ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

OPTIONS M ET P'
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : EPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES.
L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 4 pages.

Soit f une fonction réelle égale à la somme d'une série entière de terme général $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$; le rayon de convergence R est supposé strictement positif. Dans l'intervalle de convergence]–R , R[, la valeur de f(x) est donnée par la relation :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Étant donnés deux entiers naturels p et q, on dit que la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p,q) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(C1) Il existe deux polynômes P et Q de degré respectivement égal à p et à q tels que le polynôme Q prend la valeur 1 en 0 (Q(0) = 1) et tels que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est irréductible.

(C2) Il existe deux réels α et M vérifiant les inégalités: $0 < \alpha \le R$ et $M > 0$ tels que les trois fonctions f, P et Q aient la propriété :

Pour tout x de l'intervalle $]-\alpha , \alpha[$, $\left|f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}\right| \le M\,|x|^{p+q+1}$.

Première partie

Quelques propriétés de cette approximation de Padé et quelques exemples.

1°) Démontrer que, pour que la fonction f admette une approximation de Padé d'ordre (p,q), il faut et il suffit que la condition (C1) ci-dessus et la condition (C3) ci-après, soient satisfaites :

(C3) Il existe deux réels α et M vérifiant les inégalités : $0 < \alpha \le R$ et $M > 0$ tels que les trois fonctions f, P et Q aient la propriété :

Pour tout x de l'intervalle $]-\alpha , \alpha[$, $|Q(x)\, f(x) - P(x)| \le M\,|x|^{p+q+1}$.

En déduire que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p,q), il existe une fonction g somme d'une série entière telle que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\alpha , \alpha[$, les fonctions f, P, Q et g vérifient la relation :

$$Q(x)\, f(x) - P(x) = x^{p+q+1}\, g(x).$$

2°) Démontrer que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p,q), les polynômes P et Q sont définis de manière unique. La fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ sera désignée par le symbole $[p/q]_f$ et sera appelée approximation de Padé d'ordre (p,q) de f .

3°) Démontrer que, pour tout entier naturel p, la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p,0). Préciser $[p/0]_f$.

4°) Soient P et Q deux polynômes de degré respectivement égal à p et à q tels que Q(0)=1 et tels que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ soit irréductible ; démontrer que, pour que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ soit l'approximation de Padé d'ordre (p,q) de la fonction f, il faut et il suffit que les valeurs prises par la fration rationnelle $\frac{P}{Q}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre p+q en 0 soient égales respectivement aux valeurs prises par la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre p+q en 0.

5°) Supposons que la fonction f soit définie par la relation :

$$f(x) = 1 + x^2 .$$

Existe-t-il une approximation de Padé d'ordre (1,1) de cette fonction f ?

6°) Supposons que la fonction f soit définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1+3x}} .$$

a. Démontrer l'existence d'un développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de 0 ; déterminer son rayon de convergence et ses trois premiers termes.

b. Calculer les approximations de Padé h_1, h_2 et h_3 de la fonction f respectivement à l'ordre (2,0), (0,1) et (1,1).

c. Vérifier que ces fonctions sont définies et continues sur la demi-droite $[0 ,\infty[$. Donner l'allure générale des graphes des fonctions f, h_1, h_2 et h_3 lorsque la variable x varie sur cette demi-droite $[0 ,\infty[$; placer les éléments communs pour x=0 et les asymptotes lorsqu'elles existent.

d. Dresser le tableau des valeurs prises par les fonctions $h_3 - f$ et $h_1 - f$ à 10^{-6} près lorsque la variable prend les valeurs suivantes : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 et 10 .

Deuxième partie

Approximation de Padé d'ordre (p,1) de la fonction exponentielle.

1°) Déterminer d'abord l'approximation de Padé d'ordre (1,1) de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.

2°) Déterminer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, l'approximation de Padé d'ordre (p,1) de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Soit R_p la fraction rationnelle obtenue. Préciser le plus grand intervalle ouvert centré en 0 dans lequel la fraction R_p est définie et continue. Démontrer que, pour tout réel x, il existe un entier P tel que la suite des réels $(R_p(x))_{p \geq P}$ soit convergente et de limite e^x.

Est-il possible de démontrer, de manière analogue, une convergence uniforme dans un intervalle $[-A , A]$ $(A>0)$ vers la fonction exponentielle ?

3°) a. L'entier p étant fixé, déterminer un intervalle centré en 0 et une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels tels que la relation :

$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k ,$$

ait lieu pour tout réel x de cet intervalle. Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général $c_k x^k$.

b. Démontrer que, pour tout intervalle $[0 , A]$ $(A>0)$, il existe un entier P tel que pour tout entier p supérieur à P, l'inégalité

$$e^x \leq R_p(x) ,$$

ait lieu pour tous les réels x de l'intervalle $[0 , A]$. En déduire, sous ces hypothèses sur p et x, une majoration de la différence $R_p(x) - e^x$.

c. Il sera admis que, p étant toujours un entier, si x est un réel compris entre 0 et p+1, la différence entre e^x et la somme $S_p(x)$ des p+1 premiers termes de son développement en série entière dans un voisinage de 0, vérifie la double inégalité :

$$\frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \leq e^x - S_p(x) \leq \frac{x^{p+1}}{p!\,(p+1-x)} .$$

Est-ce que, en supposant maintenant x compris entre 0 et 1, le réel $R_p(x)$ est plus proche de e^x que $S_p(x)$?

FIN DU PROBLÈME