

EXERCICE.

a. f est continue (en tant de fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) sur le compact F donc bornée et y atteint sa borne supérieure M en au moins un point A . $\square$

b. Si $A = (a, b) \in \overset{\circ}{F} = \Omega$ alors A est un extremum local de la restriction de f à l'ouvert Ω sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc A est un point critique.

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1 - 2xy - x^2}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)}$ et par raison de symétrie $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1 - 2xy - y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)^2}$.

Il en découle que $\begin{cases} 1 - 2ab - a^2 = 0 \\ 1 - 2ab - b^2 = 0 \end{cases}$ Par soustraction il vient $a^2 = b^2$ donc $a = b$ puisque a et b sont positifs.

Ainsi $1 - 3a^2 = 0$ et donc $A = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

En résumé si M est atteint sur Ω alors $M = M_0 = f(A) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. $\square$

c. $t \mapsto \varphi(t) = f(t, 0) = \frac{t}{1 + t^2}$ croît sur $[0, 1]$ et son maximum est $M_1 = \varphi(1) = \frac{1}{2}$.

$t \mapsto \psi(t) = f(1, t) = \frac{1 + t}{2(1 + t^2)}$ croît sur $[0, \sqrt{2} - 1]$ puis décroît. Son maximum sur $[0, 1]$ est donc $\psi(\sqrt{2} - 1)$ soit

$$M_2 = \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)}.$$

Par raison de symétrie par rapport à la première bissectrice, le maximum de f sur la frontière de F est $\max(M_1, M_2)$ i.e. M_2 car $\sqrt{2} - 1 < 0.5$.

Il découle de ce qui précède que si M est atteint sur Ω alors $M = M_0$ et que sinon, i.e. s'il est atteint sur la frontière, alors $M = M_2$.

Donc $M = \max(M_0, M_2) = M_0$ car $M_0 \simeq 0.65$ et $M_2 \simeq 0.60$. $\square$

PROBLÈME : ÉCHANGE DE LIMITES ET D'INTÉGRALES.**PARTIE PRÉLIMINAIRE.****1. Fonction Gamma d'Euler.**

a. Notons $f(t, x) = e^{-t}t^{x-1}$. Pour $x > 0$ fixé quelconque, $t \mapsto f_x(t) = f(x, t)$ est continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0, $f_x(t) \sim t^{x-1} > 0$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable en 0 car $x > 0$ donc $f_x(t)$ également.

Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) = o(\frac{1}{t^2})$ par croissance comparées donc $f_x(t)$ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi f_x est bien intégrable sur $]0, +\infty[$. $\square$

b. Une intégration par parties sur le segment $[\epsilon, A]$ suivie d'un passage à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et $A \rightarrow +\infty$ fournit immédiatement $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Or $\Gamma(1) = 1$ donc, par une itération évidente, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour tout entier $n > 0$. $\square$

2. Fonction zêta de Riemann.

a. Pour $x > 1$ fixé, la fonction $\varphi(t) = \frac{1}{t^x}$ décroît donc $\int_k^{k+1} \varphi(t) dt \geq \varphi(k + 1)$.

$$\text{Donc } R_n^p(x) = \sum_{\text{DEF } k=n+1}^p \varphi(k) \leq \int_n^p \varphi(t) dt = \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{p^{x-1}} \right).$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ (les deux limites existent bien), il vient $R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$. $\square$

b. Ainsi pour avoir $\left| \zeta(p) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \right| \leq \varepsilon$, il suffit d'avoir $\frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \leq \varepsilon$ soit $n \geq \exp\left(\frac{-\ln \varepsilon - \ln(p-1)}{p-1}\right)$. $\square$

c. Avec $p = 7$ et $\varepsilon = 10^{-6}$, il vient qu'il suffit de choisir $n \geq \exp\left(\ln(10) - \frac{\ln(6)}{6}\right) \simeq 7.4$.

Donc $n = 8$ convient. En fait $\frac{1}{6 \times 8^6} \simeq 0.64 \times 10^{-6} \leq 0.7 \times 10^{-6}$. Donc $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{k^7} \leq \zeta(7) \leq \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k^7} + 0.7 \times 10^{-6}$.

Or un programme immédiat fournit $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{k^7} \simeq 1.008\,348\,8$ et on peut retenir raisonnablement vu le faible nombre d'opérations $1.008\,348\,7 \leq \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k^7} \leq 1.008\,348\,9$.
Donc $1.008\,348\,7 \leq \zeta(7) \leq 1.008\,349\,4$. $\square$

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS.

3. Théorème de convergence uniforme pour une suite de fonctions.

Par le théorème de récupération uniforme de la continuité, f est continue sur $[a, b]$ de sorte que $\int_a^b f(x) dx$ est parfaitement défini. Par ailleurs il vient :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \int_a^b \|f - f_n\|_{\infty} dx = (b-a) \|f - f_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \square$$

4. Exemples et contre-exemples.

- a. Soit la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{n}) = n$, $f(x) = 0$ pour $x \geq \frac{2}{n}$ et par le fait que f_n soit affine entre 0 et $\frac{1}{n}$ et entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$. Alors f_n est bien continue et converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f nulle (en effet pour $x > 0$ fixé on a $f_n(x) = 0$ pour $n \geq 2/x$ et $f_n(0) = 0$ pour tout n).

Mais la convergence n'est pas uniforme car $\|f - f_n\|_{\infty} = \|f_n\|_{\infty} = 2n$ et (aire d'un triangle) $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$ ne tend pas vers $\int_0^1 f(x) dx = 0$ $\square$

- b. Soit la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = 1$ pour $x \geq 1/n$, par $f_n(0) = 0$ et par le fait que f_n soit affine entre 0 et $1/n$. Alors f_n est bien continue sur $[0, 1]$ et la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f continue par morceaux définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. La convergence n'est donc pas uniforme sinon f serait continue par le théorème de récupération uniforme de la continuité.

$$\text{Cependant } \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2n} + (1 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = \int_0^1 f(x) dx \quad \square$$

5. Cas d'un intervalle quelconque.

- a. L'étude immédiate des variations de f_n montre que f_n croît entre 0 et n de 0 à $f_n(n)$ puis décroît vers 0. Ainsi $\|f_n\|_{\infty} = f_n(n)$. Or $f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui prouve que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Or, par la question 1, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'intégrale $\frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1$ qui ne tend pas vers 0.

Ainsi **TH1** est-il faux sur un intervalle non borné. $\square$

- b. La définition de la convergence uniforme écrite avec $\varepsilon = 1$ prouve qu'il existe un entier p tel que $\|f - f_n\|_{\infty} \leq 1$ pour $n \geq p$. Alors en particulier $\|f - f_p\|_{\infty} \leq 1$ donc $|f(x)| \leq 1 + |f_p(x)|$ pour tout $x \in I$.

Ainsi f est une fonction continue (théorème de récupération uniforme de la continuité) dominée sur I par une fonction intégrable sur I donc est bien intégrable sur I .

La suite de la démonstration est exactement la même que dans la question 3 en remplaçant $b - a$ par $\ell(I)$.

Ainsi le **TH1** est-il vrai sur un intervalle borné. $\square$

6. Théorème de la convergence dominée.

- a. Les fonctions f_n sont continues par morceaux (ainsi que f) et dominées sur I par la fonction φ (de même que f par passage à la limite) intégrable sur I donc les fonctions f_n et la fonction f sont bien intégrables sur I . $\square$

- b. On peut bien sûr reprendre l'exemple de la question 4.b. mais la vérification directe de la propriété de permutation est évidente et utiliser le **TH2** dans ce cas revient à casser un œuf à la coque avec un marteau piqueur ! Voici un exemple qui peut lui aussi se traiter directement mais moins simplement et pour lequel l'usage du **TH2** est commode :

Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $g(0) \neq g(1)$. Alors la suite (f_n) définie par $f_n(x) = g(x^n)$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = g(0)$ si $x \neq 1$ et $f(1) = g(1)$. La convergence n'est pas uniforme car les fonctions f_n sont continues mais pas la fonction f qui est bien continue par morceaux néanmoins. Or les fonctions f_n sont dominées sur $[0, 1]$ par la fonction constante égale à $\|g\|_{\infty}$ qui est évidemment intégrable sur $[0, 1]$.

Le théorème de la convergence dominée permet d'affirmer que $\int_0^1 g(x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = g(0)$. $\square$

La suite (f_n) avec $f_n(x) = \frac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et est dominée sur $[0, +\infty[$ par la fonction $\varphi = ef$ intégrable. Ainsi le **TH2** s'applique (car les fonctions f_n et la fonction f sont en outre continues par morceaux -et même continues-) et prouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

DEUXIÈME PARTIES : SÉRIES DE FONCTIONS.

7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions.

Le théorème **TH3** n'est rien d'autre que le théorème **TH1** appliqué à la suite des sommes partielles de la série de fonctions. En effet :

Notons $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$. Comme les fonctions f_k sont continues et la série $\sum f_k$ converge uniformément sur $[a, b]$, la suite (S_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers S donc le **TH1** prouve que $\int_a^b S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S(x) dx$ i.e., par définition même de la convergence d'une série et de la valeur de sa somme, que $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right) dx$. $\square$

8. Application : séries trigonométriques et séries de Fourier.

- a. Le théorème de Parseval affirme que la série de Fourier d'une fonction f périodique et continue par morceaux converge en moyenne quadratique vers f .

Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ était la série de Fourier d'une fonction f , on aurait donc $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f^2(x) dx$ ce qui est évidemment impossible puisque la série harmonique diverge. $\square$

Remarque : Grâce à la transformation d'Abel, on peut démontrer que la série proposée converge.

- b. Soit une série trigonométrique convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f , de ce fait 2π -périodique et continue. Soit p un entier quelconque et, pour tout entier n , soit $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. Alors

la suite $\left(S_n(x) \cos(px) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f(x) \cos(px)$.

En effet, pour tout x , on a $|f(x) \cos(px) - S_n(x) \cos(px)| \leq |f(x) - S_n(x)| \leq \|f - S_n\|_\infty$ donc, par définition même du sup, $\|f(x) \cos(px) - S_n(x) \cos(px)\|_\infty \leq \|f - S_n\|_\infty$.

Le théorème **TH3** prouve alors que :

$$\frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f(x) \cos(px) dx = \frac{a_0}{2\pi} \int_{2\pi} \cos(px) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \int_{2\pi} \cos(kx) \cos(px) dx + b_k \int_{2\pi} \sin(kx) \cos(px) dx \right).$$

Si on note α_k et β_k les coefficients de Fourier de la fonction f , il vient alors, compte tenu des résultats classiques rappelés, $\alpha_0 = a_0$ (pour $p = 0$) et $\alpha_n = a_n$ pour $(p = n \geq 1)$.

On prouve de même que $\beta_n = b_n$ pour $n \geq 1$.

Ainsi la série de Fourier de f n'est autre que la série trigonométrique de départ.

En d'autres termes la série de Fourier de la somme d'une série trigonométrique convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ n'est autre que la série elle-même. $\square$

9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions. Application : théorème de Hardy.

- a. Notons $u_n(x) = \frac{a_n x^n}{n!}$ et soit $A > 0$ quelconque fixé. Pour $x \in [-A, A]$ on a $|u_n(x)| \leq |a_n| \frac{A^n}{n!}$. Comme la série $\sum a_n$ converge, la suite (a_n) tend vers 0 donc est bornée mettons par M . Il vient donc, pour tout $x \in [-A, A]$, $|u_n(x)| \leq M \frac{A^n}{n!}$ terme général d'une série convergente (exponentielle). Ainsi la série $\sum u_n(x)$ converge localement normalement sur $\mathbb{R}$ (donc a fortiori simplement) et sa somme f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque : la seule hypothèse que la suite (a_n) est bornée suffit ici à conclure.

- b. Il en découle bien sûr que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)e^{-x}$ est une série de fonctions continues convergeant simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction continue $f(x)e^{-x}$.
 En outre $u_n(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$ et est intégrable en $+\infty$ puisque $u_n(x)e^{-x} = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées.

Par ailleurs $\int_0^{+\infty} |u_n(x)e^{-x}| dx = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^x dx = |a_n| \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = |a_n|$ et, puisque la série $\sum a_n$ est absolument convergente, le théorème **TH4** s'applique et prouve que :

La fonction $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. $\square$

10 Cas où les théorèmes TH3 et TH4 ne s'appliquent pas.

- a. Notons $u_n(x) = (-1)^n x^n$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers $S(x) = \frac{1}{1+x}$.

La convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1[$ sinon le théorème du double passage à la limite s'appliquerait et prouverait que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ converge (vers $\frac{1}{2}$). $\square$

On peut aussi remarquer que $|S(x) - S_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}$ donc $\|S - S_n\|_\infty \geq \frac{1}{2}$. $\square$

- b. $\sum \int_0^1 |u_n(x)| dx = \sum \frac{1}{n+1}$ diverge donc le théorème **TH4** ne s'applique pas. $\square$

- c. $\left| \int_0^1 S(x) dx - \sum_{k=0}^n \int_0^1 u_k(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (S(x) - S_n(x)) dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$
 donc $\left| \int_0^1 S(x) dx - \sum_{k=0}^n \int_0^1 u_k(x) dx \right| \leq \frac{1}{n+2}$.

Ce qui prouve, par définition même de la convergence, que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 u_k(x) dx$ converge et a pour somme $\int_0^1 S(x) dx = \ln 2$. $\square$

11 Théorème de la convergence monotone.

La suite (S_n) est une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux par hypothèse.

En outre, puisque les fonctions f_k sont positives, il vient $|S_n(x)| = S_n(x) \leq f(x)$. Or f est intégrable sur I par hypothèse. Donc la suite (S_n) vérifie les hypothèses du théorème **TH2** qui prouve que $\int_I S_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(x) dx$

c'est à dire $\sum_{k=0}^n \int_I f_k(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(x) dx$. Donc par définition même de la convergence d'une série :

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k(x) dx$ converge et a pour somme $\int_I \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right) dx$ $\square$

12 Application à la physique.

- a. $f(t) = \frac{t^3}{e^t - 1}$ est continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0, $f(t) \sim t^2$ de sorte que f se prolonge par continuité en 0 qui de ce fait est une fausse borne impropre. Au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$ donc f est intégrable en $+\infty$ et donc finalement sur $]0, +\infty[$.

Par ailleurs pour $t > 0$ on a $\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$ donc $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^3 e^{-(n+1)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.

Or les fonctions u_n sont positives et intégrables sur $]0, +\infty[$ (Cf 1.a.) donc les hypothèses du théorème de la convergence monotone sont vérifiées et ainsi $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt$.

Or, par le changement de variable admissible car $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même $u = (n+1)t$,

$$\int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \frac{1}{(n+1)^4} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du = \frac{\Gamma(4)}{(n+1)^4} = \frac{6}{(n+1)^4}.$$
Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = 6 \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}. \quad \square$

b. Il vient $M = 2\pi h c^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/k_B T \lambda} - 1} d\lambda$. Le changement admissible $u = \frac{hc}{e^{hc/k_B T \lambda}}$ fournit :

$$M = 2\pi h c^2 \times \frac{(k_B T)^4}{(hc)^4} \int_0^{+\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} du = 2\pi h c^2 \times \frac{(k_B T)^4}{(hc)^4} \times \frac{\pi^4}{15} = \frac{2 \pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \times T^4. \quad \square$$

13 Généralisation.

a. En remplaçant dans la démonstration de la question 12.a. t^3 par t^{x-1} (ce qui est bien licite car $x > 1$), on obtient de même par le théorème de la convergence monotone :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x} = \Gamma(x) \zeta(x) \quad \square$$

b. En particulier :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \square$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt = \Gamma(7) \zeta(7) = 720 \zeta(7) \text{ donc, d'après la question 2.c. :}$$

$$720 \times 1.008\,348\,7 \simeq 726.011\,06 \leq I \leq 720 \times 1.008\,349\,4 \simeq 726.011\,57 \text{ donc :}$$

$$726.011\,0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt \leq 726.011\,6 \quad \square$$

_____ *FIN* _____