t} + Ce^t$.

Sur $\mathbb{R}$, on a $z = \left(\alpha \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \beta \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-t/2} + \gamma e^t$.

Une solution périodique ne doit pas contenir d'exponentielle à coefficients réels, ce qui implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, elle est donc nulle.

Il n'y a pas de solution périodique non nulle, encore moins 2π périodique non nulle...

III.B - Le cas $n = 4$: recherche de séries entières solutions

III.B.1) On détermine le rayon de convergence de la série entière $A(t)$ en appliquant le théorème de d'Alembert à $t_0 \neq 0$.

On pose $u_k = \left| \frac{t_0^{4k}}{(4k)!} \right|$. On calcule $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{t_0^4}{(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Il y a toujours convergence, le rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

Il en est de même, avec quelques petites différences de calcul, pour les trois autres séries entières.

Sur l'ouvert de convergence, la somme d'une série entière se dérive terme à terme.

On a donc $B'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k}}{(4k)!} = A(t)$. De même $C'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} = B(t)$.

Enfin, $D'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} = C(t)$.

III.B.2) a) On a $\sigma_k = (1 + (-1)^k)(1 + i^k)$.

Si k est impair, $(-1)^k = -1$, donc $\sigma_k = 0$.

b) Si $k = 2p$, avec p impair, alors $i^k = (-1)^p = -1$, donc $\sigma_k = 0$.

Si $k = 4p$, alors $(-1)^k = 1$ et $i^k = (-1)^{2p} = 1$, donc $\sigma_k = 4$.

$\sigma_k \neq 0$ si et seulement si k est un multiple de 4.

c) $e^t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} i^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-i)^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_k \frac{t^k}{k!} = \sum_{p=0}^{+\infty} 4 \frac{t^{4p}}{(4p)!}$.

On a donc $A(t) = \frac{1}{4} (e^t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t + \cos t)$.

d) On a $B' = A$ et $B(0) = 0$, donc $B(t) = \frac{1}{4} (e^t - e^{-t} - i e^{it} + i e^{-it}) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t + \sin t)$.

De même $C' = B$ et $C(0) = 0$, donc $C(t) = \frac{1}{4} (e^t + e^{-t} - e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t - \cos t)$.

Enfin $D' = C$ et $D(0) = 0$, donc $D(t) = \frac{1}{4} (e^t - e^{-t} + i e^{it} - i e^{-it}) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t - \sin t)$.

III.B.3) On a $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $y^{(4)}(t) = \sum_{k=4}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)a_k t^{k-4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4} t^k$ sur $\mathbb{R}$, en réindexant la somme.

Comme y est solution de l'équation différentielle,

on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} ((k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4} - a_k) t^k = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ce qui donne $\forall k \in \mathbb{N}, (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4} - a_k = 0$.

Ainsi, on peut déterminer les a_{4k} en fonction de a_0 , les a_{4k+1} en fonction de a_1 , les a_{4k+2} en fonction de a_2 et enfin les a_{4k+3} en fonction de a_3 .

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, a_{4k} = \frac{a_0}{(4k)!}$.

La vérification initiale est immédiate.

Si on admet la propriété au rang k ,

alors $a_{4k+4} = a_{4(k+1)} = \frac{a_{4k}}{(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)} = \frac{a_0}{(4k+4)!}$.

La propriété est donc démontrée.

De la même façon, on montre que $a_{4k+1} = \frac{a_1}{(4k+1)!}$.

On montre aussi que $a_{4k+2} = 2 \frac{a_2}{(4k+2)!}$, le 2 en facteur est nécessaire pour la vérification initiale et n'intervient pas dans l'hérédité.

Enfin, on obtient $a_{4k+3} = 6 \frac{a_3}{(4k+3)!}$, avec le même argument pour le 6.

On reprend maintenant en séparant les termes de la série entière

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k} t^{4k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k+1} t^{4k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k+2} t^{4k+2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k+3} t^{4k+3} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k}}{(4k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} + 2a_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} + 6a_3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ &= a_0 A(t) + a_1 B(t) + 2a_2 C(t) + 6a_3 D(t). \end{aligned}$$

Comme (A, B, C, D) sont combinaison linéaires de $(\text{ch}, \text{sh}, \cos, \sin)$, il en est de même de y .

On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = z_1 \text{ch}(t) + z_2 \text{sh}(t) + z_3 \cos(t) + z_4 \sin(t)$.

III.B.4) La famille $(\text{ch}, \text{sh}, \cos, \sin)$ est donc génératrice de $\mathcal{S}_4(\mathbb{C})$ qui est de dimension 4, c'est donc une base.

Comme ce sont des fonctions à valeurs réelles, c'est aussi une base de $\mathcal{S}_4(\mathbb{R})$.

III.B.5) Les fonctions de la base donnée sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même de toutes les solutions.

Le mieux est d'utiliser le développement en série entière avec $a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$.

On a donc $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$ et $a_3 = \frac{-1}{6}$.

$$\text{Donc } y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+3}}{(4k+3)!}$$

IV Retour au cas général

IV.A - Expression des solutions dans le cas général

IV.A.1) On a $y_k(t) = e^{\omega^k t}$, $\omega^n = 1$, donc $y_k^{(n)}(t) = (\omega^k)^n e^{\omega^k t} = (\omega^n)^k e^{\omega^k t} = e^{\omega^k t} = y_k(t)$

On a bien $y_k \in \mathcal{E}_n$.

IV.A.2) On a $y_k(t) = e^{\omega^k t} = e^{\cos(\frac{2k\pi}{n})t} e^{i \sin(\frac{2k\pi}{n})t}$.

Le module de $y_k(t)$ est donc $e^{\cos(\frac{2k\pi}{n})t}$.

On considère une combinaison linéaire nulle des y_k , $a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_{n-1} y_{n-1} = 0$.

On considère, s'il existe, p , le premier k tel que $a_k \neq 0$.

Alors en $+\infty$, la somme est à la fois nulle, et à la fois équivalente en module à $a_p e^{\cos(\frac{2p\pi}{n})t}$, ce qui est impossible.

Il n'y a donc pas de coefficient a_k non nul, la famille est libre.

IV.A.3) La famille donnée des y_k est libre de n vecteurs, et formée de solutions de $\mathcal{E}_n$, qui est dimension n .

Cette famille est donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

La forme générale des éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ est donc $y = a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_{n-1} y_{n-1} = 0$.

IV.A.4) les y_k sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, il en est de même de leurs combinaisons linéaires !

IV.B - Étude des solutions 2π -périodiques de $\mathcal{E}_n$

IV.B.1) On va donc calculer les coefficients de Fourier de y' , qu'on traitera systématiquement par parties en primitivant y' .

$$a_0(y') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y'(t) dt = 0 = 0 \cdot b_1(y), \text{ car } y \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

Maintenant, on a $k \geq 1$.

$$a_k(y') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y'(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} [y(t) \cos(kt)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) k \sin(kt) dt = k \cdot b_k(y).$$

$$b_k(y') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y'(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} [y(t) \sin(kt)]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) k \cos(kt) dt = -k \cdot a_k(y).$$

IV.B.2) $c_0(y') = a_0(y') = 0 = i \cdot 0 \cdot c_0(y)$.

Maintenant, on a $k \geq 1$.

$$c_k(y') = \frac{1}{2} (a_k(y') - i b_k(y')) = \frac{1}{2} (k b_k(y) + i k a_k(y)) = i k (a_k(y) - i b_k(y)) = i k c_k(y).$$

$$c_{-k}(y') = \frac{1}{2} (a_k(y') + i b_k(y')) = \frac{1}{2} (k b_k(y) - i k a_k(y)) = i (-k) (a_k(y) + i b_k(y)) = i (-k) c_{(-k)}(y).$$

On a bien montré que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k(y') = i k c_k(y)$.

On applique n fois cette propriété et l'égalité $y^{(n)} = y$, et donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k(y^{(n)}) = i^n k^n c_k(y) = c_k(y)$.

Ce qui donne $(i^n k^n - 1) c_k(y) = 0$.

Si n est impair, i^n est imaginaire, donc $(i^n k^n - 1) \neq 0$, et enfin $c_k(y) = 0$.

IV.B.3) Si f est T -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point et sa somme est la demi somme des limites à droite et à gauche au point considéré.

Une solution 2π -périodique de $\mathcal{E}_n$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.

Sa série de Fourier converge donc en tout point et la somme de sa série de Fourier est elle-même.

Si n est impair, les c_k (et c_{-k}) sont nuls, donc les a_k et les b_k . La série de Fourier est donc nulle, et donc la fonction aussi !

Si n est pair, on pose $n = 2p$, on a encore l'égalité $(i^n k^n - 1) c_k(y) = 0$,

qui devient ici $((-1)^p k^{2p} - 1) c_k(y) = 0$.

Le coefficient de c_k est nul si et seulement si $k = \pm 1$ et p pair.

Il n'y a des solutions non nulles 2π -périodiques que si n est un multiple de 4, et alors seuls a_1 et b_1 peuvent ne pas être nuls.

Ces solutions non nulles 2π -périodiques sont donc de la forme $y(t) = a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)$ à condition que n soit un multiple de 4.