

## Banque PT 2025 : Epreuve de Mathématiques A

### Exercice 1

Cet exercice comporte trois parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes et utilisent toutes les deux des résultats de la partie 1.

On définit  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}[X]$  par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = ((X^2 - 1)P')'$$

C'est-à-dire que  $\varphi(P)$  est, le polynôme dérivé du polynôme  $(X^2 - 1)P'$ .

### Préliminaire

1) (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

La dérivation est un opérateur linéaire donc l'application  $\varphi$  est linéaire. La dérivée d'un polynôme et le produit de deux polynômes donnant encore un polynôme, l'application  $\varphi$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

(b) Calculer  $\varphi(X^n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On pourra traiter séparément le cas  $n = 0$ .

- Si  $n = 0 : \forall k \in \mathbb{R}, \varphi(k) = 0$
- Si  $n = 1 : \varphi(X) = 2X$
- Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . On a :

$$\varphi(X^n) = (n(X^2 - 1)X^{n-1})' = (nX^{n+1} - nX^{n-1})' = n(n+1)X^n - n(n-1)X^{n-2}$$

### Partie 1 : Polynômes de Legendre

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$U_n(X) = (X^2 - 1)^n \text{ et } P_n(X) = U_n^{(n)}(X)$$

On rappelle que si  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P^{(n)}$  la dérivée  $n$ -ème du polynôme  $P$ . On remarque que  $U_0(X) = P_0(X) = 1$ .

2) Calculer  $P_1$  et  $P_2$ .

$$\text{On a : } P_1(X) = U_1^{(1)}(X) = 2X \text{ et } P_2(X) = U_2^{(2)}(X) = 4X^3 - 4X$$

3) Déterminer le degré de  $U_n$  puis celui de  $P_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Le polynôme  $U_n$  est un polynôme unitaire de degré  $2n$ . Puis on dérive  $n$  fois ce polynôme ce qui permet d'obtenir un polynôme de degré  $2n - n = n$ . Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$

4) On fixe  $n \in \mathbb{N}$ .  
a) Vérifier que

$$(X^2 - 1)U_n' = 2nXU_n \tag{E}$$

On écrit :  $(X^2 - 1)U'_n = (X^2 - 1)((X^2 - 1)^n)' = n2X(X^2 - 1)(X^2 - 1)^{n-1} = 2nXU_n$

- b) Rappeler la formule de Leibniz exprimant la dérivée p-ième d'un produit de deux polynômes, pour  $p \in \mathbb{N}$ .

Voir Cours

- c) En dérivant  $n + 1$  fois l'égalité (E), montrer que :

$$\varphi(P_n) = n(n + 1)P_n$$

Le polynôme  $X^2 - 1$  étant de degré 2 sa dérivée troisième sera nulle donc la formule de Leibniz appliquée au membre de gauche de l'égalité ne donnera qu'une somme de trois termes qui sont :

$$\binom{n+1}{0} (X^2 - 1)U_n^{(n+1)}(X) + \binom{n+1}{1} 2XU_n^{(n)}(X) + \binom{n+1}{2} 2U_n^{(n-1)}(X)$$

Ce qui peut s'écrire

$$(X^2 - 1)U_n^{(n+2)}(X) + 2(n+1)XU_n^{(n+1)}(X) + 2\frac{n(n+1)}{2}U_n^{(n)}(X)$$

Pour le membre de droite le polynôme  $2nX$  étant de degré 1, sa dérivée seconde sera nulle

Donc la formule de Leibniz appliquée au membre de droite ne donnera qu'une somme de deux termes :

$$\binom{n+1}{0} 2nXU_n^{(n+1)}(X) + \binom{n+1}{1} 2nU_n^{(n)}(X) = 2nXU_n^{(n+1)}(X) + 2n(n+1)U_n^{(n)}(X)$$

Ainsi  $(X^2 - 1)U_n^{(n+2)}(X) + 2(n+1)XU_n^{(n+1)}(X) + n(n+1)U_n^{(n)}(X)$

$$= 2nXU_n^{(n+1)}(X) + 2n(n+1)U_n^{(n)}(X)$$

Donc  $(X^2 - 1)U_n^{(n+2)}(X) + 2XU_n^{(n+1)}(X) + 2nXU_n^{(n+1)}(X) = 2nXU_n^{(n+1)}(X) + n(n+1)U_n^{(n)}(X)$

Donc  $(X^2 - 1)U_n^{(n+2)}(X) + 2XU_n^{(n+1)}(X) = n(n+1)U_n^{(n)}(X)$

Or  $\varphi(P_n)(X) = ((X^2 - 1)P'_n(X))' = 2XP'_n(X) - P''_n(X) = 2XU_n^{(n+1)}(X) + (X^2 - 1)U_n^{(n+2)}(X)$

Ainsi  $\varphi(P_n)(X) = n(n+1)U_n^{(n)}(X) = n(n+1)P_n(X)$

On pourra utiliser cette égalité dans les parties suivantes.

### Partie 2 : Etude d'un endomorphisme induit

Dans cette question, on fixe un entier naturel non nul  $N$ .

- 5) Montrer que  $\mathbb{R}_N[X]$  est stable par  $\varphi$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}_N[X]$  tel que  $\deg P \geq 1$ . Alors  $\deg P' = \deg P - 1$  donc  $\deg(X^2 - 1)P' = \deg P + 1$  donc  $\deg \varphi(P) = \deg P$

Si  $\deg P = 0$  alors  $P' = 0$  et donc  $\varphi(P) = 0$  et l'égalité est encore vérifiée.

Ainsi  $\forall P \in \mathbb{R}_N[X], \deg \varphi(P) = \deg P$  et  $\mathbb{R}_N[X]$  est stable par  $\varphi$

On aurait pu aussi justifier par le fait que pour tous les vecteurs  $\{X^k ; k \in \llbracket 0 ; N \rrbracket\}$  de la base canonique de  $\mathbb{R}_N[X]$  on a montré que  $\deg \varphi(X^n) = \deg X^n = n$ . Ainsi  $\mathbb{R}_N[X]$  est stable par  $\varphi$

On note alors  $\varphi_N$  l'endomorphisme induit par  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_N[X]$ . Autrement dit,

$$\varphi_N: \begin{matrix} \mathbb{R}_N[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_N[X] \\ P & \mapsto & \varphi(P). \end{matrix}$$

- 6) Ecrire la matrice  $M_N$  représentative de  $\varphi_N$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_N[X]$ . Quelle est la taille de cette matrice ?

D'après la question 1)b) on obtient

$$M_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -N(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & N(N+1) \end{pmatrix}$$

$M_N$  est une matrice carrée triangulaire supérieure de taille  $N + 1$

- 7) Déterminer les valeurs propres de  $\varphi_N$ . Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

La matrice  $M_N$  est triangulaire supérieure de taille  $N + 1$  donc ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres : comme elle possède exactement  $N + 1$  valeurs propres distinctes, on en déduit qu'elle est diagonalisable. Par suite l'endomorphisme  $\varphi_N$  est diagonalisable.

- 8) En utilisant la partie précédente, déterminer les sous-espaces propres de  $\varphi_N$ .

On a vu que, d'après la question 4)c) de la partie I,  $\forall n \in \llbracket 0 ; N \rrbracket, \varphi(P_n) = n(n + 1)P_n$ . Comme  $P_n \neq 0, P_n$  est bien un vecteur propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre  $n(n + 1)$  et  $E_{n(n+1)}$ , le sous espace propre associé à la valeur propre  $n(n + 1)$ , est une droite vectorielle telle que  $E_{n(n+1)} = \text{Vect}\{P_n\}$

- 9) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de  $\varphi$ .

$\varphi_N$  admet exactement  $N + 1$  valeurs propres distinctes et ne saurait en admettre davantage dans un espace de dimension  $N + 1$ . Donc on peut affirmer que  $\text{Sp}\{\varphi\} = \{n(n + 1); n \in \llbracket 0 ; N \rrbracket\}$

### Partie 3 : Etude d'un produit scalaire

Dans la suite on confond polynôme et fonction polynomiale et on munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

On note  $\| \cdot \|$  la norme associée à ce produit scalaire.

On rappelle que les suites de polynômes  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ont été définies dans la partie 1. Dans la suite, on pourra utiliser les résultats prouvés dans cette partie.

On cherche une suite de polynômes  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(Q_0, \dots, Q_n)$  soit une base orthonormée de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour ce produit scalaire.

10) Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

- Tout d'abord la forme est bien définie car le produit de deux fonctions polynomiales est une fonction continue sur  $[-1, +1]$  donc l'intégrale proposée existe toujours.
- L'intégration est un opérateur linéaire, de même que la multiplication de deux réels est un opérateur bilinéaire. Ainsi la forme proposée est clairement *bilinéaire*.
- La multiplication de deux réels étant commutative la forme proposée est *symétrique*.
- La positivité de l'intégrale permet d'affirmer que la forme est *positive*.
- Supposons  $\langle P, P \rangle = 0$ . Alors la stricte positivité de l'intégrale permet d'affirmer que le polynôme  $P^2(t)$  admet une infinité de racines dans  $[-1; +1]$ . C'est donc le polynôme nul. Ce qui permet d'assurer que la forme est *définie*.
- On obtient bien une forme *bilinéaire, symétrique, définie et positive* c'est donc un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

11) (a) Montrer que pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\langle \varphi(P_n), P_m \rangle = \langle P_n, \varphi(P_m) \rangle$ . On pourra effectuer une intégration par parties.

En suivant les indications de l'énoncé on écrit

$$\langle \varphi(P_n), P_m \rangle = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)P'_n(t))' P_m(t) dt$$

Et en intégrant par parties, on obtient :

$$\langle \varphi(P_n), P_m \rangle = [(t^2 - 1)P'_n(t)P_m(t)]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'_n(t)P'_m(t) dt$$

Or  $[(t^2 - 1)P'_n(t)P_m(t)]_{-1}^{+1} = 0$  donc

$$\langle \varphi(P_n), P_m \rangle = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'_n(t)P'_m(t) dt$$

De la même façon

$$\langle P_n, \varphi(P_m) \rangle = [P_n(t)(t^2 - 1)P'_m(t)]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^1 P'_n(t)(t^2 - 1)P'_m(t) dt$$

Comme  $[P_n(t)(t^2 - 1)P'_m(t)]_{-1}^{+1} = 0$ , on a bien l'égalité proposée :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \langle \varphi(P_n), P_m \rangle = \langle P_n, \varphi(P_m) \rangle$$

(b) En déduire que  $\langle P_n, P_m \rangle = 0$  pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m$ .

D'après la question précédente :

$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m, \langle \varphi(P_n), P_m \rangle = \langle P_n, \varphi(P_m) \rangle \Leftrightarrow n(n+1)\langle P_n, P_m \rangle = m(m+1)\langle P_n, P_m \rangle$   
 Or l'application  $x \mapsto x(x+1)$  étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ ,  
 $n \neq m \Rightarrow n(n+1) \neq m(m+1)$

D'où  $\langle P_n, P_m \rangle = 0$

Et la famille  $\{P_n\}_{n \in \llbracket 0; N \rrbracket}$  est orthogonale pour le produit scalaire proposé.

12) Calcul de  $\|P_n\|$ . Dans cette question, on fixe  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Donner les racines de  $U_n$  ainsi que leur ordre de multiplicité.

+1 et -1 sont les racines de  $U_n$  toutes deux d'ordre de multiplicité  $n$ .

(b) Montrer que  $\|P_n\|^2 = (-1)^n \langle U_n^{(2n)}, U_n \rangle$ .

On a  $\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle = \langle U_n^{(n)}, U_n^{(n)} \rangle = \int_{-1}^1 U_n^{(n)}(t) U_n^{(n)}(t) dt$

En effectuant une intégration par parties on obtient :

$$\|P_n\|^2 = \left[ U_n^{(n-1)}(t) U_n^{(n)}(t) \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^1 U_n^{(n-1)}(t) U_n^{(n+1)}(t) dt$$

Or +1 et -1 sont toutes deux des racines de  $U_n$  d'ordre de multiplicité  $n$  ce qui assure que

$$U_n^{(n-1)}(+1) = U_n^{(n-1)}(-1) = 0$$

Donc  $\left[ U_n^{(n-1)}(t) U_n^{(n)}(t) \right]_{-1}^{+1} = 0$

Ainsi

$$\|P_n\|^2 = - \int_{-1}^1 U_n^{(n-1)}(t) U_n^{(n+1)}(t) dt$$

Si on procède ainsi à  $n$  intégration par parties successives on obtient :

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n \int_{-1}^1 U_n(t) U_n^{(2n)}(t) dt = (-1)^n \langle U_n^{(2n)}, U_n \rangle$$

(c) Calculer  $U_n^{(2n)}$ . On pourra commencer par calculer son degré.

$U_n$  est, par définition un polynôme unitaire de degré  $2n$  donc si on le dérive  $2n$  fois on obtient un polynôme constant dont la valeur correspond au produit des entiers entre 1 et  $2n$ .

Ainsi

$$U_n^{(2n)}(X) = P_n^{(n)}(X) = (2n)!$$

On admet que

$$\int_{-1}^1 U_n(t) dt = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

13) Déduire des résultats précédents la valeur de  $\|P_n\|$ .

On a

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n \left\langle U_n^{(2n)}, U_n \right\rangle = (-1)^n \langle (2n)!, U_n \rangle = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 U_n(t) dt$$

Donc

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n (2n)! (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Donc

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1}} = 2^n n! \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

14) Donner une suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  solution du problème introduit au début de cette partie.

La base orthonormée cherchée pour le produit scalaire proposé est donc la famille

$$\left\{ Q_n = \frac{P_n}{\|P_n\|} \right\}_{n \in \llbracket 0; N \rrbracket}$$

## Exercice 2

Cet exercice comporte quatre parties qui sont en grande partie indépendantes. Les notions et variables étudiées dans la partie 1 sont utilisées dans les parties suivantes.

Un groupe de  $n \geq 3$  amis parie sur l'issue d'un match opposant deux équipes de rugby : l'équipe A et l'équipe B. On fait les hypothèses suivantes :

- Chaque équipe a une probabilité  $\frac{1}{2}$  de gagner le match.
- Le match n'est pas truqué : son issue est indépendante des paris des joueurs.
- Chaque joueur parie 1 euro.
- Chaque joueur effectue son pari indépendamment des autres joueurs.
- Un joueur est déclaré gagnant s'il a pari  sur la bonne issue du match.
- L'ensemble des gagnants se partage équitablement la mise totale de  $n$  euros.
- S'il n'y a aucun gagnant, la mise totale de  $n$  euros est reversée au club de rugby local.

Dans l'ensemble de l'exercice, on appelle gain d'un joueur la somme qu'il reçoit à l'issue du match. Ce gain ne prend pas en compte la somme qui a été mis e. Ainsi s'il y a  $m \geq 1$  joueurs gagnants, le gain de chacun de ces joueurs est de  $\frac{n}{m}$ .

### Partie 1 : calcul de l'espérance du gain pour un joueur

On numérote les joueurs de 1 à  $n$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note :

- $Y_k$  la variable qui vaut 1 si le joueur  $k$  a gagné et 0 sinon,
- $X_k$  le gain, en euros, du joueur  $k$  à l'issue du match.

Enfin, on note :

- $N = \sum_{k=1}^n Y_k$  le nombre de gagnants,
- $S = \sum_{k=1}^n X_k$  la somme des gains, en euros, des joueurs.

On admet que  $Y_k, X_k, N$  et  $S$  sont des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

- 1) Donner la loi de  $Y_k$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ainsi que celle de  $N$ . On explicitera les probabilités associées à ces lois.

- **Loi de  $Y_k$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$**  : Le joueur  $k$  a deux façons de gagner selon que l'équipe  $A$  ou l'équipe  $B$  remporte le match et chaque équipe a une probabilité  $\frac{1}{2}$  de gagner le match. La formule des probabilités totales assure que  $\mathbf{P}(Y_k) = \mathbf{P}(Y_k \cap A) + \mathbf{P}(Y_k \cap B)$  si on se permet de confondre le nom de l'équipe avec le nom de l'évènement « l'équipe *unetelle* a gagné ». Ainsi

$$\mathbf{P}(Y_k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Et

|                           |               |               |
|---------------------------|---------------|---------------|
| $Y_k$                     | 0             | 1             |
| $\mathbf{P}(Y_k = \dots)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Donc  $Y_k$  suit une loi de Bernouilli de paramètre  $\frac{1}{2}$

- **Loi de  $N$**  : Chaque joueur effectuant son pari indépendamment des autres joueurs, la loi  $N$  est la somme de  $n$  variables aléatoires de Bernouilli indépendantes donc  $N$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$  de paramètres  $n$  et  $p = \frac{1}{2}$  et on a :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbf{P}(N = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- 2) Expliquer pourquoi  $S(\Omega) = \{0, n\}$  puis expliciter la loi de  $S$  et calculer  $\mathbb{E}(S)$ .

- S'il n'y a aucun gagnant  $S = 0$  et la mise totale de  $n$  euros est reversée au club de rugby local.
- S'il y a  $k \geq 1$  gagnants alors le gain de chacun de ces joueurs étant de  $\frac{n}{k}$  on a

$$S = k \times \frac{n}{k} = n$$

Ainsi  $S(\Omega) = \{0, n\}$

En outre tous les évènements  $(Y_k = 0)$  étant indépendants

$$\mathbf{P}(S = 0) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (Y_k = 0)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(Y_k = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La mise totale étant remportée dès qu'il y a un gagnant on a donc

$$\mathbf{P}(S = n) = 1 - \mathbf{P}(S = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On en déduit :

$$\mathbf{E}(S) = 0 \times \mathbf{P}(S = 0) + n \times \mathbf{P}(S = n)$$

Donc

$$\mathbf{E}(S) = n \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right)$$

- 3) En déduire la valeur de  $\mathbf{E}(X_k)$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (le calcul de la loi de  $X_k$  n'est pas nécessaire pour cette question).

Par linéarité de l'espérance on peut écrire que :

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k)$$

De plus, les conditions de l'expérience aléatoire fixées par hypothèse permettent d'affirmer que les joueurs endossent le même rôle et que donc ils possèdent la même espérance de gain notée  $\alpha$ . Ainsi

$$\mathbf{E}(S) = n\alpha = n \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right)$$

Ainsi

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{E}(X_k) = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

- 4) Un nouvel ami arrive dans le groupe, les joueurs ont-ils intérêt à ce qu'il parie avec eux ?

Si un nouvel ami arrive dans le groupe l'espérance de gain de chacun devient :

$$1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} > 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

Les joueurs ont donc intérêt à ce qu'il parie avec eux.

### **Partie 2 : étude de la variable $X_k$**

On fixe  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et on étudie la variable  $X_k$ .

- 5) Déterminer  $\mathbf{P}(X_k = 0)$ .

L'évènement  $(X_k = 0)$  se produit exactement lorsque le  $k$ -ième joueur perd. Ainsi :

$$\mathbf{P}(X_k = 0) = \mathbf{P}(Y_k = 0) = \frac{1}{2}$$

- 6)

- a) Quelle est la loi conditionnelle de la variable  $N - 1$  sachant l'évènement  $(Y_k = 1)$  ?

L'évènement  $(Y_k = 1)$  étant réalisé le joueur  $k$  est gagnant donc les  $N - 1$  autres gagnants sont à choisir parmi les  $n - 1$  joueurs restants. Ainsi la loi conditionnelle de la variable  $N - 1$  sachant l'évènement  $(Y_k = 1)$  suit une  $\mathcal{B}\left(n - 1; \frac{1}{2}\right)$ . Donc :

$$\mathbf{P}_{(Y_k=1)}(N - 1 = p) = \binom{n - 1}{p} \left(\frac{1}{2}\right)^p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-p} = \binom{n - 1}{p} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

b) En déduire que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n - 1}{i - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On pourra utiliser les évènements  $(X_k = \frac{n}{i})$ ,  $(Y_k = 1)$  et  $(N = i)$ .

On a  $(X_k = \frac{n}{i}) = (Y_k = 1) \cap (N = i)$  : en effet cet évènement est réalisé lorsque le joueur  $k$  a gagné et qu'il y a exactement  $i$  gagnants. Ainsi :  $\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \mathbf{P}((Y_k = 1) \cap (N = i))$

On en déduit :

$$\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \mathbf{P}(Y_k = 1) \times \mathbf{P}_{(Y_k=1)}(N = i)$$

Donc

$$\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \mathbf{P}(Y_k = 1) \times \mathbf{P}_{(Y_k=1)}(N - 1 = i - 1)$$

D'où

$$\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \mathbf{P}(Y_k = 1) \times \binom{n - 1}{i - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \binom{n - 1}{i - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Finalement, on obtient bien la formule proposée :

$$\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n - 1}{i - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

7) Retrouver la valeur de  $\mathbb{E}(X_k)$  calculée dans la partie précédente.

Par définition de l'espérance :

$$\mathbf{E}(X_k) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right)$$

Donc

$$\mathbf{E}(X_k) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \binom{n - 1}{i - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \binom{n - 1}{i - 1}$$

Or

$$\frac{n}{i} \binom{n - 1}{i - 1} = \binom{n}{i}$$

D'où

$$\mathbf{E}(X_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (2^n - 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ce qui est bien la formule obtenue à la question 3) de la Partie I

8) On considère un autre joueur  $j \neq k$ . Les variables  $X_j$  et  $X_k$  sont-elles indépendantes ?

Dans le cas particulier où les joueurs  $j$  et  $k$  sont les seuls à gagner on constate que les évènements  $(X_j = n)$  et  $(X_k = n)$  sont clairement incompatibles. Donc :

$$\mathbf{P}((X_j = n) \cap (X_k = n)) = 0$$

Or d'après les formules précédentes :

$$\mathbf{P}(X_j = n) = \mathbf{P}(X_k = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc

$$\mathbf{P}(X_j = n)\mathbf{P}(X_k = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \neq 0$$

Donc Les variables  $X_j$  et  $X_k$  ne sont pas indépendantes

### Partie 3 : le match retour (version 1)

Après ce premier pari, le groupe d'amis se retrouve et parie sur un nouveau match entre les deux équipes. On suppose que l'issue du deuxième match est indépendante de celle du premier. Chaque joueur parie alors son gain du premier match sur le second, c'est-à-dire que le joueur  $k$  parie  $X_k$  euros. Les gagnants se partagent alors équitablement la mise totale, c'est-à-dire  $S$  euros. On note :

- $Z_k$  le gain du joueur  $k$  lors de ce deuxième pari,
- $M$  le nombre de gagnants du deuxième pari,
- $T = \sum_{k=1}^n Z_k$  la somme des gains du deuxième pari.

On admet que  $Z_k, M$  et  $T$  sont des variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

9)

a) Donner la valeur des probabilités  $\mathbf{P}_{(S=0)}(T = 0)$  et  $\mathbf{P}_{(S=n)}(T = 0)$ .

- Si  $S = 0$  : alors il n'y a eu aucun gagnant dès le premier pari donc la somme mise lors du second pari est nulle, donc  $\mathbf{P}_{(S=0)}(T = 0) = 1$
- Si  $S = n$  : alors les  $n$  euros du gain de la première partie sont misés à nouveau lors de la seconde manche. L'évènement  $(T = 0)$  coïncide exactement avec l'évènement « il n'y a aucun vainqueur lors du deuxième pari ». Donc :

$$\mathbf{P}_{(S=n)}(T = 0) = \mathbf{P}(M = 0) = \mathbf{P}(S = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) En déduire que

$$\mathbf{P}(T = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \text{ et } \mathbf{P}(T = n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$$

Etant donné que  $S(\Omega) = \{0, n\}$ , les évènements  $(S = 0)$  et  $(S = n)$  forment un système complet d'évènements, donc la formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$\mathbf{P}(T = 0) = \mathbf{P}((T = 0) \cap (S = 0)) + \mathbf{P}((T = 0) \cap (S = n))$$

D'où

$$\mathbf{P}(T = 0) = \mathbf{P}(S = 0)\mathbf{P}_{(S=0)}(T = 0) + \mathbf{P}(S = n)\mathbf{P}_{(S=n)}(T = 0)$$

Donc

$$\mathbf{P}(T = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Comme  $\mathbf{P}(T = n) = 1 - \mathbf{P}(T = 0) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$

c) Calculer l'espérance et la variance de  $T$ .

On remarque que  $T(\Omega) = S(\Omega) = \{0, n\}$  donc la loi  $\frac{1}{n}T$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$

Donc  $\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}T\right) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \frac{1}{n}\mathbf{E}(T)$  d'où  $\mathbf{E}(T) = n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$

Et la variance

$$\mathbf{V}\left(\frac{1}{n}T\right) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(T) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 \left(1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2\right)$$

Donc

$$\mathbf{V}(T) = \frac{n^2}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

d) Calculer la covariance  $\text{Cov}(S, T)$ .

Par définition,  $\text{Cov}(S, T) = \mathbf{E}(ST) - \mathbf{E}(S)\mathbf{E}(T)$ . On remarque tout d'abord que  $ST(\Omega) = \{0, n^2\}$

Donc  $\mathbf{E}(ST) = 0 \times \mathbf{P}(ST = 0) + n^2\mathbf{P}(ST = n^2)$

Or l'évènement  $(ST = n^2)$  coïncide avec l'évènement  $(S = n) \cap (T = n)$

donc  $\mathbf{P}(ST = n^2) = \mathbf{P}((S = n) \cap (T = n))$

Or  $(T = n)$  n'est possible que si  $(S = n)$  donc  $\mathbf{P}((S = n) \cap (T = n)) = \mathbf{P}(T = n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$

Donc

$$\mathbf{E}(ST) = n^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$$

Donc

$$\text{Cov}(S, T) = n^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 - n^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^3 = n^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 \left(1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Donc

$$\text{Cov}(S, T) = \frac{n^2}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$$

10) En utilisant la variable  $T$ , calculer la valeur de  $\mathbf{E}(Z_k)$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

De la même façon que dans la partie 2 précédente on considère que tous les joueurs ont chacun la même espérance de gain lors de ce deuxième pari. Ainsi :  $\mathbf{E}(Z_k) = \frac{1}{n} \mathbf{E}(T) = \frac{1}{n} n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$

11) Le joueur  $k$  a-t-il intérêt à parier sur ce deuxième match ?

On compare les espérances sur ces deux paris : il faut donc comparer  $\mathbf{E}(X_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et  $\mathbf{E}(Z_k) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = (\mathbf{E}(X_k))^2$ . Or  $\mathbf{E}(X_k) \in ]0; 1[$  donc  $\mathbf{E}(Z_k) < \mathbf{E}(X_k)$ .  
Ce qui assure que le joueur  $k$  n'a pas intérêt à parier sur ce deuxième match.

#### Partie 4 : le match retour (version 2)

Dans cette version, seuls les joueurs ayant gagné au premier match se retrouvent pour le deuxième. Ils misent alors 1 euro. On suppose toujours que l'issue du deuxième match est indépendante de celle du premier. Les gagnants se partagent alors équitablement la mise totale, c'est-à-dire  $N$  euros. On note :

- $W_k$  le gain du joueur  $k$  lors de ce deuxième pari, en convenant que  $W_k = 0$  pour les joueurs ayant perdu leur premier pari et ne participant donc pas au second.
- $U = \sum_{k=1}^n W_k$  la somme des gains du deuxième pari.

On admet que  $W_k$  et  $U$  sont des variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

12)

a) Donner le support de la variable aléatoire  $U$ .

Il y a exactement  $N$  participants et  $N$  prend ses valeurs dans  $\llbracket 0; n \rrbracket$

- Si  $N = 0$  alors  $U = 0$
- Pour tout  $N \geq 1$  on a  $U \in \{0, N\}$  puisque  $U = 0$  s'il n'y a aucun gagnant à l'issue du deuxième match ou  $U = N$  dès qu'il y a au moins un gagnant.  
Dans tous les cas  $U(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$

- b) Soit  $(i, j) \in N(\Omega) \times U(\Omega), j \neq 0, i \neq 0$ . Donner la valeur de  $\mathbf{P}_{(N=i)}(U = j)$ .  
On pourra distinguer selon que  $i = j$  ou non.

Ici, on a  $N = i$  gagnants du premier jeu qui misent donc en tout  $i$  euros. Donc, après ce deuxième match le gain total possible est soit nul, soit de  $i$  euros.

Donc :

- Si  $i \neq j$  alors  $\mathbf{P}_{(N=i)}(U = j) = 0$
- Si  $i = j$  alors  $\mathbf{P}_{(N=i)}(U = i) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^i$

- c) Donner la loi et l'espérance de  $U$ .

La famille  $\{(N = i)\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  représente un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales on a :

- Si  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$  : alors, d'après la question précédente,

$$\mathbf{P}(U = j) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}(N = i) \mathbf{P}_{(N=i)}(U = j) = \mathbf{P}(N = j) \mathbf{P}_{(N=j)}(U = j)$$

D'où

$$\mathbf{P}(U = j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)$$

- Si  $j = 0$  : alors

$$\mathbf{P}(U = 0) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}(N = i) \mathbf{P}_{(N=i)}(U = 0) = \mathbf{P}(N = 0) \mathbf{P}_{(N=0)}(U = 0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(N = i) \mathbf{P}_{(N=i)}(U = 0)$$

Avec  $\mathbf{P}(N = 0) \mathbf{P}_{(N=0)}(U = 0) = 1$  et  $\mathbf{P}(N = i) = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et sachant que  $\mathbf{P}_{(N=i)}(U = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$  puisqu'il n'y a aucun gagnant parmi les  $i$  joueurs lors du deuxième pari.

$$\mathbf{P}(U = 0) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Donc, grâce à la formule du binôme de Newton on obtient :

$$\mathbf{P}(U = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Compte tenu de ce qui précède, le calcul de l'Espérance donne alors, par définition :

$$\mathbf{E}(U) = \sum_{j=1}^n j \mathbf{P}(U = j) = \sum_{j=1}^n j \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=1}^n j \binom{n}{j} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)$$

Or,  $j \binom{n}{j} = n \binom{n-1}{j-1}$  donc

$$\mathbf{E}(U) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=1}^n n \binom{n-1}{j-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = n \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}\right)$$

Or

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Avec  $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = 2^{n-1}$  et  $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Finalement

$$\mathbf{E}(U) = n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2^{n-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$\mathbf{E}(U) = n \left(\frac{1}{2} - \frac{3^{n-1}}{2^{2n}}\right)$$

13) En déduire la valeur de  $\mathbf{E}(W_k)$

De la même façon que dans la partie 3 précédente on considère que tous les joueurs ont chacun la même espérance de gain à l'issue des deux paris. Ainsi :

$$\mathbf{E}(W_k) = \frac{\mathbf{E}(U)}{n} = \frac{1}{2} - \frac{3^{n-1}}{4^n}$$

14) Le joueur  $k$  a-t-il intérêt à parier sur ce deuxième match ?

Dans la partie 1 On avait obtenu

$$\mathbf{E}(X_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

que l'on compare avec

$$\mathbf{E}(W_k) = \frac{1}{2} - \frac{3^{n-1}}{4^n}$$

Or, dès que  $n \geq 1$  on a :

$$\mathbf{E}(W_k) < \frac{1}{2} \leq \mathbf{E}(X_k)$$

Ainsi, le joueur  $k$  n'a pas intérêt à parier sur ce deuxième match

**Fin de l'énoncé**