

OPTION M - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option M, comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On donne une application continue ϕ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et l'on note E_K l'espace vectoriel sur K des solutions à valeurs dans K de l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' + \phi(x)y = 0,$$

c'est-à-dire des applications deux fois dérivables y de \mathbb{R} dans K qui vérifient :

$$y''(x) + \phi(x)y(x) = 0 \text{ pour tout réel } x.$$

On rappelle que, si x est réel, l'application $u \mapsto (u(x), u'(x))$ de E_K dans K^2 est bijective.

PARTIE I

1°) Montrer que, si (u_1, u_2) est une base de $E_{\mathbb{R}}$, (u_1, u_2) est une base de $E_{\mathbb{C}}$.

2°) Soit (u, v) un élément de E_K^2 . On note $C_{(u,v)}$ (plus simplement : $C_{u,v}$) l'application de \mathbb{R} dans K définie par : $C_{u,v}(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$.

(a) - Montrer que $C_{u,v}$ est constante.

(b) - Que dire de l'application $\Delta : (u, v) \rightarrow C_{u,v}(0)$ de E_K^2 dans K ?

(c) - A quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur (u, v)) a-t'on :

$$C_{u,v}(0) \neq 0 ?$$

3°) Montrer que les éléments de $E_{\mathbb{R}}$ qui ne s'annulent pas sont exactement les fonctions de la forme εe^f , où f est une application deux fois dérivables de \mathbb{R} dans K vérifiant :

$$f''(x) + [f'(x)]^2 + \phi(x) = 0 \text{ pour tout réel } x, \text{ et : } |\varepsilon| = 1.$$

4°) Si u appartient à E_K , et ne s'annule pas, montrer que (u, v) est une base de E_K ,

où v est l'application : $x \mapsto u(x) \cdot \int_0^x \frac{1}{[u(t)]^2} dt$ de \mathbb{R} dans K .

5°) On considère une application de classe C^2 , strictement monotone ψ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telle que : $\phi \circ \psi = \phi$. On note, pour u dans E_K , $L_{K,\psi}(u)$, l'application : $x \mapsto u(\psi(x))$ de \mathbb{R} dans K . On envisage les énoncés :

$$(A) \quad (\forall u \in E_K) (L_{K,\psi}(u) \in E_K)$$

$$(B) \quad \psi \text{ est une isométrie de } \mathbb{R} \text{ (i.e. } (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) (|\psi(x) - \psi(y)| = |x - y|)).$$

Montrer que (B) implique (A). Montrer que (A) implique (B) dès que ϕ n'est pas la fonction nulle. Montrer enfin que, si (B) est vérifié, l'application $L_{K,\psi} : u \rightarrow L_{K,\psi}(u)$ de E_K dans lui-même est un isomorphisme linéaire, qui vérifie : $\det(L_{K,\psi}) = \psi'(0)$.

6°) On dit qu'une base (u_1, u_2) de E_K est adaptée si u_1 est paire, u_2 est impaire.

(a) - Si (u_1, u_2) est une base adaptée de E_K , montrer que les bases adaptées de E_K sont exactement les bases $(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2)$ avec λ_1, λ_2 dans $K - \{0\}$.

(b) - Montrer que, si E_K admet une base adaptée, ϕ est paire.

(c) - On suppose réciproquement que ϕ est paire. Montrer que E_K admet une base adaptée. [On pourra, soit raisonner directement, soit considérer l'application L_{K,ψ_0} , où ψ_0 est l'application : $x \mapsto -x$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}].

(d) - Déterminer toutes les bases adaptées de $E_{\mathbb{R}}$ dans les cas suivants :

- (i) ϕ est constante, prenant la valeur réelle k .
- (ii) ϕ est la fonction $x \mapsto -1 - x^2$.
- (iii) ϕ est la fonction $x \mapsto \cos^2 x + \cos x - 1$.

PARTIE II

Dans cette partie : on suppose ϕ périodique de période 1 ; on dit qu'un élément u de E_K est pseudo-périodique s'il existe un élément λ de K tel que : $u(x+1) = \lambda u(x)$ pour tout réel x ; on dit que ϕ vérifie la condition (S) si 0 est le seul élément pseudo-périodique de $E_{\mathbb{R}}$.

1°) (a) - Si $\beta = (u_1, u_2)$ est une base de $E_{\mathbb{R}}$, on note, pour x réel, $U_{\beta}(x)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u'_1(x) & u'_2(x) \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice $M_{\beta} = [U_{\beta}(x)]^{-1} \cdot U_{\beta}(x+1)$ est une matrice de déterminant 1, indépendante de x .

(b) - Avec les mêmes notations, quel lien y a-t-il entre M_{β} et l'endomorphisme L_{K,ψ_1} , où ψ_1 est l'application $x \mapsto x+1$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?

(c) - Montrer l'équivalence :

ϕ vérifie la condition (S) \iff Les valeurs propres dans \mathbb{C} de L_{K,ψ_1} sont de la forme $e^{+i\theta}, e^{-i\theta}$, avec θ dans $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$.

En déduire que, si ϕ vérifie la condition (S), tout élément de E_K est borné.

2°) Soient a, b des réels vérifiant : $a < b$, h une application deux fois dérivable de $[a, b]$ dans \mathbb{R} tels que : $h(x) \cdot h''(x) = 0$ pour tout x dans $[a, b]$.

(a) - Montrer que $F = \{ x \in [a, b] \mid h(x) = 0 \}$ est un intervalle fermé de $[a, b]$.

(b) - En envisageant différents cas, montrer que h est une fonction affine sur $[a, b]$.

... / ...

3°) Soient a, b des réels vérifiant : $a < b$, w une application de classe C^2 de $[a, b]$ dans \mathbb{R} tels que :

$$(U) \quad \begin{cases} (1) & w(a) = w(b) = 0 \\ (2) & (\forall x \in]a, b[) (w(x) > 0) \\ (3) & \text{L'intégrale } I = \int_a^b \frac{|w''(x)|}{w(x)} dx \text{ converge.} \end{cases}$$

On pose $M = \sup_{x \in]a, b[} w(x)$

(a) - Montrer l'inégalité : $I \geq J = \frac{1}{M} \cdot \sup_{a < x_1 < x_2 < b} |w'(x_2) - w'(x_1)|$.

(b) - En utilisant II - 2°), montrer que l'on a en fait : $I > J$. (On conseille de raisonner par l'absurde, et de considérer alors une fonction h convenable).

(c) - Soit c élément de $]a, b[$ tel que $M = w(c)$. A l'aide de (b) et de réels x_1, x_2 (avec : $x_1 \in]a, c[$, $x_2 \in]c, b[$) bien choisis, montrer :

$$(b-a) \cdot I > 4.$$

4°) On suppose dans cette question : $\int_0^1 \phi(x) dx > 0$. Montrer qu'un élément

pseudo-périodique u de $E_{\mathbb{R}}$ s'annule sur $[0, 1]$. (On conseille de raisonner par l'absurde, et de considérer alors la fonction : $v = \frac{u'}{u}$).

5°) On suppose dans cette question : $0 < \int_0^1 \phi(x) dx \leq 4$, et ϕ à valeurs positives.

Montrer, en utilisant les questions précédentes, que tout élément de $E_{\mathbb{R}}$ est borné.

◊◊◊◊
◊◊◊◊