

✱ Banque filière PT ✱

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

Le problème porte sur l'étude de transformations géométriques de l'espace qui caractérisent en mécanique la déformation d'un matériau. Aucune connaissance de physique ou de mécanique n'est évidemment nécessaire à sa résolution.

Dans tout ce problème, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, sa base canonique B_c étant notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et le repère cartésien associé est (O, B_c) .

Une matrice (n,p) est une matrice à n lignes et p colonnes.

Notations :

Le produit scalaire de deux éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

La transposée d'une matrice A est notée tA .

I_3 est la matrice identité $(3,3)$.

Les endomorphismes ou les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ seront notés en lettres minuscules et les matrices associées dans la base canonique seront notées de la même lettre majuscule.

Par exemple, si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, F est la matrice de f dans la base B_c ; si $\vec{u}$ est un élément de $\mathbb{R}^3$, U est sa matrice dans la base canonique B_c .

En particulier $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tournez la page S.V.P.

Première partie

Soit α un réel non nul. On définit deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ f et g par leurs matrices

$$F = I_3 + 2\alpha E_1 {}^tE_2 \text{ et } G = {}^tF.$$

1. Montrer que la droite vectorielle de base $(\vec{e}_3)$ et le plan de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont stables par f .
2. Vérifier que les valeurs propres $\{\mu_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ de $g \circ f$ sont strictement positives et peuvent être numérotées de telle sorte que $\mu_1 > \mu_2$ et $\mu_1\mu_2 = \mu_3$.
3. Soient a et b deux réels ; on définit les vecteurs $\vec{u}_1 = a\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = b\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
 - (a) Donner les relations que doivent vérifier a et b pour que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ et $f(\vec{u}_1) \cdot f(\vec{u}_2) = 0$. En déduire le polynôme unitaire de degré 2 dont a et b sont les racines.
 - (b) On pose $\vec{u}_3 = \vec{e}_3$. Déterminer a et b de telle sorte que $B = (\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ et $(f(\vec{u}_i))_{1 \leq i \leq 3}$ soient des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$, B étant de plus une base directe.
4. Vérifier que B est une base de vecteurs propres de $g \circ f$ et préciser la valeur propre associée à chacun des vecteurs.
5. Soit r_θ la rotation d'axe orienté par $\vec{e}_3$ et d'angle de mesure θ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$. Montrer qu'il existe une unique valeur de θ tel que $s = r_\theta^{-1} \circ f$ soit un endomorphisme symétrique de valeurs propres strictement positives et préciser cette valeur en fonction de $\arctan(\alpha)$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on pose $\alpha = 1$.

Soient $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de points définies par $m_0, \vec{Op}_0 = f(\vec{Om}_0)$ et les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \vec{Om}_{n+1} = g(\vec{Op}_n)$ et $\vec{Op}_{n+1} = f(\vec{Om}_{n+1})$.

On pose enfin :

$$\vec{Om}_n = x_n \vec{e}_1 + y_n \vec{e}_2 + z_n \vec{e}_3$$

$$\vec{Op}_n = \tilde{x}_n \vec{e}_1 + \tilde{y}_n \vec{e}_2 + \tilde{z}_n \vec{e}_3$$

1.
 - (a) Etudier les suites $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (b) Montrer que $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. On suppose que $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite m .
 - (a) Montrer que $\vec{Om}$ est un vecteur invariant par $g \circ f$.
 - (b) En déduire une définition géométrique de m .

3. Soit Q la matrice de passage de B_c à B (base définie en première partie question 3b). On définit la matrice $(3,1)$ M'_n par

$$M'_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

- (a) Que représente M'_n ?
- (b) Sans écrire la matrice Q , donner la relation de récurrence liant M'_{n+1} et M'_n . Exprimer alors (x'_n, y'_n, z'_n) en fonction de (x'_0, y'_0, z'_0) et n .
- (c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M'_0 pour que la suite $(M'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit convergente.
4. (a) Montrer que la suite $(m_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge si et seulement si m_0 appartient à un plan (Π) dont on donnera une équation cartésienne dans le repère (O, B_c) .
- (b) On suppose que m_0 appartient au plan (Π) sans appartenir à la droite passant par O de base $(\vec{e}_3)$. Montrer que les points $(m_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont alignés sur une droite (Δ) et les points $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur une droite (Δ') .
- (c) Soit m_0 un point du plan (Π) autre que O et vérifiant $z_0 = 0$. Donner une construction géométrique des points $(m_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à partir de m_0 et des droites (Δ) et (Δ') . On tracera une figure pour expliciter cette construction.

Troisième partie

On se propose de généraliser les résultats de la première partie au cas d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de déterminant strictement positif. f étant de matrice F dans B_c , on définit g par sa matrice tF .

1. Un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^3$ est dit défini positif si pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$, autre que $\vec{0}$, $\vec{x} \cdot \phi(\vec{x}) > 0$.
- (a) Montrer que si un endomorphisme est défini positif ses valeurs propres réelles sont strictement positives.
- (b) Soit un endomorphisme ϕ symétrique de valeurs propres strictement positives. Montrer que ϕ est défini positif.
- (c) Montrer que $g \circ f$ est symétrique et défini positif.
2. Soit $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
- (a) Montrer que si $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ est une base orthogonale de vecteurs propres de $g \circ f$, $(f(\vec{u}_i))_{1 \leq i \leq 3}$ est aussi une base orthogonale.
- (b) Réciproquement, on suppose que $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ et $(f(\vec{u}_i))_{1 \leq i \leq 3}$ sont des bases orthogonales; en calculant $\vec{u}_i \cdot g \circ f(\vec{u}_j)$ pour $i \neq j$, montrer que $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ est une base de vecteurs propres de $g \circ f$.

3. Soit $B = (\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ une base orthonormale de vecteurs propres de $g \circ f$, $\vec{u}_i$ étant associé à la valeur propre μ_i .

(a) Montrer que

$${}^t_F F = \sum_{i=1}^3 \mu_i U_i {}^t U_i$$

- (b) On pose $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$ et $S = \sum_{i=1}^3 \lambda_i U_i {}^t U_i$. Calculer S^2 . Montrer que l'endomorphisme s de matrice S est un endomorphisme symétrique, défini positif.
4. (a) Soit $R = FS^{-1}$. Vérifier que R est une matrice orthogonale.
- (b) En déduire que f s'écrit sous la forme $r \circ s$ où r est une rotation et s un endomorphisme symétrique défini positif.
5. On définit des vecteurs $\vec{u}'_i$ pour $1 \leq i \leq 3$ par les relations $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}'_i$.
- (a) Vérifier que $B' = (\vec{u}'_i)_{1 \leq i \leq 3}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Soit Q (respectivement Q') la matrice de passage de la base B_c à la base B (respectivement B'). Exprimer R à l'aide de Q et Q' .
6. Montrer que l'image par f d'une sphère centrée en O et de rayon ρ est une quadrique dont on précisera la nature, une base orthonormale où cette quadrique admet une équation réduite (c'est à dire ses axes principaux) et cette équation réduite.