

E3A – 2019 – MP Maths 2 Corrigé

Si M est une matrice, je note $(M)_{ij}$ son coefficient situé ligne i , colonne j .

Partie I.

1.1 Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\lambda M + \mu N) &= \sum_{i=1}^n (\lambda M + \mu N)_{ii} = \sum_{i=1}^n (\lambda(M)_{ii} + \mu(N)_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n (M)_{ii} + \mu \sum_{i=1}^n (N)_{ii} \\ &= \lambda \operatorname{tr}(M) + \mu \operatorname{tr}(N) \end{aligned}$$

Puisque la trace prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est donc bien une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A)_{ij}(B)_{ji}$.

La somme contient une fois et une seule chaque coefficient de A , multiplié par le coefficient de B en position symétrique par rapport à la diagonale principale. Elle contient aussi une fois et une seule chaque coefficient de B , multiplié par le coefficient de A en position symétrique; c'est donc aussi l'expression de $\operatorname{tr}(BA)$. On a donc bien $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

1.3 Si M et N sont deux matrices semblables, on peut choisir P inversible telle que $P^{-1}MP = N$. On a alors, en utilisant la question précédente : $\operatorname{tr}(N) = \operatorname{tr}(P^{-1}(MP)) = \operatorname{tr}((MP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(M)$.

2.1 Puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a n valeurs propres distinctes, on sait qu'elle est diagonalisable, plus précisément semblable à $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; il existe donc bien C inversible telle que $C^{-1}AC = D$.

2.2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est alors semblable à $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ (puisque $D^k = (C^{-1}AC)^k = C^{-1}A^kC$ pour $k \geq 1$). On en déduit, pour tout k , $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(D^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = S_k$.

Partie II.

1. Soit $m \geq 1$. Alors $(X - a) \sum_{k=0}^{m-1} a^k X^{m-1-k} = \sum_{k=0}^{m-1} [a^k X^{m-k} - a^{k+1} X^{m-1-k}] = \sum_{k=0}^{m-1} [P_k - P_{k+1}]$ en posant $P_k = a^k X^{m-k}$ pour tout k .

Par télescopage, la somme vaut donc $P_0 - P_m = X^m - a^m$, ce qui donne le résultat demandé.

2. Montrons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ que, si $P_r = b \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$, alors $P'_r = \sum_{i=1}^r \frac{P_r}{X - \alpha_i}$.

Pour $r = 1$, $P'_1 = b = P_1/(X - \alpha_1)$, le résultat est vérifié.

Supposons-le vrai à un rang r . Alors, $P_{r+1} = (X - \alpha_{r+1})P_r$, donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$P'_{r+1} = (X - \alpha_{r+1})P'_r + P_r = \sum_{i=1}^r \frac{(X - \alpha_{r+1})P_r}{X - \alpha_i} + \frac{P_{r+1}}{X - \alpha_{r+1}} = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{P_{r+1}}{X - \alpha_i}$$

ce qui achève la démonstration. Avec les notations de l'énoncé, on a donc finalement $Q' = \sum_{i=1}^n Q_i$.

Remarque : en supposant connus les résultats élémentaires sur les dérivées logarithmiques, la relation

$$Q = b_n \prod (X - \alpha_i) \text{ donne directement } \frac{Q'}{Q} = \frac{(b_n)'}{b_n} + \sum \frac{(X - \alpha_i)'}{X - \alpha_i} = \sum \frac{1}{X - \alpha_i}.$$

3. Puisque $Q(\alpha_i) = 0$, on a bien $Q_i = (Q - Q(\alpha_i))/(X - \alpha_i)$. On en déduit

$$Q_i = \sum_{k=0}^n b_k \frac{X^k - \alpha_i^k}{X - \alpha_i} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} b_k \alpha_i^j X^{k-1-j} = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^k b_k \alpha_i^{k-r} X^{r-1}$$

en posant $r = k - j$.

La somme porte sur l'ensemble des couples (k, r) vérifiant $1 \leq k \leq n$ (le terme pour $k = 0$ valait 0) et $1 \leq r \leq k$. C'est aussi l'ensemble des couples (k, r) vérifiant $1 \leq r \leq n$ et $r \leq k \leq n$, on peut donc écrire

$$Q_i = \sum_{r=1}^n \sum_{k=r}^n b_k \alpha_i^{k-r} X^{r-1}$$

ce qui constitue le résultat demandé puisque le terme X^{r-1} , indépendant de k , peut être sorti de la somme intérieure.

4. Soit $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le nombre rb_r est le coefficient de X^{r-1} dans le polynôme $Q' = \sum_{i=1}^n Q_i$.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la question précédente montre que le coefficient de X^{r-1} dans Q_i est $\sum_{k=r}^n b_k \alpha_i^{k-r}$. On a donc

$$rb_r = \sum_{i=1}^n \sum_{k=r}^n b_k \alpha_i^{k-r} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-r} b_{j+r} \alpha_i^j = \sum_{j=0}^{n-r} \left(b_{j+r} \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \right) = \sum_{j=0}^{n-r} b_{j+r} T_j$$

où l'on a successivement posé $j = k - r$ dans la somme interne, puis permuté les sommes (bornes fixes).

5. Écrivons la relation précédente avec $r = n - k$ (qui appartient bien à $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$). On obtient $(n - k)b_{n-k} =$

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_{n+j-k} T_j + b_n T_k, \quad \text{et donc} \quad T_k = \frac{(n - k)b_{n-k}}{b_n} - \frac{1}{b_n} \sum_{j=0}^{k-1} b_{n+j-k} T_j.$$

- 6.1 Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $\sum_{j=0}^n b_j \alpha_i^j = 0$ par définition de α_i , et donc $\sum_{j=0}^n b_j \alpha_i^{k-n+j} = 0$ en multipliant par α_i^{k-n} .

En additionnant les n égalités obtenues quand i décrit $\llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient bien $\sum_{j=0}^n b_j T_{k-n+j} = 0$.

- 6.2 En isolant le terme d'indice n , cette relation donne $T_k = -\frac{1}{b_n} \sum_{j=0}^{n-1} b_j T_{k-n+j} = -\frac{1}{b_n} \sum_{r=1}^n b_{n-r} T_{k-r}$ en

posant $r = n - j$, ce qui fournit bien la relation demandée.

7. La relation obtenue en 5 permet de calculer les termes T_k pour $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. La question 6 montre qu'à partir du rang n , la suite (T_n) vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, qui permet de calculer successivement ces nombres.

Partie III.

1. Le système peut s'écrire $AU = B$, où $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -S_1 \\ \vdots \\ -S_n \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ S_1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ S_2 & S_1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ S_{n-1} & \cdots & \cdots & S_1 & n \end{pmatrix}$.

La matrice A est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc elle est inversible. Le système a donc une et une seule solution, donnée par $U = A^{-1}B$.

2. La première équation donne $u_1 = -S_1 = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Puisque le polynôme P est unitaire, les relations entre coefficients et racines donnent bien $S_1 = -a_{n-1}$, soit $u_1 = a_{n-1}$.

La deuxième équation, $S_1 u_1 + 2u_2 = -S_2$, donne alors $u_2 = (S_1^2 - S_2)/2 = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$. Encore une fois, les relations entre coefficients et racines donnent $u_2 = a_{n-2}$.

3. Appliquons les résultats de la partie II, avec P comme polynôme Q . On peut donc prendre $\alpha_i = \lambda_i$ pour tout i , d'où $T_j = S_j$ pour tout j ; enfin, $b_n = 1$ et $b_k = a_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

La question II.5 donne $S_k = (n - k)a_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} a_{n-(k-j)} S_j = (n - k)a_{n-k} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{n-(k-j)} S_j - na_{n-k}$

en isolant le terme d'indice 0 dans la somme.

Cette relation traduit bien le fait que le k -uplet $(u_1, \dots, u_k) = (a_{n-1}, \dots, a_{n-k})$ vérifie l'équation k du système précédent. Par suite, $(a_{n-1}, \dots, a_0)$ est solution de (Σ) .

4. L'unicité de la solution établie en 1 montre alors que $u_k = a_{n-k}$ pour tout k .

Partie IV.

1. Le polynôme caractéristique de A est unitaire, de degré n , et admet comme racines les valeurs propres de A : ce ne peut donc être que P . Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors $P(A) = 0$.
2. On sait que la matrice A est inversible si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$, ce qui équivaut à dire que 0 n'est pas valeur propre de A , ce qui équivaut à $P(0) \neq 0$ puisque $P = \chi_A$, soit finalement $a_0 \neq 0$.
3. Supposons A inversible, donc $a_0 \neq 0$. D'après la question 1, on a $A^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k + a_0 I_n = 0$, donc

$A \times \left[\frac{-1}{a_0} \left(A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1} \right) \right] = I_n$. Cela prouve que la matrice entre crochets est A^{-1} ; et c'est bien un polynôme en A , les $k-1$ étant dans $\mathbb{N}$.

- 4.1 On raisonne par récurrence sur k . Pour $k = 1$, la relation à prouver est $B_1 = A + d_1 I_n$, qui est la définition de B_1 . En supposant la relation vraie jusqu'à un rang $k-1 \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a

$$B_k = \left(A^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-1-i} \right) A + d_k I_n = A^k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-i} + d_k I_n = A^k + \sum_{i=1}^k d_i A^{k-i}$$

ce qui achève la récurrence.

- 4.2 Cela donne en particulier, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $B_{k-1} A = B_k - d_k I_n = A^k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-i}$. En appliquant la trace (linéaire) aux deux membres de cette équation, on obtient $\text{tr}(B_{k-1} A) = \text{tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \text{tr}(A^{k-i})$ d'où l'on tire immédiatement la relation demandée.

- 4.3a On a vu en I.2.2 que, pour tout k , $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(D^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = S_k$. Les relations obtenues à la question précédente peuvent alors se réécrire $S_k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i S_{k-i} + k d_k = 0$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, et la définition de d_1 donne $S_1 + d_1 = 0$.

Tout cela montre que $(d_1, \dots, d_n)$ est solution du système (Σ) étudié en III; d'après III.4, on a donc bien $d_k = a_{n-k}$ pour tout k .

- 4.3b La question 4.1 donne $B_{n-1} = A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} A^{n-1-i} = A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1}$. D'après la question 3, si A est inversible, alors $B_{n-1} = -a_0 A^{-1}$. Sinon, $a_0 = 0$, et $B_{n-1} A = P(A) - a_0 I_n = 0$. Que dire de plus dans ce cas ?

- 4.3c On a $B_n = P(A) = 0$. Quelqu'un de plus malin que moi l'aura sûrement vu venir depuis longtemps.

5. On a $d_1 = -\text{tr } A = -1$, d'où $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $B_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; on en

tire $d_2 = -7$.

L'énoncé fournit $B_2 A$, qui donne $d_3 = -\text{tr}(B_2 A)/3 = 1$. On a donc $B_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La

question 4.3 donne $B_3 A = -a_0 I_4$; il suffit donc de calculer un coefficient diagonal de $B_3 A$ pour avoir $a_0 = d_4$. On trouve $a_0 = d_4 = 8$ (et on peut vérifier $B_3 A = -8I_4$).

On a donc $A^{-1} = -B_3/8$, et $\chi_A = X^4 + \sum_{k=0}^3 d_{4-k} X^k = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 8$.

- 6.1 f1 : prend un couple (A, B) de matrices (=listes de listes) carrées et retourne le produit AB ;
 f2 : prend un flottant x et un entier n et retourne xI_n ;
 f3 : prend une matrice carrée et retourne sa trace;
 f4 : prend une matrice carrée A et un flottant x et retourne xA ;
 f5 : prend un couple de matrices carrées de même taille et retourne leur somme.
- 6.2 Dans la définition des suites (d_k) et (B_k) , on peut prendre $B_0 = I_n$, les relations de récurrence fournies pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ étant alors encore vraies pour $k = 1$.
 On peut alors compléter le programme donné par les lignes suivantes :

```
4  B = f2(1,n)           #  $B_0 = I_n$ 
5  for k in range(n) :
6      C = f1(B,A)       # calcul de  $B_{k-1}A$ 
7      dk = -f3(C)/k     # calcul de  $d_k$ 
8      B = f5(C,f2(dk,n)) # calcul de  $B_k$ 
9      d.append(dk)       # ajout de  $d_k$  à la liste d
```

Dixit F.P. : “on peut éviter de calculer le dernier B_k , mais cela alourdirait le code.”

Rédigé par G. Deyris, relu par C. Bonnefont et F. Pompigne, que je remercie.