Corrigé ENS 2013

Corrigé rédigé par Martine Ginestet, relu par Francis Denise (UPA)
Pour toute remarque, me contacter à martine-ginestet@orange.fr

Quelques remarques

1) Il y a beaucoup de fautes d'orthographe , de fautes grammaticales, de syntaxe, et même de fautes de fappe, ce qui montre qu'il n'y a aucune relecture sérieuse.

2) Rappelons que les séries entières ne sont plus au programme et qu'il est alors nécessaire de bien définir le cadre. Par exemple, beaucoup de candidat n'ont pas compris la variable "s" dans la définition de la fonction génératrice. Il aurait été bien de préciser pour s réels tels, que la série converge.

On ne parle pas de "limite" de série mais de somme.

3) Il y a beaucoup de flou mathématique, de définitions trop vagues des variables aléatoires.

4) La question Q33 semble proposer une erreur de raisonnement

4) Heureusement, quelques modèles proposés pourront constituer des énoncés d'exercices interessants pour les enseignants.

Parasites, fonctions génératrices et loi de Poisson

1. Z suit $\mathcal{P}(\lambda)$
   $g_Z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda s)^n}{n!}$, série exponentielle convergente pour tout réel s
   $g_Z(s) = e^{-\lambda} e^{\lambda s}$
   $$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, \quad g_Z(s) = e^{\lambda(s-1)}}$$

2. **Il faut supposer que l'intervalle ouvert I contient 1**
   $g_Y^{(n)}(s) = \sum_{i=n}^{+\infty} i(i-1)..(i-n+1)P(Y=i)s^{i-n}$ par itération
   $g_Y^{(n)}(1) = \sum_{i=n}^{+\infty} i(i-1)..(i-n+1)P(Y=i) = E\left[Y(Y-1)...(Y-n+1)\right]$ par la formule de transfert
   $g'_Y(1) = E\left[Y\right]$
   $g''_Y(1) = E\left[Y(Y-1)\right] = E(Y^2) - E(Y)$
   $$\boxed{E\left[Y\right] = g'_Y(1), \quad V(Y) = g''_Y(1) + g'_Y(1) - \left(g'_Y(1)\right)^2}$$
   Pour Z suivant $\mathcal{P}(\lambda)$
   $g_Z(s) = e^{\lambda(s-1)}, \quad g'_Z(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}, \quad g''_Z(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$
   $E\left[Z\right] = g'_Z(1) = \lambda$
   $V(Z) = g''_Z(1) + g'_Z(1) - \left(g'_Z(1)\right)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

3. $g_Y^{(n)}(0) = \sum_{i=n}^{+\infty} i(i-1)..(i-n+1)P(Y=i)0^{i-n} = n!P(Y=n)$
   $$\boxed{P(Y=n) = \frac{g_Y^{(n)}(0)}{n!}}$$
   Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant même fonction fonction génératrice ont même loi

4. $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$
   N suit la loi géométrique de paramètre q (proba de ne pas infecter une cellule)

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad P(N=n) = qp^{n-1}}$$

5. Probabilité qu'une cellule infectée soit saine :$P(S/I) = P(Z=0) = e^{-\lambda}$

6. M est le numéro de la dernière infectée. **Mauvaise définition**, car si la cellule 1 est saine, que pose-t-on pour M? $\quad M = 0$?
   $M(\Omega) = \mathbb{N}$
   $(M,N)(\Omega) = \{(i,j), \quad 1 \leq i \leq j\} \cup \{(0,j), \quad 1 \leq j\}$
   Si $1 \leq i \leq j$
   $P(M=i, N=j) = qp^{j-1}\left(1-e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{j-i}$
   Si $i = 0$
   $P(M=0, N=j) = qp^{j-1}\left(e^{-\lambda}\right)^{j}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } 1 \leq i \leq j, \quad P(M=i, N=j) = qp^{j-1}\left(1-e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{j-i} \\ \text{Si } i=0, \quad j \geq 1, \quad P(M=0, N=j) = qp^{j-1}\left(e^{-\lambda}\right)^{j} \end{array}}$$

   N et M ne sont pas indépendantes car $P(N=1, M=2) = 0$ et $P(N=1)P(M=2) \neq 0$
   Déterminons la loi de $N - M$
   $\forall k \geq 1$:
   $P(N-M=k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(M=i, N=k+i) = P(M=0, N=k) + \sum_{i=1}^{\infty} P(M=i, N=k+i)$
   $P(N-M=k) = qp^{k-1}\left(e^{-\lambda}\right)^{k} + \sum_{i=1}^{\infty} qp^{k+i-1}\left(1-e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k} = qp^{k-1}\left(e^{-\lambda}\right)^{k} + \left(1-e^{-\lambda}\right)\left(pe^{-\lambda}\right)^{k} = e^{-k\lambda}(1-pe^{-\lambda})p^{k-1}$
   $P(N-M=0) = \sum_{i=1}^{\infty} P(M=i, N=i) = \sum_{i=1}^{\infty} qp^{i-1}\left(1-e^{-\lambda}\right) = \left(1-e^{-\lambda}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(N-M=0) = \left(1-e^{-\lambda}\right) \\ \forall k \geq 1, \quad P(N-M=k) = e^{-k\lambda}(1-pe^{-\lambda})p^{k-1} \end{array}}$$

7. $T = \sum_{i=1}^{N} Z_i$
   $g_N(s) = \sum_{n=1}^{\infty} qp^{n-1}s^n$ série géométrique de raison ps converge ssi $s \in]-1/p, 1/p[$
   $g_N(s) = \dfrac{qs}{1-ps}$

$$\boxed{\forall s \in]-1/p, 1/p[, \quad g_N(s) = \frac{qs}{1-ps}}$$

8. X et Y étant indépendantes, s^X et s^Y le sont aussi
   Soit I un intervalle ouvert de convergence commun , alors pour $s \in I$, s^X et s^Y admettant une espérance, s^{X+Y} aussi et $E(s^X s^Y) = E(s^X)E(s^Y)$

$$\boxed{g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_X(s)}$$

9. Pour des lois de Poisson $I = \mathbb{R}$
   $\forall s \in \mathbb{R}, \quad g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$
   On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson $P(\lambda+\mu)$
   Or la fonction génératrice caractérise la loi d'où $X + Y \hookrightarrow P(\lambda+\mu)$
   Rque : c'est un résultat de cours

10. Par la formule de transfert :
    $E(s^W) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(W=n)$

Notons $S_i = Y_1 + .. + Y_i, \quad S_0 = 0$
$\forall n \geq 1, \quad P(W=n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(W=n, X=i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Y_1 + .. + Y_i = n) P(X=i)$ par indépendance des Y_k et de X
$\forall n \geq 1, \quad P(W=n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i = n) P(X=i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(S_i = n) P(X=i)$ car $P(S_0 = n) = 0$
$P(W=0) = P(X=0) + \sum_{i=1}^{\infty} P(Y_1 + .. + Y_i = 0) P(X=i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(S_i = n) P(X=i)$
En admettant que l'on peut intervertir les symboles de sommation :
$E(s^W) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) \left[\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(S_i = n)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) E(s^{S_i})$
Or d'aprés la question 8, par récurrence immédiate : $g_{S_i}(s) = (g(s))^i$
$E(s^W) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i)(g(s))^i = h(g(s))$ pour s dans un certain intervalle non déterminé!!

11. On a toutes les hypothèses pour appliquer les résultats de la question 10 à T
$g_T(s) = h(g(s))$
avec h fonction génératrice de N : $h(s) = \dfrac{qs}{1-ps}$
et g fonction génératrice de Z : $g(s) = e^{\lambda(s-1)}$

$$\boxed{\forall s < 1 - \frac{\ln p}{\lambda}, \quad g_T(s) = \frac{qe^{\lambda(s-1)}}{1 - pe^{\lambda(s-1)}}}$$

Un modèle modifié

12. $I_n =$ "la cellule n est infectée"
$\mathrm{P}(\overline{I_2}) = P(Z_1 = 0) + \sum_{i=1}^{\infty} P(Z_1 = i) P(Z_2 = 0 / Z_1 = i) = e^{-\lambda} + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!} q^i = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \dfrac{(q\lambda)^i}{i!} = e^{-p\lambda}.$
D'où $P(I_{n+1}/I_n) = P(I_2/I_1) = P(I_2) = 1 - e^{-p\lambda}$

$$\boxed{N \text{ suit la loi géométrique de paramètre } e^{-p\lambda}}$$

$\forall s \in]-1/(1-e^{-p\lambda}), 1/(1-e^{-p\lambda})[, \quad g_N(s) = \dfrac{se^{-p\lambda}}{1 - s(1-e^{-p\lambda})}$

13. $(Z_1, 1_{I2})(\Omega) = \mathbb{N}^* \mathrm{x}\{1\} \cup \mathbb{N}\mathrm{x}\{0\}$
$\forall i \geq 1, \quad , P(Z_1 = i, 1_{I2} = 0) = P(Z_1 = i) P(1_{I2} = 0 / Z_1 = i) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!} q^i$ (les i parasites ont échoué)
$P(Z_1 = 0, 1_{I2} = 0) = e^{-\lambda}$
$\forall i \geq 1, \quad P(Z_1 = i, 1_{I2} = 1) = P(Z_1 = i) P(1_{I2} = 0 / Z_1 = i) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!} \left(1 - q^i\right)$
$$\widetilde{p_k} = P(Z_1 = k / I_2) = \frac{P(Z_1 = k, 1_{I2} = 1)}{P(I_2)} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - q^k\right)}{1 - e^{-p\lambda}}$$
$$\widetilde{g}(s) = \frac{1}{1 - e^{-p\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - q^k\right)\right) s^k = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-p\lambda}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda sq)^k}{k!}\right]$$
$$\widetilde{g}(s) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-p\lambda}} \left[e^{\lambda s} - e^{\lambda sq}\right] = \frac{e^{\lambda(s-1)}}{1 - e^{-p\lambda}} \left[1 - e^{-\lambda sp}\right]$$

14. $\overline{p_k} = P(Z_1 = k / \overline{I_2}) = \dfrac{P(Z_1 = k, 1_{I2} = 0)}{P(\overline{I_2})} = \dfrac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left(q^k\right)}{e^{-p\lambda}}$
$$\overline{g}(s) = e^{p\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left(q^k\right) s^k = e^{-\lambda} e^{p\lambda} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda sq)^k}{k!}\right]$$
$$\overline{g}(s) = e^{-q\lambda} \left[e^{\lambda sq}\right] = e^{q\lambda(s-1)}$$

15. $P(Z_n = i / (Z_{n+1} = j) \cap I_{n+1}) = \dfrac{P(Z_n = i \cap (Z_{n+1} = j) \cap I_{n+1})}{P((Z_{n+1} = j) \cap I_{n+1})}$

$P(Z_n = i \cap (Z_{n+1} = j) \cap I_{n+1}) = P(Z_n = i)\, P(I_{n+1}/Z_n = i)\, P(Z_{n+1} = j/I_{n+1} \cap Z_n = i)$
$P(Z_n = i \cap (Z_{n+1} = j) \cap I_{n+1}) = P(Z_n = i)\, P(I_{n+1}/Z_n = i)\, P(Z_{n+1} = j/I_{n+1})$ car le nombre de parasites dans la cellule $n+1$ dépend sulement du fait que la cellule $n+1$ est infectée, pas du nombre de parasites dans la cellule n.

$P((Z_{n+1} = j) \cap I_{n+1}) = P(I_{n+1}) P(Z_{n+1} = j/I_{n+1}) = P(I_{n+1}) e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^j}{j!}$

$P(Z_n = i/(Z_{n+1} = j) \cap I_{n+1}) = \dfrac{P(Z_n = i)\, P(I_{n+1}/Z_n = i)}{P(I_{n+1})} = P(Z_n = i/I_{n+1})$

16. $E(s^T) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(T = n)$
Notons $S_i = Y_1 + .. + Y_i$
$\forall n \geq 0, \quad P(T = n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(T = n, N = i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Z_1 + .. + Z_i = n/N = i)\ P(N = i)$
En admettant que l'on peut intervertir les symboles de sommation :
$E(s^T) = \sum_{i=1}^{\infty} P(N = i) \left[\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(S_i = n/N = i)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} P(N = i) E(s^{S_i/(N=i)})$
D'aprés la question précédente : $E(s^{S_i/(N=i)}) = \prod_{k=1}^{i} E(s^{Y_k/N=i}) = \prod_{k=1}^{i-1} \widetilde{g}(s)\overline{g}(s) = (\widetilde{g}(s))^{i-1}\, \overline{g}(s)$
$E(s^T) = \sum_{i=i}^{\infty} P(N = i)\, (\widetilde{g}(s))^{i-1}\, \overline{g}(s) = \dfrac{\overline{g}(s)}{\widetilde{g}(s)} g_N(\widetilde{g}(s)) = \dfrac{\overline{g}(s)}{\widetilde{g}(s)} \dfrac{\widetilde{g}(s) e^{-p\lambda}}{1 - \widetilde{g}(s)(1 - e^{-p\lambda})}$
$g_T(s) = e^{q\lambda(s-1)} \dfrac{e^{-p\lambda}}{1 - \dfrac{e^{\lambda(s-1)}}{1 - e^{-p\lambda}} \left[1 - e^{-\lambda s p}\right] (1 - e^{-p\lambda})} = \dfrac{e^{\lambda(qs-1)}}{1 - e^{\lambda(s-1)} + e^{\lambda(sq-1)}}$

$$\boxed{g_T(s) = \frac{e^{\lambda(qs-1)}}{1 - e^{\lambda(s-1)} + e^{\lambda(sq-1)}}}$$

17. Comme on ne sait pas distinguer une cellule infectée saine d'une cellule non infectée, comment peut-on savoir que l'invasion est stoppée?
On peut alors déterminer le nombre moyen dans les 2 modèles de parasites et choisir le modèle qui donnera la valeur la plus proche de la moyenne empirique (aprés un grand nombre d'expériences)
Modèle 1 :$\forall s < 1 - \dfrac{\ln p}{\lambda}, \quad g_T(s) = \dfrac{q e^{\lambda(s-1)}}{1 - p e^{\lambda(s-1)}}$
$E(T) = g_T'(1) = \dfrac{\lambda}{q}$
Modèle 2 :, $\quad g_T(s) = \dfrac{e^{\lambda(qs-1)}}{1 - e^{\lambda(s-1)} + e^{\lambda(sq-1)}}$
$E(T) = g_T'(1) = \lambda e^{\lambda p}$

Un test statistique

18. Convergence dans quel sens?
Thm de la loi faible des grands nombres :
$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta_n - m| \geq \varepsilon) = 0$ où $m = E(N) = \dfrac{1}{q}$

19. Thm de la limite centrée

20. N étant une variable géométrique $\mathcal{G}(q)$, d'aprés le cours $V(N) = \dfrac{p}{q^2}$

21. $n = 100, p = 1/2, E(N) = 2, V(N) = 2$
On approxime la loi de $\dfrac{\theta_{100} - 2}{\sqrt{\dfrac{2}{100}}}$ par $\mathcal{N}(0,1)$

$$P(\theta_{100} > 2,3) = P\left(\frac{\theta_{100}-2}{\sqrt{\dfrac{2}{100}}} > \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi\left(2,1213\right)$$

$\boxed{0,008 < P(\theta_{100} > 2,3) < 0,023}$

22. Sous l'hypothèse $p = 1/2$, comme $P(\theta_{100} > 2,3) < 0,023 < 5\%$,on peut rejeter l'hypothèse p=1/2
    Si on suppose $p < 0,5$, alors la moyenne est inférieure à 2, on aura $P(\theta_{100} > 2,3) < 5\%$
    Il faudrait montrer que la fonction $f(p) = \dfrac{2,3 - 1/q}{\sqrt{p/q^2}}$ est une fonction décroissante de p sur $]0,0,5]$
    $f(p) = \dfrac{(1-p)\,2,3 - 1}{\sqrt{p}} = \dfrac{1,3}{\sqrt{p}} - 2,3p$
    f est bien décroissante.
    On peut déterminer le p limite
    $\Phi(1,65) = 95\%$
    On cherche p tel que $10\dfrac{2,3 - 1/q}{\sqrt{p/q^2}} \geq 1,65(*)$
    $(*) \Longleftrightarrow \dfrac{1,3}{\sqrt{p}} - 2,3p \geq 0,165$

Un processus de branchement

23. Notons g_n la fonction génératrice de $T(n)$
    D'aprés la question 11, $g_{n+1}(s) = g_n(g(s))$ où g est la fonction génératrice de la distribution μ
    En admettant que tous les intervalles ouvert de convergence contiennent 1 :
    $g'_{n+1}(s) = g'(s)g'_n(g(s))$
    $E(T(n+1))$=$g'(1)g'_n(g(1)) = mg'_n(1) = mE(T(n))$

$$\boxed{E(T(n)) = m^n}$$

24. $g(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P(Z = n)$

$$\boxed{P(Z = 0) = g(0)}$$

25. $g_n = g_{n-1}og = gogo..og$ (n fois) par itération
    $g_n(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} s^i P(T_n = i)$
    $P(T_n = 0) = g_n(0) = go...og(0)$
    On a donc

$$\boxed{u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)}$$

26. g est croissante sur [0,1], $g(0) = P(Z = 0), g(1) = 1$
    $g'(1) = m, \quad g'(0) = P(Z = 1)$
    $g''(s) = \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)s^{i-2}P(Z = i) \geq 0$

27. On suppose $m > 1$
    $f(s) = g(s) - s$
    $f'(s) = g'(s) - 1$
    $f''(s) = g''(s) > 0$ sur]0,1], en supposant que Z n'est pas à valeurs dans {0,1}
    f' est continue et strictement croissante sur [0,1]
    D'où f' réalise une bijection de [0,1] sur $[P(Z = 1) - 1, m - 1]$

$P(Z=1)<1$ et $m>1$, donc 0 admet un unique antécedant par f' noté α
On peut donc donner le tableau de variation de f
Sur $[\alpha,1[$, $f(x)<0$
$f(0)=P(Z=0)\geq 0$, $\quad f(\alpha)<0$, par le thm de la bijection l''équation $g(x)=x$ admet une unique solution sur]0,1[notée q
D'aprés le tableau de variation de g , comme $[q,1]$ est stable par g, si $u_n>q$ alors $u_{n+1}>q$
Et $u_{n+1}-u_n=g(u_n)-u_n>0$ d'aprés le signe de f sur $[q,1]$ et donc $u_{n+1}\leq u_n$
Même raisonnemnt pour $u_n<q$

28. Par récurrence immédiate, la suite (u_n) est décroissante et minorée par q. Elle converge donc vers $\ell\in[0,1[$
Par passage à la limite, g étant continue, $g(\ell)=\ell$ et donc $\ell=q$

$$\boxed{\text{Si } m>1\text{, la suite } (u_n) \text{ converge vers } q}$$

On admet que limu_n est la probabilité d'extinction , d'où il y a extinction avec la probabilité q

29. Si $m\leq 1$
Par une étude similaire, f est décroissante et l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution $x=1$
f étant positive sur [0,1], alors $u_{n+1}\geq u_n$, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge donc vers $\ell\in[0,1]$ telle que $g(\ell)=\ell$ et donc $\ell=1$

$$\boxed{\text{Si } m\leq 1\text{, la suite } (u_n) \text{ converge vers } 1}$$

il y a extinction presque-sûrement

30. S_n suit $\mathcal{B}(n,p)$
Par le thm de la limite centrée, $\left(\dfrac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$
Ou par la loi faible des grands nombres :$\forall\varepsilon>0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=0$

31. Notons S_{an} une variable aléatoire dont la loi est la loi conditionnelle de $\sum\limits_{i\geq[an]} X_i(n)$ sachant $T(n)=k$
Si $T(n)=k$, il y a k parasites, notons $A_1,..,A_k$ leur position (numéro de la cellule dans laquelle ils se trouvent)
Notons $B_k=1$ si $Ak>[an]$, B_k=0 sinon
$E(B_k)=P(A_k>[an])=P(S_n>an)$
$S_{an}=\sum_{i=1}^k B_k$
E($\sum_{i=1}^k B_k$))=$\sum_{i=1}^k E(B_k)=kP(S_n>an)$

$$\boxed{E\left(\sum_{i\geq[an]} X_i(n)/T(n)=k\right)=kP(S_n>an)}$$

32. Par la formule des probas totales :
$E\left(\sum\limits_{i\geq[an]} X_i(n)\right)=\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\sum\limits_{i\geq[an]} X_i(n)/T(n)=k\right)P(T(n)=k)=P(S_n>an)\sum_{k=1}^{\infty} kP(P(T(n)=k)$
$E\left(\sum\limits_{i\geq[an]} X_i(n)\right)=P(S_n>an)E(T(n))$

$$\boxed{E\left(\sum_{i\geq[an]} X_i(n)\right)=m^nP(S_n>an)}$$

33. $P(S_n > an) = P\left(\dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}} > \dfrac{(a-p)n}{\sqrt{npq}}\right)$

On ne peut pas donner une approximation avec la loi normale (sauf dans le cas $a = p$)., car il y a du "n" dans $\dfrac{(a-p)n}{\sqrt{npq}}$, où alors il faudrait connaître l'erreur commise lors de l'approximation par la loi normale.

Déterminons simplement une limite

Si $a = p$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n > an) = 1/2$, par le théorème central limit

Si $a > p$, notons $\varepsilon = a - p > 0$

$0 \le P(S_n > an) = P(\dfrac{S_n}{n} - p > a - p) \le P(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon)$

Par la loi faible des garnds nombres et le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n > an) = 0}$

Si $a < p$, notons $\varepsilon = p - a > 0$

$1 \ge P(S_n > an) = P(\dfrac{S_n}{n} - p > -\varepsilon) \ge P(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \le \varepsilon)$

$\lim\limits_{n\to\infty} (\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \le \varepsilon) = 1$^par la loi faible des garnds nombres

Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n > an) = 1}$

34. $\forall t \ge x > 0, \quad e^{-\dfrac{t^2}{2}} \le \dfrac{t}{x} e^{-\dfrac{t^2}{2}}$

D'où $\int_x^{+\infty} e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt \le \dfrac{1}{x}\int_x^{+\infty} te^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt$

$\int_x^{+\infty} te^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt = \left[-e^{-\dfrac{t^2}{2}}\right]_x^{+\infty} = e^{-\dfrac{x^2}{2}}$

$$\boxed{\overline{\Phi}(x) \le \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}}$$

35. $\int_x^{A} e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt = \int_x^{A} \dfrac{1}{t} te^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt = \left[-\dfrac{1}{t}e^{-\dfrac{t^2}{2}}\right]_x^{A} - \int_x^{A} \dfrac{1}{t^2} e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt$

D'où $\int_x^{+\infty} e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt = \dfrac{1}{x}e^{-\dfrac{x^2}{2}} - \int_x^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt$

Par la même méthode qu'au 34. $\int_x^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt \le \int_x^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{t}{x}\right)^3 e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt = \dfrac{1}{x^3}\int_x^{+\infty} te^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt = \dfrac{e^{-\dfrac{x^2}{2}}}{x^3}$

$$\boxed{\overline{\Phi}(x) \ge \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right]}$$

36. Que signifie le plus grand a tel qu'il y ait des parasites au dessus de an? $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\sum\limits_{i\ge[an]} X_i(n)\right) > 0$?

(suite décroissante minorée par 0 donc convergente)

Si on pouvait montrer (comment ?) qu'un équivalent de $P(S_n > an)$ est $\Phi\left(\dfrac{(a-p)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$ lorsque $a > p$

alors $E\left(\sum\limits_{i\ge[an]} X_i(n)\right) \sim m^n \Phi\left(\dfrac{(a-p)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$ d'aprés Q32

Si $a > p$,, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a-p)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} = +\infty$ et d'aprés Q35, $\overline{\Phi}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ et $E\left(\sum\limits_{i\geq[an]} X_i(n)\right) \sim m^n \dfrac{\sqrt{pq}}{\sqrt{2n\pi}} \exp\left(-\dfrac{(a-p)^2 n}{2pq}\right)$

$$E\left(\sum_{i\geq[an]} X_i(n)\right) \sim \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{2n\pi}} \exp\left(n\left[\ln m - \frac{(a-p)^2}{2pq}\right]\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\sum\limits_{i\geq[an]} X_i(n)\right) > 0$ si et seulement si $\ln m - \dfrac{(a-p)^2}{2pq} > 0 \Longleftrightarrow a > p + \sqrt{2pq\ln m}$

$$\boxed{a^* = p + \sqrt{2pq\ln m}}$$

Si $a = p$, $E\left(\sum\limits_{i\geq[an]} X_i(n)\right) \sim \dfrac{1}{2} m^n$ ne dépend pas de a

Si $a < p$, $E\left(\sum\limits_{i\geq[an]} X_i(n)\right) \sim m^n$ ne dépend pas de a