

EXERCICE I

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

- 1) Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

EXERCICE II

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = P(X = n)$, la fonction génératrice de X est $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

- 2) Démontrer que l'intervalle $] - 1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X .

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer que pour tout $t \in] - 1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E(t^X)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

- 3) Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boules numérotée 2.

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.

déterminer pour tout $t \in] - 1, 1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n .

PROBLEME

Dans ce sujet une série de fonctions L_a est une séries de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres réels telle que la série entières $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I : Propriétés

Soit une une séries de fonctions $L_a : \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$

- 4) Si $x \in] - 1, 1[$, donner un équivalent de $1 - x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x \in] - 1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série peut parfois converger en dehors de l'intervalle $] - 1, 1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que L_a converge en au mois un x_0 n'appartient pas à l'intervalle $] - 1, 1[$.

5) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $] -1, 1[$.

6) On pose pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur $] -1, 1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $] -1, 1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

7) Expression sous forme de série entière

On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est une famille sommable de nombres réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right), \text{ où } I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}$$

Démontrer que pour tout $x \in] -1, 1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$ est sommable.

En déduire que $x \in] -1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$

($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II : Exemples

8) Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n . Exprimer, pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

9) Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n .

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in] -1, 1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

10) En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $] -1, 1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

11) Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question Q6.

12) Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln(2)}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]-1, 1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$.

EXERCICE I

- 1) • f est continue sur $]0, +\infty[$.
- f est prolongeable en 0 et $f(t) \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$, donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
 - $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t} dt$.
- Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par $f_n(t) = te^{-(n+1)t}$.
- chaque f_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$.
 - la série de fonctions converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers g définie par $g(t) = f(t)$ si $t \in]0, +\infty[$ et $g(0) = 0$.
- g est continue sur $]0, +\infty[$ et admet une limite finie en 0^+ , donc g est CM sur $[0, +\infty[$.
- par changement de variable $u = (n+1)t$, on a :
- $$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^2} \int_0^{+\infty} ue^{-u} du = \frac{1}{(n+1)^2} \Gamma(2) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$
- La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge. le Théorème ITT s'applique et :
- $$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICE II

- 2) Soit $t \in]-1, 1[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, |p_n t^n| \leq p_n$, or la série $\sum p_n$ converge de somme 1, donc la série $\sum p_n t^n$ converge absolument donc convergente. alors $t \in D_{G_X}$, donc $] - 1, 1[\subset D_{G_X}$.
- Soit $t \in]-1, 1[$, alors $G_S(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1} t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2})$ car les variables X_1 et X_2 sont indépendantes donc les variables t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes aussi.
- Donc $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.
- Autre méthode :
- $$G_S(t) = E(t^{X_1+X_2}) = \sum_{s=0}^{+\infty} t^s P(X_1 + X_2 = s) \text{ par la propriété de transfert.}$$
- Alors $G_S(t) = \sum_{s=0}^{+\infty} t^s \sum_{n+m=s} P(X_1 = n)P(X_2 = m)$ Car ces variables X_1 et X_2 sont indépendantes,
- alors : $G_S(t) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n+m=s} t^n P(X_1 = n) t^m P(X_2 = m)$

Les séries entières $\sum_{n \geq 0} t^n P(X_1 = n)$ et $\sum_{m \geq 0} t^m P(X_2 = m)$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1, par application du théorème produit de Cauchy de deux séries entières, il en résulte :

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X_1 = n) \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X_2 = n) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t).$$

- 3) On peut écrire ici $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ où chaque X_i représente la variable aléatoire égal au numéro tiré pendant le i -ème tirage. Ces variables sont indépendantes car le tirage est avec remise, et les variables sont tous à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$,

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $t \in]-1, 1[$, alors $G_{X_i}(t) = t^0 p_0 + t^1 p_1 + t^2 p_2$

On a $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $p_2 = \frac{1}{4}$, par application de ce qui précède :

$$G_{S_n}(t) = [G_{X_1}(t)]^n = \left[\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} \right]^n = \frac{1}{4^n} (t+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{k} t^k.$$

Mais $G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{2n} P(S_n = k) t^k$ et avec $S_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, (2n)\}$.

Alors $\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$, $P(S_n = k) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{k}$ ainsi la loi de S_n .

PROBLEME

- 4) Soit $x \in]-1, 1[$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$, donc $1 - x^n \sim_{n \rightarrow +\infty} 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|a_n x^n|}{1 - x^n} \sim_{n \rightarrow +\infty} |a_n x^n|$, or le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est 1, donc la série $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ cva et par comparaison, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n x^n}{1 - x^n} \text{ cva.}$$

Pour la remarque : Si on prend $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{2^n}{1 - 2^n}$

converge car $\frac{1}{(n+1)^2} \frac{2^n}{1 - 2^n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

- 5) Soit $x \in [-b, b]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 1 - b^n \leq 1 - x^n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|a_n x^n|}{1 - x^n} \leq \frac{|a_n b^n|}{1 - b^n}$, la série $\sum \frac{a_n b^n}{1 - b^n}$ converge absolument par Q4), donc la série de fonctions $\sum a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ converge normalement donc uniformément sur $[-b, b]$.

- 6) Soit $f_n(x) = a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$. Les f_n sont continues sur $] -1, 1[$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur chaque segment $[-b, b] \subset] -1, 1[$, donc f est continue sur $] -1, 1[$.

Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$. $\forall x \in] -1, 1[$, $f'_n(x) = a_n \frac{nx^{n-1}}{(1 - x^n)^2}$.

Soit $b \in [0, 1[$, alors par le même raisonnement fait en Q)5 $\forall x \in [-b, b]$; $|f'_n(x)| \leq \frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$, comme la série $\sum \frac{na_nb^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ converge car un équivalent à $\frac{na_nb^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$ est na_nb^{n-1} et que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est égal à celui de $\sum na_n x^n$.

Donc la série $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $]-b, b[\subset]-1, 1[$ et la série $\sum f_n$ déjà converge simplement sur $] -1, 1[$, alors

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-1, 1[\text{ et } \forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}.$$

Alors $f'(0) = a_1$.

7) • Tout revient à montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment une partition de A .

Il est évident que chaque $I_n \subset A$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \subset A$.

Soit $(k, p) \in A$, il est clair que $(k, p) \in I_{kp} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = A$.

Si on suppose que $\exists (k, p) \in I_n \cap I_m$, alors $kp = n = m$, donc $I_n = I_m$, donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment une partition de A .

La famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est sommable, par le théorème de sommation par paquets on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right)$$

• Soit $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p \geq 1} a_n x^{np}$ converge absolument et

$\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n| |x|^{np} = |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ et la série $\sum |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge par Q)4, donc

la famille donnée est sommable, en appliquant ce qui précède à $u_{n,p} = a_n x^{np}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp}.$$

$$\text{Or } \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{(k,p) \in I_n} a_k = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{d|n} a_d = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

Et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ série géométrique.

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

8) Ici $a_n = 1$, donc le b_n de la question 7 est $b_n = \sum_{d|n} 1 = d_n$, par application

de la question 7) on a :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.$$

9) Ici $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \varphi(n) = \text{Card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid k \wedge n = 1\}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n$, par comparaison le rayon de la série $\sum a_n x^n$ est 1.

On a les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12, or $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$ et $\varphi(12) = 4$ l'égalité est donc vraie pour $n = 12$.

Soit $x \in]-1, 1[$. Par application de la question 7), $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$,

avec ici $b_n = \sum_{d|n} \varphi(d) = n$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$.

Or $\forall x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, en dérivant on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Alors $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2}$ c'est ce qui est demandée.

10) On a $\forall x \in [0, 1[$, $-\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

1 est dans l'adhérence de $[0, 1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$,

pour $x \in [0, 1[$ la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ est une série alternée qui vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n} = 0$

et la suite $\left(\frac{x^n}{n}\right)_n$ est décroissante, alors par CSSA :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, la convergence

de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ est uniforme, le théorème de la

double limite s'applique et on a $-\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

11) Soit $a \in]0, 1[$. On a $\forall x \in [-a, a]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 < 1 - a^n \leq 1 - x^n$, donc :

$\forall x \in [-a, a]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\left| (-1)^k \frac{x^{k-1}}{1-x^k} \right| \leq \frac{a^{k-1}}{1-a^k}$.

Or la série $\sum_{k \geq 1} \frac{a^{k-1}}{1-a^k}$ converge car $\frac{a^{k-1}}{1-a^k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} a^{k-1}$ et la série $\sum a^{k-1}$

converge, la convergence de $\sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{1-x^k}$ est donc uniforme sur $[-a, a]$.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{1-x^k} = \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1 \end{cases}$

le théorème de la double limite s'applique et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = -1$$

Un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0$ est $-x$.

On a $f(0) = 0$, donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, alors $f'(0) = -1 = a_1$ c'est ce qu'on a trouver à la question 6).

12) Toujours $a_n = (-1)^n$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$

$$\text{Donc } (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-1} \frac{(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}.$$

$$\text{Soit } \forall n \in \mathbb{N}^*; g_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}.$$

le 1 est dans l'adhérence de $]0, 1[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n},$$

Soient $x \in]0, 1[$ et $k \in \llbracket 0, (n-1) \rrbracket$, on a $x^{n-1} \leq x^k$:

$$\text{Donc } nx^{n-1} \leq 1+x+x^2+\dots+x^{n-1},$$

$$\text{Alors } \forall x \in]0, 1[; \forall n \in \mathbb{N}^*; |g_n(x)| \leq \frac{x^{n-1}}{nx^{n-1}} \leq \frac{1}{n}.$$

Soit $x \in]0, 1[$. Les deux suites $(x^{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et elles sont positives, donc la suite $(|g_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante comme elle est positive et tend vers 0, le CSSA s'applique et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}; \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \right| \leq |g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément sur $]0, 1[$, le théorème de la double limite s'applique et on a ;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 \text{ d'après la question 10).}$$

$$\text{Alors } (1-x)f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln 2, \text{ qui s'écrit } f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\ln 2}{(1-x)}.$$

Pour les remarques

sadikoulmeki@yahoo.fr

Omar SADIK CPGE My Driss Fès.