

CORRIGÉ DE SUJET
X-ENS - FILIÈRE PC - SESSION 2024

15 avril 2024

I Préliminaires

Question 1. On a $\det(R)\det(R^\top) = \det(I_d)$ ce qui donne $\det(R)^2 = 1$ avec $\det(R) \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.

Question 2. On vérifie les propriétés constitutives d'un produit scalaire :

— symétrie : pour $A, B \in M_d(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\top B) = \text{Tr}((B^\top A)^\top) = \text{Tr}(B^\top A) = \langle B, A \rangle$$

— linéarité à gauche : pour $A, B, C \in M_d(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda A + B, C \rangle &= \text{Tr}((\lambda A + B)^\top C) \\ &= \lambda \text{Tr}(A^\top C) + \text{Tr}(B^\top C) \\ &= \lambda \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle. \end{aligned}$$

— positivité et définie positivité : pour $A \in M_d(\mathbb{R})$,

$$\langle A, A \rangle = \text{Tr}(A^\top A) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} A[i, j]^2 \geq 0$$

Par ailleurs, on a $\langle A, A \rangle = 0$ si et seulement si $A[i, j] = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1; d \rrbracket$.

Question 3-a. Soit $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in M_d(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} &= \text{Tr}((Av)^\top u) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j} v_j u_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle uv^\top, A \rangle &= \langle A, uv^\top \rangle \\ &= \text{Tr}(A^\top uv^\top) \\ &= \sum_{i=1}^d (A^\top u)_{i,1} v_{1,i} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{j,i} u_j v_i \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^\top, A \rangle$.

Question 3-b. Pour $A, B \in M_d(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d A_{i,k} B_{k,i}$$

et on obtient la même chose en développant $\text{Tr}(BA)$.

Question 3-c. Pour $A, B, C \in M_d(\mathbb{R})$,

$$\langle A, BC \rangle = \text{Tr}(C^\top B^\top A) = \langle B^\top A, C \rangle$$

et

$$\langle A, BC \rangle = \text{Tr}(C^\top B^\top A) = \text{Tr}(AC^\top B^\top) = \langle AC^\top, B \rangle.$$

Question 4-a. Soit $R \in O_d(\mathbb{R})$ et $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$. La relation $(RR^\top)[i, i] = 1$ donne

$$\sum_{k=1}^d R[i, k]^2 = 1$$

Comme R est à coefficients réels, ceci donne $R[i, i]^2 \leq 1$, d'où le résultat.

Question 4-b. On a :

$$\langle D, R \rangle = \sum_{k=1}^d \alpha_k R[k, k]$$

D'où

$$|\langle D, R \rangle| \leq \sum_{k=1}^d \alpha_k |R[k, k]| \leq \sum_{k=1}^d \alpha_k = \text{Tr}(D)$$

d'après le résultat de la I-4-a.

II Ensemble des déplacements de \mathbb{R}^d

Question 5-a. Soit $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. On a :

$$|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |R(a - b)| = |a - b|$$

puisque l'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto Rx$ est une isométrie pour la norme euclidienne canonique de \mathbb{R}^d .

Question 5-b. Soit $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ notés $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$. Il est évident que $g = g'$ implique $\phi_g = \phi_{g'}$.

Supposons que $\phi_g = \phi_{g'}$. En évaluant en $x = 0$, on obtient $\tau = \tau'$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^d, (R - R')x = 0$, ce qui donne $R = R'$ (la matrice $R - R'$ est de rang nul).

Finalement $g = g'$, ce qui achève d'établir l'équivalence voulue.

Question 5-c. En posant $e = (0, I_d)$, on a $\phi_e = id_{\mathbb{R}^d}$, et c'est le seul d'après la question précédente.

Question 6-a. Soit $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ notés $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}\phi_{g'}(\phi_g(x)) &= R'(Rx + \tau) + \tau' \\ &= R'Rx + (R'\tau + \tau')\end{aligned}$$

En posant $g'' = (R'\tau + \tau', R'R)$, on a bien $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$.

L'unicité est garantie par le résultat de la II-5-b.

Question 6-b. Pour $g_1, g_2, g_3 \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, l'associativité de la composition donne :

$$\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2 g_3} = \phi_{g_1 g_2} \circ \phi_{g_3}$$

c'est-à-dire

$$\phi_{g_1(g_2 g_3)} = \phi_{(g_1 g_2)g_3}$$

D'après le résultat de la II-5-b, ceci donne $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3$.

Question 7-a. On note $g = (\tau, R)$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\phi_g(x) = y \iff Rx = y - \tau \iff x = R^\top(y - \tau)$$

Ainsi, tout $y \in \mathbb{R}^d$ admet un unique antécédent $x \in \mathbb{R}^d$ par ϕ_g , ce qui démontre la bijectivité de celle-ci.

Question 7-b. Reprenant les mêmes notations qu'à la réponse précédente, le calcul mené donne $\phi_g(x) = y \iff y = \phi_{g'}(x)$ avec $g' = (-R^\top \tau, R^\top)$.

Ainsi $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$ et ce g' est unique d'après II-5-b.

Question 7-c. Pour tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\phi_{ge} = \phi_g \circ \phi_e = \phi_g$$

et $\phi_{eg} = \phi_g$ par le même calcul. Le résultat de la II-5-b donne alors $ge = eg = g$.

De même, pour tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$,

$$\phi_{gg^{-1}} = \phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_g \circ \phi_g^{-1} = id = \phi_e$$

d'où $gg^{-1} = e$ d'après II-5-b.

On obtient $g^{-1}g = e$ de la même manière.

Question 8. Si $gg' = g'g$ pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall R, R' \in SO_d(\mathbb{R}), \forall \tau, \tau' \in \mathbb{R}^d, RR' = R'R \text{ et } R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau \quad (\star)$$

La seconde égalité donne, pour $\tau = 0$,

$$\forall R \in SO_d(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^d, Rx = x$$

Ainsi, $SO_d(\mathbb{R})$ se réduit à I_d , ce qui impose $d = 1$.

Réciproquement, pour $d = 1$, on a bien les conditions (\star) .

Ainsi on a $(\forall g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d), g'g = gg')$ si et seulement si $d = 1$.

III Distance à déplacement près

Question 9-a. Soit $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} (gg') \cdot \mathbf{z} &= (\phi_g(\phi_{g'}(z_i)))_{1 \leq i \leq n} \\ &= g \cdot (g' \cdot \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Question 9-b. Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tels que $\mathbf{x} = g \cdot \mathbf{y}$.

Ceci donne $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = \phi_g(y_i)$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, y_i = \phi_{g^{-1}}(x_i)$, c'est-à-dire $\mathbf{y} = g^{-1} \cdot \mathbf{x}$.

Question 10-a. Soit $x, y \in \mathcal{E}_n^d(\mathbb{R})$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

Alors

$$\begin{aligned} \|g \cdot \mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\|^2 &= \sum_{k=1}^n |\phi_g(y_k) - \phi_g(x_k)|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^2 \text{ d'après 5-a} \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

Question 10-b. Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n^d(\mathbb{R})$. La question précédente montre que, pour tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| = \|g \cdot (g^{-1} \cdot \mathbf{y}) - g \cdot \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - g^{-1} \cdot \mathbf{y}\|$$

et comme l'application $g \mapsto g^{-1}$ est une bijection de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même, on obtient

$$\inf_{g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{x} - g^{-1} \cdot \mathbf{y}\| = \inf_{h \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{x} - h \cdot \mathbf{y}\| = \delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Ceci donne le résultat.

Question 10-c. L'application $(M, N) \in M_{d,n}(\mathbb{R})^2 \mapsto \text{Tr}(M^T N)$ étant un produit scalaire sur $M_{d,n}(\mathbb{R})$ (par extension du raisonnement développé en I-2), on en déduit l'inégalité triangulaire sur $\mathcal{E}_n^d(\mathbb{R})$:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{E}_n^d(\mathbb{R}), \quad \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$$

puisque $\|\mathbf{a}\|$ n'est rien d'autre que la norme de la matrice obtenue en juxtaposant les colonnes $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$.

Ainsi, pour $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_n^d(\mathbb{R})$ et $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|g \cdot (g' \cdot \mathbf{y}) - g \cdot \mathbf{x}\|$$

On utilise ensuite le résultat de 10-a pour simplifier la seconde norme :

$$\|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|g' \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Question 10-d. Fixons $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_n^d(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\forall g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d), \quad \delta(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \leq \|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|g' \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

On fixe $g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et on passe à la borne inférieure selon $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ dans l'inégalité précédemment obtenue.

L'application $g \mapsto gg'$ étant une bijection de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même (de réciproque $g \mapsto g(g')^{-1}$), on obtient :

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \|g' \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Puis, on passe alors à la borne inférieure selon $g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$:

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

ce qui est l'inégalité recherchée (grâce aux diverses propriétés de symétrie de $\delta(\cdot, \cdot)$).

Question 11-a. Supposons que $c(\mathbf{x}) \cap c(\mathbf{y}) \neq \emptyset$. Alors on dispose de $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tels que $g \cdot \mathbf{x} = g' \cdot \mathbf{y}$. En appliquant g^{-1} de part et d'autre (et avec 9-a), on obtient l'existence de $h \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathbf{y} = h \cdot \mathbf{x}$.

Comme l'application $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \mapsto gh$ est bijective (de réciproque $g \mapsto gh^{-1}$), on obtient

$$\{g \cdot \mathbf{x} : g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\} = \{(gh) \cdot \mathbf{x} : g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\}$$

c'est-à-dire $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$.

Question 11-b. Si $c(\mathbf{y}) = c(\mathbf{x})$ alors en particulier $e \cdot \mathbf{x} \in c(\mathbf{y})$, et on dispose de $h \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathbf{x} = h \cdot \mathbf{y}$.

Ainsi $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{x} - g \cdot \mathbf{y}\| = 0$.

IV Un problème d'optimisation

Question 12-a. Il suffit de montrer que

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}))^\top (\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau) = 0.$$

Ceci donnerait :

$$\begin{aligned} J(R, \tau) &= \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - R\mathbf{x}_i - \tau|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[|\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})|^2 + |\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau|^2 + 2(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}))^\top (\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau) \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})|^2 \right) + n \cdot |\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau|^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, remarquons que

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i - n \cdot \bar{\mathbf{y}} = 0$$

et il en est de même pour $\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})$.

Ainsi, reprenons donc l'égalité à montrer :

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}))^\top (\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau) = \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})) \right]^\top (\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau) = 0$$

Question 12-b. Soit $R \in SO_d(\mathbb{R})$ fixé. L'égalité précédente montre que $\tau \mapsto J(\tau, R)$ est minimale lorsque $|\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau|^2 = 0$, c'est-à-dire lorsque

$$\tau = \bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}}$$

C'est l'unique point en lequel cet application est minimale, par séparation de la norme $x \mapsto |x|$ sur \mathbb{R}^d .

Question 13-a. Tous les coefficients de $M^\top M$ sont polynomiaux en les coefficients de M . Par conséquent, $M \mapsto M^\top M$ est une application continue sur $M_d(\mathbb{R})$.

Question 13-b. L'application $M \in M_d(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ est continue sur $M_d(\mathbb{R})$, car polynomiale en les coefficients de M .

Or, $SO_d(\mathbb{R})$ est l'intersection de deux fermés : l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par \det et l'image réciproque du singleton $\{I_d\}$ par $M \mapsto M^\top M$.

Par ailleurs, on a $\|M\| = \text{Tr}(I_d) = d$ pour tout $M \in SO_d(\mathbb{R})$ donc $SO_d(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $M_d(\mathbb{R})$.

Question 14-a. L'application $R \mapsto \tau(R) = \bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}}$ est continue sur $SO_d(\mathbb{R})$ puisque c'est une application affine.

Par ailleurs, il suffit de montrer l'existence de $R^* \in SO_d(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall R \in SO_d(\mathbb{R}), J(\tau(R^*), R^*) \leq J(\tau(R), R)$$

puisque $J(\tau(R), R) \leq J(\tau, R)$ pour tous $R \in SO_d(\mathbb{R})$ et $\tau \in \mathbb{R}^d$.

Or l'application $R \mapsto J(\tau(R), R)$ est continue sur $SO_d(\mathbb{R})$ qui est une partie fermée et bornée de $M_d(\mathbb{R})$.

Donc l'existence de R^* minimisant $R \mapsto J(\tau(R), R)$ sur $SO_d(\mathbb{R})$ est assurée.

Question 14-b. Prenons $\mathbf{y}_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et \mathbf{x}_i distincts de norme 1, tels que $\bar{\mathbf{x}} = 0$.

Alors $\tau(R) = 0$ pour tout $R \in SO_d(\mathbb{R})$ et $R \mapsto J(\tau(R), R)$ est constante égale à n .

Dans ce cas, n'importe quel $R \in SO_d(\mathbb{R})$ peut convenir pour R^* .

Question 15. On note que, pour tout $R \in SO_d(\mathbb{R})$,

$$J(\tau(R), R) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})|^2$$

et que $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = \inf_{R \in SO_d(\mathbb{R})} J(\tau(R), R)$.

En développant le carré scalaire :

$$\begin{aligned} J(\tau(R), R) &= \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}|^2 + \sum_{i=1}^n |R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})|^2 - 2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top R^\top (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) \\ &= nV_n(\mathbf{x}) + nV_n(\mathbf{y}) - 2 \sum_{i=1}^n \text{Tr} \left((\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top R^\top (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) \right) \\ &= nV_n(\mathbf{x}) + nV_n(\mathbf{y}) - 2 \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top R^\top \right) \end{aligned}$$

Minimiser cela consiste alors à maximiser le dernier terme selon $R \in SO_d(\mathbb{R})$.

Ainsi, en posant $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top$, on obtient

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = nV_n(\mathbf{x}) + nV_n(\mathbf{y}) - 2 \sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}), R \rangle.$$

V Calcul de $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dans le cas où $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) > 0$

Question 16. La matrice $S = Z^\top Z$ est symétrique, donc diagonalisable en base orthonormée. On dispose donc de vecteurs $u_1, \dots, u_d \in \mathbb{R}^d$ formant une base orthonormée et de réels $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que $Su_i = \lambda_i u_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$.

De plus, $u_i^\top Su_i = |Zu_i|^2 = \lambda_i |u_i|^2 = \lambda_i$. Comme Z est inversible on a $|Zu_i| > 0$ donc $\lambda_i > 0$.

Il suffit alors de renuméroter les λ_i pour qu'il soient en ordre décroissant.

Question 17-a. Les v_i sont orthogonaux puisque les u_i le sont. Ainsi, ils forment une famille libre, de cardinal d , donc une base de \mathbb{R}^d .

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$,

$$|v_i|^2 = \frac{1}{\lambda_i} |Zu_i|^2 = \frac{1}{\lambda_i} \langle u_i, Su_i \rangle_{\mathbb{R}^d} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i} = 1.$$

Donc la famille (v_1, \dots, v_d) est une base orthonormée de \mathbb{R}^d .

Question 17-b. Il suffit de vérifier que $ZU = VD$. Or VD est la matrice dont les colonnes sont les $\sqrt{\lambda_i}v_i$, c'est-à-dire les Zu_i , et ZU est la matrice dont les colonnes sont Zu_1, \dots, Zu_d .

Autrement dit, on a bien $ZU = VD$, c'est-à-dire $Z = VDU^\top$.

Question 18. Pour Z_1 , on trouve $Z_1^\top Z_1 = \text{Diag}(4, 1)$ donc on propose $\sqrt{\lambda_1} = 2$, $\sqrt{\lambda_2} = 1$, et, puisque $Z_1^\top Z_1$ est directement diagonale, on prend

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour Z_2 , on trouve $Z_2^\top Z_2 = \text{Diag}(4, 1)$ et, de la même manière, on propose

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 19-a. Comme $\det(Z) > 0$, alors $\det(V) \det(D) \det(U) > 0$ donc $\det(V) \det(U) > 0$.

Ainsi, pour $R \in SO_d(\mathbb{R})$,

$$\det(V^\top RU) = \det(V) \det(U) > 0$$

De plus,

$$((V^\top RU)^\top (V^\top RU)) = U^\top R^\top VV^\top RU = I_d$$

puisque U et V sont des matrices orthogonales.

Ces deux arguments donnent donc $V^\top RU \in SO_d(\mathbb{R})$.

Question 19-b. Pour $R \in SO_d(\mathbb{R})$, on a

$$\langle Z, R \rangle = \text{Tr}(R^\top VDU^\top) = \text{Tr}(U^\top R^\top VD) = \text{Tr}(V^\top RU^\top D) = \langle D, V^\top RU \rangle.$$

Or, l'application $R \in SO_d(\mathbb{R}) \mapsto V^\top RU$ induit une bijection de $SO_d(\mathbb{R})$ sur lui-même :

- elle est bien à valeurs dans $SO_d(\mathbb{R})$ d'après la question précédente
- elle admet une réciproque qui est $R \mapsto VRU^\top$.

Ainsi

$$\sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle.$$

Question 20. On cherche désormais $\sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \text{Tr}(DR) = \sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^d R[i, i] \sqrt{\lambda_i}$.

Or $\langle D, R \rangle \leq \text{Tr}(D)$ d'après I-4-b, et ce majorant est atteint pour $R = I_d$.

Ainsi $\sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}$.

Avec le résultat de la question 15, on obtient finalement

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{nV_n(\mathbf{x}) + nV_n(\mathbf{y}) - 2 \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}}.$$

VI Le cas où $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) < 0$

Question 21-a. Si x est un vecteur propre unitaire associé à λ , alors on a $|Rx|^2 = |x|^2 = 1$ puisque R est isométrique.

Ceci donne $\lambda^2 = 1$ donc $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Question 21-b. On a

$$\det(R + I) = \det(R(I + R^\top)) = \det(R) \det(I + R^\top).$$

Question 21-c. Si $\det(R) = -1$, alors

$$\det(R + I) = -\det(I + R^\top) = -\det((I + R)^\top) = -\det(I + R)$$

et ainsi $\det(R + I) = 0$.

Question 22-a. Comme $\det(I + R) = 0$, alors -1 est valeur propre de R . On considère pour u_d un vecteur propre de R pour la valeur propre -1 .

On pose $E_1 = u_d^\perp$ et on considère une base orthonormée (u_1, \dots, u_{d-1}) de E_1 (base qui s'obtient en orthonormalisant n'importe quelle base de E_1).

Alors, pour tout $x \in E_1$, on a

$$u_d^\top Rx = -Ru_d^\top Rx = -u_d^\top x = 0.$$

Question 22-b. L'identité $\forall x \in E_1, u_d^\top Rx = 0$ donne $R(E_1) \subset u_d^\perp = E_1$.

Comme $\text{Ker } R = \{0\}$ (et comme E_1 est de dimension finie) alors R induit un automorphisme de E_1 , donc $R(E_1) = E_1$.

Question 23-a. On a :

$$\begin{aligned}\langle S, R' \rangle &= \text{Tr}(U^\top R^\top U U^\top D U) \\ &= \text{Tr}(R^\top D U U^\top) \\ &= \text{Tr}(R^\top D) \\ &= \langle D, R \rangle.\end{aligned}$$

Question 23-b. Du fait que $R(E_1) = E_1$, alors la matrice R' est de la forme suivante :

$$R' = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline R_0 & R'_{d,d} \\ \hline 0 \cdots 0 & \end{array} \right)$$

puisqu'elle représente l'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto Rx$ dans la base (u_1, \dots, u_d) .

Par ailleurs, le calcul de $R'R'^\top$ donne I_d .

Ensuite, il suffit de considérer le calcul par blocs suivant, issu de cette égalité :

$$\left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline R_0 & R'_{d,d} \\ \hline 0 \cdots 0 & \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline R_0^\top & R'_{d,d} \\ \hline 0 \cdots 0 & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline I_{d-1} & \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array} \right)$$

L'observation du bloc supérieur gauche donne $R_0 R_0^\top = I_{d-1}$, donc $R_0 \in O_{d-1}(\mathbb{R})$.

Question 24-a. Notons pour commencer que S est symétrique, car orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

Un calcul par blocs similaire à ci-dessus donne :

$$\begin{aligned}S^\top R' &= \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \times \\ \vdots \\ \times \end{matrix} \\ \hline S_0^\top & \\ \hline \times \cdots \times & S_{d,d} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline R_0 & R'_{d,d} \\ \hline 0 \cdots 0 & \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \times \\ \vdots \\ \times \end{matrix} \\ \hline S_0 R_0 & \\ \hline \times \cdots \times & S_{d,d} R'_{d,d} \end{array} \right)\end{aligned}$$

(en particulier, S_0 est symétrique car S l'est).

De plus, $R'_{d,d} = \langle Ru_d, u_d \rangle_{\mathbb{R}^d} = -1$.

Ainsi,

$$\langle D, R \rangle = \langle S, R' \rangle = \text{Tr}(S_0 R_0) + S_{d,d} R'_{d,d} = \text{Tr}(S_0 R_0) - S_{d,d}.$$

Question 24-b. La matrice S_0 est symétrique. De plus, ses valeurs propres sont positives :

en effet, pour tout $X \in \mathbb{R}^{d-1}$, on construit le vecteur $X' = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ et comme

$X'^T S X' \geq 0$, alors

$$X'^T S X' = X^T S_0 X \geq 0$$

Ainsi, S_0 s'écrit $S_0 = U_0^T D_0 U_0$ avec D_0 diagonale à coefficients positifs.

Puis :

$$\text{Tr}(S_0 R_0) = \text{Tr}(D_0 (U_0 R_0 U_0^T)) = \langle D_0, U_0 R_0 U_0^T \rangle$$

La matrice $U_0 R_0 U_0^T$ étant orthogonale (produit de matrices orthogonales), le résultat de la question I-4-b s'applique et :

$$\text{Tr}(S_0 R_0) \leq \text{Tr}(D_0) = \text{Tr}(S_0).$$

Question 24-c. On a $\text{Tr}(S_0) + S_{d,d} = \text{Tr}(S) = \text{Tr}(D)$ puisque S est semblable à D . Les deux questions précédentes donnent

$$\langle D, R \rangle = \text{Tr}(S_0 R_0) - S_{d,d} \leq \text{Tr}(S_0) - S_{d,d} = \text{Tr}(D) - 2S_{d,d}.$$

Question 25-a. La dernière colonne de DU est $\begin{pmatrix} \alpha_1 U_{1,d} \\ \alpha_2 U_{2,d} \\ \vdots \\ \alpha_d U_{d,d} \end{pmatrix}$. La dernière ligne de U^T est

$(U_{1,d} \ \cdots \ U_{d,d})$.

Ainsi, on a $S_{d,d} = \sum_{k=1}^d \alpha_k U_{k,d}^2$.

Question 25-b. Comme les colonnes de U sont de norme (euclidienne) 1, et comme les valeurs propres de D sont positives et rangées par ordre décroissant, on a

$$\sum_{k=1}^d \alpha_k U_{k,d}^2 \geq \alpha_d \sum_{k=1}^d U_{k,d}^2 = \alpha_d.$$

Par ailleurs $\text{Tr}(S) = \text{Tr}(D)$, d'où le résultat :

$$\langle D, R \rangle \leq \sum_{k=1}^d \alpha_k - 2\alpha_d = \sum_{k=1}^{d-1} \alpha_k - \alpha_d.$$

Question 26. On considère $Z' = I' Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ où $I' = \text{Diag}(1, \dots, 1, -1)$. La matrice Z' a les mêmes valeurs singulières que $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, qu'on note $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d}$, ordonnées par ordre décroissant.

On cherche à maximiser $\langle R, Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ pour $R \in SO_d(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\langle RI', Z' \rangle$ pour $R \in O_d(\mathbb{R})$ vérifiant $\det(R) = -1$.

On écrit $Z' = VDU^T$ décomposée en valeurs singulières :

$$\langle RI', Z' \rangle = \langle V^T RI' U, D \rangle$$

L'application $R \in SO_d(\mathbb{R}) \mapsto V^T RI' U$ induit une bijection de $SO_d(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des matrices orthogonales à discriminant -1 .

Ainsi,

$$\sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle R, Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = \sup_{\substack{R \in O_d(\mathbb{R}) \\ \det(R) = -1}} \langle R, D \rangle.$$

Les résultats des questions 23 à 25 donnent

$$\langle R, D \rangle \leq \sum_{k=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_d}$$

pour tout $R \in O_d(\mathbb{R})$ avec $\det(R) = -1$, et cette borne supérieure est atteinte pour $R = \text{Diag}(1, \dots, 1, -1)$.

On peut alors reprendre l'égalité de la question 15 :

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[nV_n(\mathbf{x}) + nV_n(\mathbf{y}) - 2 \sum_{k=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_k} + \sqrt{\lambda_d} \right]^{1/2} .$$