$\boxed{\text{CCP 2000 - Option PC - Maths 1}}$

$\boxed{\text{Partie I}}$

1) a) On note $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A , $C'_1, ..., C'_n, C'_{n+1}, ..., C'_{2n}$ celles de M , avec : $C'_k = \begin{pmatrix} C_k \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}$ pour $1 \leq k \leq n$. Si A est non inversible , ses colonnes sont liées : $\exists(\lambda_1, .., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ tq $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_n C_n = 0_{n,1}$. Alors $\lambda_1 C'_1 + \cdots + \lambda_n C'_n = 0_{2n,1}$, donc la famille $(C'_1, ..., C'_n)$ est liée , donc la famille $(C'_1, ..., C'_n, C'_{n+1}, ..., C'_{2n})$ aussi , donc M est non inversible .

b) $XP = M \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$

c) On calcule les déterminants de X et P en développant suivant les n premières colonnes de X et les p dernières colonnes de P : $\det(X) = \det(C)$ et $\det(P) = \det(A)$

2) Soit $k = \dim(F)$. On prend une base de F , qu'on complète en une base de $\mathbf{R}^n$. F étant stable par u la matrice de u dans cette base est de la forme M , où A est la matrice de v dans la base choisie de F . On a alors : $\chi_u(x) = \det \begin{pmatrix} xI_k - A & -B \\ 0_{n-k,k} & xI_{n-k} - C \end{pmatrix} = \det(xI_k - A)\det(xI_{n-k} - C)$ et $\chi_v(x) = \det(xI_k - A)$. Conclusion : $\boxed{\chi_v \text{ divise } \chi_u}$

3) $F_u(x)$ est non vide et stable par CL , et : $y \in F_u(x) \Rightarrow \exists P \in \mathbf{R}[X]$ tq $y = P(u)(x)$. Alors $u(y) = Q(u)(x)$ avec $Q(X) = XP(X)$. Donc $u(y) \in F_u(x)$. Conclusion :

$\boxed{F_u(x) \text{ est un SEV de } \mathbf{R}^n \text{ stable par } u}$

4) a) La famille $(x, u(x), ..., u^n(x))$ comporte $n+1$ vecteurs dans un EV de dimension n , donc est liée , donc l'ensemble $\{k \in \mathbf{N} \ / \ (x, u(x), ..., u^k(x)) \text{ liée}\}$ n'est pas vide . Il est inclus dans $\mathbf{N}$ donc admet un plus petit élément q , et $\underline{q \leq n}$. ($x \neq 0_E$ donc (x) est libre : $\underline{q \geq 1}$)

b) $(x, u(x), ..., u^q(x))$ est liée , donc $\exists(a_0, ..., a_q) \neq (0, .., 0)$ tq $\sum_{k=0}^{q} a_k u^k(x) = 0_E$. Or si on pose $S(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k$, on a $\sum_{k=0}^{q} a_k u^k = S(u)$ et donc $S(u)(x) = 0_E$. Si a_q était nul il resterait $\sum_{k=0}^{q-1} a_k u^k(x) = 0_E$ avec $(a_0, ..., a_{q-1}) \neq (0, .., 0)$, ce qui est faux car la famille $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est libre par définition de q . Donc $\boxed{a_q \neq 0}$.

Par suite : $u^q(x) \in Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ et $u^q(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x)$, d'où $u^{q+1}(x) = \lambda_0 u(x) + \lambda_1 u^2(x) + \cdots + \lambda_{q-2} u^{q-1}(x) + \lambda_{q-1}[\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x)]$ donc $u^{q+1}(x) \in Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ et par récurrence $u^{q+k}(x) \in Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ pour tout entier k . Finalement : $\forall P \in \mathbf{R}[X]$, $y = P(u)(x) \in Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ donc la famille est génératrice . Elle est libre , donc $\boxed{(x, u(x), ..., u^{q-1}(x)) \text{ est une base de } F_u(x)}$.

c) On peut écrire : $u^q(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 u(x) - \cdots - \alpha_{q-1} u^{q-1}(x)$. La matrice de u_0 dans la base $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -\alpha_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & 0 & -\alpha_{q-2} \\ (0) & & & 1 & -\alpha_{q-1} \end{pmatrix}$. On calcule son polynôme caractéristique en développant suivant la dernière colonne , ce qui donne :

$$\chi_{u_0}(X) = \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{q+i}(-\alpha_{i-1}) 1^{q-1-i}(-X)^{i-1} + (-X-\alpha_{q-1})(-X)^{q-1} = (-1)^q \sum_{k=0}^{q} \alpha_k X^k \text{ (car } \alpha_q = 1)$$

En particulier : $\chi_{u_0}(u)(x) = (-1)^q \sum_{k=0}^{q} \alpha_k u^k(x) = \frac{(-1)^q}{\alpha_q} \sum_{k=0}^{q} \alpha_k u^k(x) = 0_E$. On a vu que χ_{u_0} divise χ_u , donc $\chi_u(X) = K(X)\ \chi_{u_0}(X)$ et $\chi_u(u) = K(u) \circ \chi_{u_0}(u)$, par suite : $\chi_u(u)(x) = 0_E$

Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, donc $\boxed{\chi_u(u) = \widetilde{0}}$

Partie II

1) $(AX \mid Y) = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = (X \mid {}^tAY)$; $Tr(X\,{}^tY) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = (X \mid Y)$

Le calcul donne $(X\,{}^tY)Z = (Y \mid Z)X$

2) L'application $(A, B) \mapsto Tr({}^tAB)$ est bilinéaire ; $Tr({}^tAB) = Tr[{}^t({}^tAB)] = Tr({}^tBA)$ donc elle est symétrique . $Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geq 0$, $Tr({}^tAA) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$. $\underline{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } M_n(\mathbf{R})}$

3) a) $\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$

b) Si A est de rang r , alors il existe 2 matrices inversibles U et V carrées d'ordre n , telles que : $A = UJ_rV$, où J_r est la matrice de 3) a) . On pose :

$B = U \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$: $B \in M_{n,r}(\mathbf{R})$ et $C = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} V$: $C \in M_{r,n}(\mathbf{R})$

c) Si $r=1$: $B = U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{n,1} \end{pmatrix}$ et $C = (1,0,...,0)V = (v_{1,1}, v_{1,2}, ..., v_{1,n})$, donc en posant $X = B$ et $Y = {}^tC$, on a : $A = X\,{}^tY$, avec X, Y non nulles. Réciproque claire .

d) Par exemple $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$: il n'y a pas unicité .

Si $A = X\,{}^tY = Z\,{}^tT$, alors : $AT = \|T\|^2 Z = (X\,{}^tY)T = (Y \mid T)X \Rightarrow Z = \lambda X$ avec $\lambda = \frac{(Y|T)}{\|T\|^2}$ (car $\|T\|^2 \neq 0$) , $\lambda \neq 0$ car $Z \neq 0$. On remarque que : ${}^t(X\,{}^tY) = {}^t(Z\,{}^tT)$ d'où : $Y\,{}^tX = T\,{}^tZ$ et donc de même : $T = \mu Y$ avec $\mu \neq 0$. Alors : $Z\,{}^tT = \lambda\mu\, X\,{}^tY = X\,{}^tY \Leftrightarrow \lambda\mu = 1$

Conclusion : $\boxed{X\,{}^tY = Z\,{}^tT \Leftrightarrow \exists\lambda \neq 0 \; tq \; Z = \lambda X \text{ et } T = \frac{1}{\lambda} Y}$

4) a) La première colonne de $Z\,{}^tT$ est $t_1 Z$, etc ... Notons $T_j = (t_1^{(j)}, ..., t_n^{(j)})$

Soit : $M = \sum_{1\leq i\leq r} \sum_{1\leq j\leq s} \lambda_{i,j} Z_i\,{}^tT_j = 0_n$. La première colonne de M est $\sum_{1\leq i\leq r} \sum_{1\leq j\leq s} \lambda_{i,j} t_1^{(j)} Z_i$. Elle est de la forme $\alpha_{1,1}Z_1 + \cdots + \alpha_{1,r}Z_r$ et est nulle , et les colonnes Z_i sont libres , donc : $\alpha_{1,1} = \sum_{1\leq j\leq s} \lambda_{1,j} t_1^{(j)} = 0$, ... , $\alpha_{1,r} = \sum_{1\leq j\leq s} \lambda_{r,j} t_1^{(j)} = 0$

De même (2ème colonne) : $\alpha_{2,1} = \sum_{1\leq j\leq s} \lambda_{1,j} t_2^{(j)} = 0$, ... , $\alpha_{2,r} = \sum_{1\leq j\leq s} \lambda_{r,j} t_2^{(j)} = 0$ etc ... jusqu'à la $n^{\text{ème}}$ colonne de M .

On en arrive à $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^s \lambda_{1,j} T_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\forall j$, $\lambda_{1,j} = 0$, ... , $\sum_{j=1}^s \lambda_{r,j} T_j = 0$ donc $\forall j$, $\lambda_{r,j} = 0$. La famille est libre , donc de rang rs .

[Autre méthode : on complète la famille $(Z_1, ..., Z_r)$ en une base $(Z_1, ..., Z_n)$ de $\mathbf{R}^n$; de même $(T_1, ..., T_n)$. Soit P (resp Q) la matrice de passage de la base canonique à la base $(Z_1, ..., Z_n)$ (resp $(T_1, ..., T_n)$. On a : $Z_i = PC_i$, où C_i est la colonne nulle sauf un 1 en position i , et $T_j = QC_j$ donc $Z_i\,{}^tT_j = PC_i\,{}^tC_j\,{}^tQ = PE_{i,j}\,{}^tQ$, et les matrices $E_{i,j}$ constituent la base canonique de $M_n(\mathbf{R})$, donc sont libres , d'où le résultat]

b) Ici $r = s = n$, donc la famille $(X_i\,{}^tY_j)$ est une base de $M_n(\mathbf{R})$

c) On extrait une famille libre $(Z_1, ..., Z_r)$ dans $(V_1, ..., V_l)$, et $(T_1, ..., T_s)$ dans $(W_1, .., W_n)$. Les autres matrices V_k (resp W_q) s'expriment comme combinaisons linéaires des Z_i (resp T_j) , donc $V_k\,{}^tW_q$ est CL des $Z_i\,{}^tT_j$ et le rang est rs .

5) Pour X, Y, Z, T matrices colonnes , on a : ${}^t(X\,{}^tY)\,(Z\,{}^tT) = Y\,{}^tXZ\,{}^tT = (X \mid Z)\,Y\,{}^tT$ (d'après II 1) b)) et donc : $Tr\,[{}^t(X\,{}^tY)\,(Z\,{}^tT)] = (X \mid Z)\,Tr(Y\,{}^tT) = (X \mid Z)\,(Y \mid T)$

$Tr\,[{}^t(X_i\,{}^tY_j)\,(X_k\,{}^tY_m)] = (X_i \mid X_k)(Y_j \mid Y_m) = \delta_{i,k}\,\delta_{j,m}$. Par orthonormalité des familles (X_i) et (Y_j) , si $(i, j) \neq (k, m)$, on a 0 , sinon 1 .

La famille $X_i\,{}^tY_j$ est donc orthonormale .

La réciproque est fausse . Ex : $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donne la famille orthonormale $E_{i,j}$, mais n'est pas elle-même orthonormale (cependant si la famillle $X_i\,{}^tY_j$ est orthonormale , alors les familles (X_i) et (Y_j) sont orthogonales) .

6) a) Si A est de rang 1 , alors $\exists(X, Y)$ matrices colonnes non nulles telles que $A = X\,{}^tY$ donc $A^2 = X\,{}^tY.X\,{}^tY = (Y \mid X)A$ et $Tr(A) = (X \mid Y)$ d'après II 1) b) . Conclusion : $\boxed{A^2 = Tr(A)A}$

b) $i) \Leftrightarrow ii)$ est immédiat . $rg(A) = 1$ donc $A \neq 0_n$, donc :

$iii) \Leftrightarrow A^2 = 0_n \Leftrightarrow Tr(A)A = 0_n \Leftrightarrow Tr(A) = 0$. Conclusion : $iii) \Leftrightarrow ii)$

Si $Tr(A) = 0$, alors $A^2 = 0_n$, donc la seule valeur propre de A est 0 et $A \neq 0_n$, donc A n'est pas diagonalisable .

Si $Tr(A) \neq 0$, alors le polynôme : $S(X) = X^2 - Tr(A)X$ est scindé de racines simples , et $S(A) = 0_0$, donc A est diagonalisable . Conclusion : $ii) \Leftrightarrow iv)$

7) Considérons 2 bases (X_i) et (Y_j) de $\mathbf{R}^n$ telles que $\forall(i, j)$, $(X_i \mid Y_j) \neq 0$. Posons $M_{i,j} = X_i\,{}^tY_j$. La famille obtenue est libre , donc c'est une base de $M_n(\mathbf{R})$, dont tous les éléments sont des matrices de rang 1 diagonalisables .

Partie III

1) b) $H_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $Sp(H_0) = \{0, 1, 2\}$, 1 étant valeur propre double

a) c) $Sp(A_0) = \{1, 2\}$; $Sp(B_0) = \{0, 1\}$; A_0 et B_0 ont 2 valeurs propres distinctes donc sont diagonalisables . Pour H_0 , les SEP associés à 0 et 2 sont de dimension 1 , et H_0-I_4 et de rang 2 , donc le SEP associé à 1 est de dimension 2 , donc $\underline{H_0 \text{ est diagonalisable}}$.

2) Si b est valeur propre de B , alors elle est aussi valeur propre de ${}^tB$. Donc : $a \in Sp(A) \Rightarrow \exists V \neq 0\ tq\ AV = aV$; $b \in Sp(B) \Rightarrow \exists W \neq 0\ tq\ {}^tBW = bW \Rightarrow {}^tWB = b\,{}^tW$. Alors :

$\overline{h}_{A,B}(V\,{}^tW) = AV\,{}^tW - V\,{}^tWB = aV\,{}^tW - bV\,{}^tW = (a-b)V\,{}^tW$ et $V\,{}^tW \neq 0_n$, donc $a-b$ est valeur propre de $\overline{h}_{A,B}$, d'où l'inclusion .

3) Si A est diagonalisable , il existe une base (V_i) de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de A

Si B est diagonalisable , alors ${}^tB$ aussi , il existe une base (W_j) de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de ${}^tB$. Alors la famille $(Vi\,{}^tW_j)$ est une base de $M_n(\mathbf{R})$ d'après II , formée de vecteurs propres de $h_{A,B}$ qui est donc diagonalisable .

4) $\chi_A(X) = (X-a_1)...(X-a_n)$ d'où $\chi_A(B) = (B-a_1I_n)...(B-a_nI_n)$ et $\det(\chi_A(B)) = \det(B-a_1I_n)...\det(B-a_nI_n)$. Par suite : $\det(\chi_A(B)) = 0 \Leftrightarrow \exists k\ tq\ \det(B-a_kI_n) = 0 \Leftrightarrow \exists k\ tq\ a_k \in Sp(B) \Leftrightarrow Sp(B) \cap Sp(A) \neq \emptyset$

5) a) Par hypothèse : $AM - MB = \lambda M \Rightarrow AM = M(B+\lambda I_n)$. De même :

$A^2M = AAM = AM(B+\lambda I_n) = M(B+\lambda I_n)(B+\lambda I_n) = M(B+\lambda I_n)^2$ etc ... Donc pour tout $k \in \mathbf{N}$: $A^kM = M(B+\lambda I_n)^k$ et par linéarité , c'est vrai pour tout polynôme P .

b) En particulier si on prend $P = \chi_A$, on a : $\chi_A(A) = 0_n$ d'après la partie I , donc $M\chi_A(B+\lambda I_n) = 0_n$, ce qui implique que $\chi_A(B+\lambda I_n)$ n'est pas inversible (sinon M serait nulle ce qui est faux) .

c) D'après 4) , on en déduit que A et $(B+\lambda I_n)$ ont une valeur propre commune , soit a : $\det(B+\lambda I_n - aI_n) = 0$ donc $b = a-\lambda$ est valeur propre de B et $\lambda = a-b$. On a les 2 inclusions donc $\boxed{Sp(\overline{h}_{A,B}) = \{(a-b)\ ;\ a \in Sp_C(A)\ ,\ b \in Sp_C(B)\}}$

6) $0 \in Sp(\overline{h}_{A,B}) \Leftrightarrow Sp_C(A) \cap Sp_C(B) \neq \emptyset$

7) a) Soit $u_{i,j}$ l'endomorphisme de R^n dont $M_{i,j}$ est la matrice dans la base canonique . La matrice de $u_{i,j}$ dans la base $(V_1,...,V_n)$ est $E_{i,j}$, ce qui définit entièrement u donc $M_{i,j}$. De plus $\sum_{i,j}\lambda_{i,j}M_{i,j} = 0_n \Leftrightarrow \sum_{i,j}\lambda_{i,j}u_{i,j} = \widetilde{0} \Leftrightarrow \sum_{i,j}\lambda_{i,j}E_{i,j} = 0_n \Leftrightarrow \forall i,j\ ,\ \lambda_{i,j} = 0$. Donc la famille $(M_{i,j})$ est une base de $M_n(\mathbf{R})$.

b) On a : $AV_k = \lambda_kV_k$ et $M_{i,j}V_k = \delta_{j,k}V_i$ d'où $h_A(M_{i,j})V_k = AM_{i,j}V_k - M_{i,j}AV_k = \delta_{j,k}AV_i - \lambda_kM_{i,j}V_k = \delta_{j,k}\lambda_iV_i - \lambda_kM_{i,j}V_k = (\lambda_i-\lambda_k)M_{i,j}V_k$. Ceci est vrai pour tous les vecteurs de la base (V_k) , donc : $h_A(M_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_k)M_{i,j}$. Donc $M_{i,j}$ est vecteur propre de h_A , ce qui prouve que h_A est diagonalisable .

c) La matrice de h_A dans la base des $(M_{i,j})$ est diagonale , avec sur la diagonale $\lambda_i - \lambda_j$. $\ker r(h_A)$ est engendré par les matrices $M_{i,j}$ pour lesquelles $\lambda_i = \lambda_j$, c'est à dire pour $(i,j) \in J$ Ceci se produit lorsque : $\lambda_i = \lambda_j = \mu_1$, ce qui donne m_1 choix pour i et autant pour j , donc m_1^2 matrices $M_{i,j}$. Même raisonnement pour μ_2 etc , donc on a $\sum_{i=1}^{p} m_i^2$ matrices concernées , qui engendrent $\ker(h_A)$.

d) De $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ et $m_k \geq 1$ donc $m_k^2 \geq m_k$ on déduit : $\dim \ker(h_A) \geq n$. On a égalité ssi $\forall k$, $m_k^2 = m_k$ c'est à dire $\forall k,\ m_k = 1$, ce qui signifie que $p = n$ et que les valeurs propres de A sont toutes distinctes .

e) A est supposée semblable à la matrice diagonale D dont les éléments diagonaux d_k sont tous distincts . Alors : $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n-1}A^{n-1} = 0_n \Leftrightarrow \lambda_0 I_n + \lambda_1 D + \cdots + \lambda_{n-1}D^{n-1} = 0_n \Leftrightarrow \forall k$, $\lambda_0 + \lambda_1 d_k + \cdots + \lambda_{n-1}d_k^{n-1} = 0_n$. Le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-1}X^{n-1}$ est de degré au plus $n-1$ et admet n racines distinctes , donc est nul , donc tous les λ_i sont nuls . Conclusion : la famille $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est libre .

Cette famille est incluse dans $\mathbf{R}[A]$, et comme $\chi_A(A) = 0_n$, A^n est combinaison linéaire de $I_n, A, ..., A^{n-1}$, de même que A^{n+1} , etc ... . Donc $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est une base de $\mathbf{R}[A]$. On peut noter que $\forall k$, $h_A(A^k) = 0_n$, donc $\mathbf{R}[A] \subset \ker(h_A)$ et les dimensions étant toutes deux n , on a l'égalité : $\boxed{\ker(h_A) = \mathbf{R}[A]}$.

8) h_A étant diagonalisable , ses valeurs propres sont réelles . Si A n'admettait que des valeurs propres complexes , 2 à 2 conjuguées , alors pour $a \in Sp_C(A)$, $a - \overline{a}$ serait valeur propre de h_A ce qui est faux puisque $a - \overline{a} \notin \mathbf{R}$. Donc A admet au moins une valeur propres réelle λ .

Pour tout vecteur $Y \in \mathbf{R}^n$, il existe une matrice $U \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $UX = Y$. $(P_{i,j})$ est une base de $M_n(\mathbf{R})$, donc $\exists \alpha_{i,j}$ tq $U = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_{i,j}$. D'où : $Y = UX = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_{i,j} X$. Donc <u>la famille $(P_{i,j}X)$ est génératrice de $\mathbf{R}^n$</u> . On peut en extraire une base .

Pour chaque vecteur de cette base , on a $AX = \lambda X$ et $AP_{i,j}X - P_{i,j}AX = \lambda_{i,j} P_{i,j} X$, d'où $AP_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X$, donc les vecteurs $P_{i,j}X$ sont vecteurs propres de A , qui possède donc uen base de vecteurs propres . Donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$. On a ainsi prouvé l'équivalence entre la diagonalisabilité de A et celle de h_A .