SPÉ TSI Corrigé de Centrale 2002 TSI $2^{\text{ème}}$ épreuve

I.A.1) On a : $\forall\,(\alpha,\alpha')\in\mathbb{R}^2,\ \forall\,(A,A') = \left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\right]\in\mathcal{M}_2^2$

$$tr\,(\alpha A+\alpha' A') = tr\begin{pmatrix}\alpha a+\alpha' a' & \alpha b+\alpha' b'\\ \alpha c+\alpha' c' & \alpha d+\alpha' d'\end{pmatrix} = \alpha a+\alpha' a'+\alpha d+\alpha' d'$$

$$= \alpha(a+d)+\alpha'(a'+d') = \alpha\,tr\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\alpha'\,tr\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix} = \alpha\,tr\,A+\alpha'\,tr\,A'$$

$$tr\,(AA') = tr\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix} = aa'+bc'+cb'+dd' = tr\,(A'A)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{car manifestement } (a,b,c,d) \text{ et}\\ (a',b',c',d') \text{ jouent le même rôle.}\end{array}\right.$$

$$tr\,({}^tA) = tr\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix} = a+d = tr\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = tr\,A$$

Donc $\underline{tr \text{ est une forme linéaire sur } \mathcal{M}_2 \text{ et : } \forall\,(A,B)\in\mathcal{M}_2^2\quad tr\,(AB) = tr\,(BA) \text{ et } tr\,({}^tA) = tr\,A}$

I.A.2)
- Tout d'abord $<\ |\ >$ est manifestement une application de $\mathcal{M}_2^2$ vers $\mathbb{R}$.
- La linéarité de la trace établie en 1) et la structure de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathcal{M}_2$ permettent d'affirmer que $<\ |\ >$ est linéaire à gauche.
- $\forall\,(A,B)\in\mathcal{M}_2^2\quad <A|B> = tr\,(A\,{}^tB) = tr\left[{}^t(A\,{}^tB)\right] = tr\,(B\,{}^tA) = <B|A>$
- $\forall\,A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2\quad <A|A> = tr\,(A\,{}^tA) = tr\left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}$

$$= a^2+b^2+c^2+d^2\geq 0$$

$$<A|A> = 0 \iff a^2+b^2+c^2+d^2 = 0 \iff a=b=c=d=0 \iff A = 0_{\mathcal{M}_2}$$

Donc $<\ |\ >$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{M}_2$.

Donc $\underline{<\ |\ > \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathcal{M}_2.}$

I.B • On a : $\forall\, i\in\{1,2\} \quad <E_i|E_i> = tr\,(E_i\,{}^tE_i) \,=\, tr\,(E_i^2) \,=\, tr\,E_i \,=\, 1$

$$<E_3|E_3> = tr\,(E_3\,{}^tE_3) \,=\, tr\,(E_3^2) \,=\, tr\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] = 1$$

$$<E_4|E_4> = tr\,(E_4\,{}^tE_4) \,=\, tr\,(-E_4^2) \,=\, -tr\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right] = 1$$

$$<E_1|E_2> = tr\,(E_1\,{}^tE_2) \,=\, tr\,(E_1E_2) \,=\, tr\,0_{\mathcal{M}_2} \,=\, 0$$

$$<E_1|E_3> = tr\,(E_1\,{}^tE_3) \,=\, tr\,(E_1E_3) \,=\, tr\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$<E_1|E_4> = tr\,(E_1\,{}^tE_4) \,=\, tr\,(-E_1E_4) \,=\, -tr\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$<E_2|E_3> = tr\,(E_2\,{}^tE_3) \,=\, tr\,(E_2E_3) \,=\, tr\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$<E_2|E_4> = tr\,(E_2\,{}^tE_4) \,=\, tr\,(-E_2E_4) \,=\, -tr\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$<E_3|E_4> = tr\,(E_3\,{}^tE_4) \,=\, tr\,(-E_3E_4) \,=\, -tr\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] = 0$$

Donc $\mathbf{B}_0$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_2$ pour ce produit scalaire.

• Manifestement E_4 appartient à $\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{S}_2$ donc : $\; dim\,\mathcal{S}_2 \le dim\,\mathcal{M}_2 - 1 \,=\, 3$
Or E_1, E_2 et E_3 sont symètriques, donc (E_1, E_2, E_3) est une famille orthonormale de S_2, donc une famille libre de $\mathcal{S}_2$ qui est de dimension au plus 3.

Donc (E_1, E_2, E_3) est une base orthonormale de $\mathcal{S}_2$.

I.C.1) On a : $\; \underline{det\,M} = \begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3+x_4)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3-x_4) & x_2\end{vmatrix} = x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_3^2 - x_4^2) = x_1x_2 - \frac{x_3^2}{2} + \frac{x_4^2}{2}$

I.C.2) On a : $\;\forall\,(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \quad det\circ\psi\,(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$

Ceci suffit pour affirmer que $det\circ\psi$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.

De plus : $\;\forall\,(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \quad det\circ\psi\left(\sum\limits_{i=1}^{4} x_ie_i\right) = det\left(\sum\limits_{i=1}^{4} x_i\psi(e_i)\right) = det\left(\sum\limits_{i=1}^{4} x_iE_i\right) = x_1x_2 - \frac{x_3^2}{2} + \frac{x_4^2}{2}$

Donc : $\;\underline{Mat_b(det\circ\psi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

II.A D'après **I.C**, $det\circ\psi$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.
De plus $\; det\circ\psi\,(1,0,0,1) \,=\, det\,I \,=\, 1$ et $\;\forall\,(M,N)\in\mathcal{M}_2^2 \;\; det\,(MN) \,=\, det\,M\times det\,N$.
Donc det est un exemple d'application q solution du problème exposé au début de **II**.

II.B On a : $\;\underline{q\big(0_{\mathcal{M}_2}\big) \,=\, q\big[\psi(0,0,0,0)\big] \,=\, (q\circ\psi)\left(0_{\mathbb{R}^4}\right) \,=\, 0}$ car $q\circ\psi$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.

q n'est pas la forme quadratique nulle, soit donc M, élément de $\mathcal{M}_2$, tel que : $\; q(M) \neq 0$
On a : $\; q(M) \,=\, q(IM) \,=\, q(I)\times q(M)$ donc en divisant les deux membres par $q(M)$: $\;\underline{q(I) \,=\, 1}$

II.C Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2$ de rang 2.

Alors M est inversible donc : $1 = q(I) = q\big(MM^{-1}\big) = q(M)\times q\big(M^{-1}\big)$ donc $q(M) \neq 0$.

Donc, si M une matrice de $\mathcal{M}_2$ de rang 2, alors : $q(M) \neq 0$.

II.D.1) On a : $dim\,Ker\,f = dim\,\mathbb{R}^2 - rg\,f = 2 - rg\,M = 1$.

Soit donc v un vecteur non nul de $Ker\,f$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^2$ non colinéaire à v.

Alors : • $Ker\,f = Vect\,v$

• (u, v), famille libre à deux éléments de $\mathbb{R}^2$, est une base de $\mathbb{R}^2$.

De plus u est non colinéaire à v et $Ker\,f = Vect\,v$, donc u n'appartient pas à $Ker\,f$, donc $f(u) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, soit donc w un vecteur de $\mathbb{R}^2$ non colinéaire à $f(u)$.

Alors $\big(w, f(u)\big)$ est une famille libre à deux éléments de $\mathbb{R}^2$ donc $\big(w, f(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On a donc pu trouver (u, v, w) dans $\big(\mathbb{R}^2\big)^3$ tels que (u, v) et $\big(w, f(u)\big)$ soient deux bases de $\mathbb{R}^2$ et $Ker\,f = Vect\,v$

Soit P la matrice de passage de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ à (u, v) et Q la matrice de passage de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ à $\big(w, f(u)\big)$.

Alors : $Q^{-1}MP = \underset{\big((u,v),(w,f(u))\big)}{Mat} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc : $\exists\,(P, Q) \in \big(GL_2(\mathbb{R})\big)^2 \Big/ \; PMQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

II.D.2) Soient P et Q deux matrices telles que celles dont on vient de prouver l'existence.

Alors : $q(PMQ) = q(P)\times q(M)\times q(Q)$

Or, d'après **II.C** : $q(P) \neq 0 \neq q(Q)$ donc $q(M) = \dfrac{q(PMQ)}{q(P)\times q(Q)}$

De plus : $(PMQ)^2 = 0_{\mathcal{M}_2}$ donc $\big[q(PMQ)\big]^2 = q\big[(PMQ)^2\big] = q\big(0_{\mathcal{M}_2}\big) = 0$ donc $q(M) = 0$.

Donc, si M est une matrice de $\mathcal{M}_2$ de rang 1 alors : $q(M) = 0$.

II.E On a : $\forall\, M \in \mathcal{M}_2 \quad rg\,M = 2 \Longrightarrow q(M) \neq 0$ cf. **II.C**

$rg\,M = 1 \Longrightarrow q(M) = 0$ cf. **II.D**

$rg\,M = 0 \Longrightarrow M = 0_{\mathcal{M}_2} \Longrightarrow q(M) = 0$ cf. **II.B**

Donc : $\forall\, M \in \mathcal{M}_2 \quad q(M) \neq 0 \iff rg\,M = 2$

Or : $\forall\, M \in \mathcal{M}_2 \quad rg\,M = 2 \iff \big(M$ est inversible$\big)$ Donc : $\forall\, M \in \mathcal{M}_2 \quad \big(M$ est inversible$\big) \iff q(M) \neq 0$

II.F.1) Posons : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors : $\forall\,\lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$

Donc : f est une fonction polynomiale de degré 2 dont le coefficient dominant est 1 ;
les zéros de f sont les valeurs de λ telles que $M - \lambda I$ soit non inversible,
les zéros de f sont donc les valeurs propres de M, donc : $\forall\,\lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.

II.F.2) $q\circ\psi$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$, soit donc p sa forme polaire, p est une forme bilinéaire symètrique sur $\mathbb{R}^4$.

On a : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^4 \quad q\circ\psi\,(x+y) = p\,(x+y,x+y) = p\,(x,x+y)p\,(y,x+y)$

$= p\,(x,x)p\,(x,y)p\,(y,x)p\,(y,y) = q\circ\psi\,(x)2\,p\,(x,y)q\circ\psi\,(y)$

et, de même : $q\circ\psi\,(x-y) = q\circ\psi\,(x) - 2\,p\,(x,y)q\circ\psi\,(y)$

donc, par soustraction membre à membre : $p\,(x,y) = \dfrac{1}{4}\Big[q\circ\psi\,(x+y) - q\circ\psi\,(x-y)\Big]$

Donc : $\forall\,\lambda\in\mathbb{R} \quad g(\lambda) = q\,(M-\lambda I) = q\circ\psi\left[\psi^{-1}(M-\lambda I)\right] = q\circ\psi\left[\psi^{-1}(M)-\lambda\,\psi^{-1}(I)\right]$

$= q\circ\psi\left[\psi^{-1}(M)\right]2\,p\left(\psi^{-1}(M),-\lambda\,\psi^{-1}(I)\right)q\circ\psi\left[-\lambda\,\psi^{-1}(I)\right]$

$= q\,(M) - 2\lambda\,p\left(\psi^{-1}(M),\psi^{-1}(I)\right)\lambda^2 q\circ\psi\left[\psi^{-1}(I)\right]$

$= q\,(M)\lambda^2 q\,(I) - 2\lambda\times\dfrac{1}{4}\Big[q\circ\psi\left[\psi^{-1}(M)+\psi^{-1}(I)\right] - q\circ\psi\left[\psi^{-1}(M)-\psi^{-1}(I)\right]\Big]$

$= q\,(M)\lambda^2 - 2\,\lambda\times\dfrac{1}{4}\Big[q\,(M+I) - q(M-I)\Big]$

Donc : $\underline{\forall\,\lambda\in\mathbb{R} \quad g(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\,\varphi\,(M,I)q\,(M)}$

II.F.2) De plus, d'après **II.E** : $\forall\,\lambda\in\mathbb{R} \quad g(\lambda) = 0 \iff q\,(M-\lambda I) = 0 \iff \big(M-\lambda I$ est non inversible$\big)$

$\iff \lambda\in Sp\,M \iff \lambda\in\{\lambda_1,\lambda_2\}$

Donc : $\forall\,\lambda\in\mathbb{R} \quad g(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$ (on a vu plus haut que le coefficient de λ^2 est 1)

Donc, d'après **II.F.1)** : $f=g$ donc, en particulier : $q\,(M) = g(0) = f(0) = det\,M$.

Donc, pour toute matrice M trigonalisable de $\mathcal{M}_2$: $q\,(M) = det\,M$.

II.G.1) Posons : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans B_1 est M.

Alors f est la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc f n'a aucune valeur propre, donc M n'a aucune valeur propre réelle.

Donc M n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_2$ et on ne peut donc pas lui appliquer le raisonnement de **II.F**.

II.G.2) Posons : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$ On a : $PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{bc}{a} \end{pmatrix}$

Donc P et PM sont triangulaires, donc, d'après **II.F.2)** : $\begin{cases} q\,(P) = det\,P = 1 \\ \text{et} \\ q\,(PM) = det\,(PM) = a\times\left(d-\frac{bc}{a}\right) = ad-bc \end{cases}$

Donc : $ad-bc = q\,(PM) = q\,(P)\times q\,(M) = q\,(M)$

Donc : $\underline{\forall\,M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2 \quad a\neq 0 \Longrightarrow q\,(M) = ad-bc = det\,M}$

II.G.3) On a : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$

Donc : $q\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}M\right] = q\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}q\,(M) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}q\,(M) = q\,(M)$

$= q\begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = cd-c(b+d) = -bc = ad-bc = det\,M$

on a utilisé **II.F** puis **II.G.2)**.

Donc : $\underline{\forall\,M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2 \quad c\neq 0 \Longrightarrow q\,(M) = -bc = ad-bc = det\,M}$

II.G.4) Si $a \neq 0$ alors, d'après **II.G.2)** : $q(M) = ad - bc = det\, M$

Si $a = 0 \neq c$ alors, d'après **II.G.3)** : $q(M) = -bc = ad - bc = det\, M$

Si $a = 0 = c$ alors $rg\, M \leq 1$ donc M est non inversible donc, d'après **II.E** : $q(M) = 0 = det\, M$

Donc : $\underline{\forall\, M \in \mathcal{M}_2 \quad q(M) = det\, M}$

III.A On a : $\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad M\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. \in \Gamma_k \iff \begin{vmatrix} x & z/\sqrt{2} \\ z/\sqrt{2} & y \end{vmatrix} = k \iff xy - \dfrac{z^2}{2} = k$

$\underline{\Gamma_k \text{ est donc la quadrique d'équation dans } \mathbf{R} : \quad xy - \dfrac{z^2}{2} = k}$

III.B.1) Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\Gamma_0 \setminus \{O\}$, on a donc : $z_0^2 = 2x_0y_0$

Soit alors Δ une droite passant par M_0 et $\overrightarrow{V}\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix}\right.$ un vecteur directeur de Δ.

On a donc : $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $\Delta \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$

De plus : $\Delta \subset \Gamma_0 \iff \big(\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad 2(x_0 + \lambda\alpha)(y_0 + \lambda\beta) = (z_0 + \lambda\gamma)^2\big)$

$\iff \big(\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2x_0y_0 - z_0^2)2\lambda(\alpha y_0 + \beta x_0 - \gamma z_0)\lambda^2(2\alpha\beta - \gamma^2) = 0\big)$

$\iff \big(\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda^2(2\alpha\beta - \gamma^2)2\lambda(\alpha y_0 + \beta x_0 - \gamma z_0) = 0\big)$

$\iff \begin{cases} 2\alpha\beta = \gamma^2 \\ \text{et} \\ \alpha y_0 + \beta x_0 - \gamma z_0 = 0 \end{cases}$ car seul le polynôme nul a une infinité de zéros

$\underline{1^{\text{er}} \text{ cas} : x_0 = 0}$ alors $z_0 = 0 \neq y_0$ et : $\Delta \subset \Gamma_0 \iff \begin{cases} \alpha y_0 = 0 \\ 2\alpha\beta = \gamma^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \Delta = y'y$

$\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas} : y_0 = 0}$ alors $z_0 = 0 \neq x_0$ et : $\Delta \subset \Gamma_0 \iff \begin{cases} \beta x_0 = 0 \\ 2\alpha\beta = \gamma^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \Delta = x'x$

$\underline{3^{\text{ème}} \text{ cas} : x_0y_0 \neq 0}$

$\underline{1^{\text{er}} \text{ sous-cas} : \alpha = 0}$ alors $\Delta \subset \Gamma_0 \iff \begin{cases} 0 = \gamma^2 \\ \beta x_0 - \gamma z_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta x_0 = 0 \end{cases} \iff \beta = \gamma = 0$ impossible car $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

III.B.1) $\underline{2^{\text{ème}}\text{ sous-cas : } \alpha \neq 0}$ alors $\overrightarrow{V}'\left|\begin{matrix}1\\ \beta/\alpha\\ \gamma/\alpha\end{matrix}\right.$ dirige encore Δ, imposons donc $\alpha = 1$, alors :

$$\Delta \subset \Gamma_0 \iff \begin{cases} y_0 + \beta x_0 - \gamma z_0 \ = \ 0 \\ \beta = \dfrac{\gamma^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma^2 x_0 - 2\gamma z_0 + 2y_0 \ = \ 0 \\ \beta = \dfrac{\gamma^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_0\left(\gamma - \frac{z_0}{x_0}\right)^2 - \frac{z_0^2}{x_0} 2y_0 \ = \ 0 \\ \beta = \dfrac{\gamma^2}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_0\left(\gamma - \frac{z_0}{x_0}\right)^2 = \frac{z_0^2 - 2x_0y_0}{x_0} \ = \ 0 \\ \beta = \dfrac{\gamma^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = \dfrac{z_0}{x_0} \\ \beta = \dfrac{z_0^2}{2x_0^2} \end{cases} \iff \Delta \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 + \lambda\, \frac{z_0^2}{2x_0^2} \\ z = z_0 + \lambda\, \frac{z_0}{x_0} \end{cases}$$

$$\iff \Delta \begin{cases} y = y_0 + (x - x_0)\, \frac{z_0^2}{2x_0^2} \\ z = z_0 + (x - x_0)\, \frac{z_0}{x_0} \end{cases} \iff \Delta \begin{cases} y \ = \ y_0 + \frac{z_0^2}{2x_0^2}\, x - \frac{z_0^2}{2x_0} \ = \ \frac{z_0^2}{2x_0^2}\, x + \frac{2x_0y_0 - z_0^2}{2x_0} \ = \ \frac{z_0^2}{2x_0^2}\, x \\ z \ = \ z_0 + x\, \frac{z_0}{x_0} - z_0 \ = \ \frac{z_0}{x_0}\, x \end{cases}$$

$$\iff \Delta \begin{cases} z_0^2 x - 2x_0^2 y = 0 \\ z_0 x - x_0 z = 0 \end{cases} \iff \Delta \begin{cases} x_0y_0 x - x_0^2 y = 0 \\ z_0 x - x_0 z = 0 \end{cases} \iff \Delta \begin{cases} y_0 x - x_0 y = 0 \\ z_0 x - x_0 z = 0 \end{cases}$$

Conclusion : Pour tout $M\left|\begin{matrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{matrix}\right.$ de $\Gamma_0 \setminus \{O\}$ il existe une unique droite Δ_M passant par M et tracée sur Γ_0 ;
de plus : si $x_0 = 0$ alors $\Delta_M = y'y$,
si $x_0 \neq 0$ alors $\Delta_M \begin{cases} y_0 x - x_0 y = 0 \\ z_0 x - x_0 z = 0 \end{cases}$ (c'est $x'x$ si $y_0 = 0$ car alors $z_0 = 0$)

III.B.2) Soit $\mathcal{P}_0$ le plan tangent à Γ_0 en M_0. $\mathcal{P}_0$ a pour équation dans $\mathbf{R}$: $y_0(x - x_0)x_0(y - y_0) \ - \ z_0(z - z_0) \ = \ 0$
Cette équation s'écrit encore : $y_0 x x_0 y \ - \ z_0 z \ = \ 2\, x_0 y_0 - z_0^2$ or $2\, x_0 y_0 - z_0^2 \ = \ 0$ puisque $M_0 \in \Gamma_0$
<u>Le plan tangent à Γ_0 en M_0 a donc pour équation dans $\mathbf{R}$: $y_0 x x_0 y \ = \ z_0 z$</u>

$\underline{1^{\text{er}}\text{ cas : } x_0 \neq 0}$ alors : $\forall\, M\left|\begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}\right. \in \mathcal{S}_2 \quad M \in \Delta_{M_0} \iff \begin{cases} y_0 x = x_0 y \\ z_0 x = x_0 z \end{cases} \implies \begin{pmatrix} y_0 x + x_0 y = \ 2y_0 x \ = \ \frac{2x_0y_0}{x_0}\, x \ = \ \frac{z_0^2 x}{x_0} \\ = \ \frac{z_0}{x_0} \times z_0 x \ = \ \frac{z_0}{x_0} \times x_0 z \ = \ z_0 z \end{pmatrix}$
$\implies M \in \mathcal{P}_0$
donc : $\Delta_{M_0} \subset \mathcal{P}_0$

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas : } x_0 = 0}$ alors : $\Delta_{M_0} \ = \ y'y$ et $z_0 = 0 \neq y_0$ donc $\mathcal{P}_0 : x = 0$ donc $\Delta_{M_0} \subset \mathcal{P}_0$

Donc, <u>pour tout M_0 de $\mathcal{S}_2 \setminus \{O\}$ le plan tangent à Γ_0 en M_0 contient Δ_{M_0}.</u>

III.C.1) Soit γ_{-1} la projection orthogonale de Γ_{-1} sur xOy.
Alors : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad M\left|\begin{matrix}x\\ y\\ 0\end{matrix}\right. \in \gamma_{-1} \iff \left(\exists\, z \in \mathbb{R} \,/\, M\left|\begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}\right. \in \Gamma_{-1}\right) \iff \left(\exists\, z \in \mathbb{R} \,/\, z^2 = 2xy + 2\right) \iff xy \geq -1$

III.C.2) Soit γ'_{-1} la projection orthogonale de Γ_{-1} sur xOz.

Alors : $\forall\,(x,z)\in\mathbb{R}^2 \quad M\begin{vmatrix}x\\0\\z\end{vmatrix} \in \gamma'_{-1} \iff \left(\exists\, y\in\mathbb{R}\,/\, M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\in\Gamma_{-1}\right) \iff \left(\exists\, y\in\mathbb{R}\,/\, z^2 = 2xy+2\right)$

$$\iff \left(\exists\, y\in\mathbb{R}\,/\,\frac{z^2}{2}-1 = xy\right) \iff \begin{cases} x\neq 0\\ \text{ou}\\ x=0 \text{ et } z=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

Donc la projection orthogonale de Γ_{-1} sur xOz est $\underline{xOz \setminus \left(z'z\setminus\left\{A\begin{vmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{vmatrix}, B\begin{vmatrix}0\\0\\-\sqrt{2}\end{vmatrix}\right\}\right)}$

III.C.3) $A\begin{vmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}0\\0\\-\sqrt{2}\end{vmatrix}$ sont dans Γ_{-1}. Posons : $\Delta_1 \begin{cases}x=0\\z=\sqrt{2}\end{cases}$ et $\Delta_2\begin{cases}x=0\\z=-\sqrt{2}\end{cases}$

Manifestement :
- Δ_1 et Δ_2 sont parallèles (et parallèles à $y'y$) • $\Delta_1\neq\Delta_2$
- $\Delta_1\subset\Gamma_{-1}$ et $\Delta_2\subset\Gamma_{-1}$ car $\Gamma_{-1} : z^2 = 2xy+2$

Dans le choix de Δ_1 et Δ_2 on aurait pu remplacer $x=0$ par $y=0$.

III.D.1) Γ_k a pour équation dans $\mathbf{R}$: $z^2-2xy+2k = 0$. Or : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad 2xy = \dfrac{(x+y)^2}{2}-\dfrac{(x-y)^2}{2}$

Posons donc : $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_1+E_2\right) \quad\text{et}\quad V = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_1-E_2\right)$$

Donc, dans (O,U,V,E_3), Γ_k a pour équation : $Z^2-X^2+Y^2+2k=0$ ou encore $\underline{\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{Y^2}{2}-\dfrac{Z^2}{2} = k}$

III.D.2) Donc
- Γ_0 est un cône de révolution de sommet O ;
- Γ_k est un hyperboloïde à une nappe de révolution si $k<0$;
- Γ_k est un hyperboloïde à deux nappes de révolution si $k>0$;

IV.A.1) • Φ est bijective donc : $\underline{I = \Phi\big[\Phi^{-1}(I)\big] = \Phi\big[\Phi^{-1}(I)\times I\big] = \Phi\big[\Phi^{-1}(I)\big]\times\Phi(I) = I\times\Phi(I) = \Phi(I)}$

• On a : $\forall\, M\in\mathcal{S}_2 \quad {}^t\Phi(M) = \Phi({}^tM) = \Phi(M)$ donc $\Phi(M)\in\mathcal{S}_2$
Donc : $\Phi(\mathcal{S}_2)\subset\mathcal{S}_2$
Or $\Phi\in GL(\mathcal{M}_2)$ donc $dim\,\Phi(\mathcal{S}_2) = dim\,\mathcal{S}_2$ donc $\underline{\Phi(\mathcal{S}_2) = \mathcal{S}_2}$

• On a : $-\Phi(E_4) = \Phi(-E_4) = \Phi({}^tE_4) = {}^t\Phi(E_4)$ donc $\Phi(E_4)$ est antisymètrique,

$$\Phi(E_4\times E_4) = \Phi\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right] = \Phi\left(-\frac{1}{2}\,I\right) = -\frac{1}{2}\,\Phi(I) = -\frac{I}{2}$$

Posons donc : $\Phi(E_4) = \begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}$

On a : $\Phi(E_4\times E_4) = \Phi(E_4)\times\Phi(E_4) = \begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b^2 & 0\\ 0 & -b^2\end{pmatrix}$ donc $b^2 = \dfrac{1}{2}$

Donc : $\underline{\Phi(E_4) = \pm\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix} = \pm E_4}$

IV.A.2) • On a : $\forall\, M\in GL_2(\mathbb{R}) \quad I = \Phi(I) = \Phi\big(MM^{-1}\big) = \Phi(M)\times\Phi\big(M^{-1}\big)$
Donc : $\forall\, M\in\mathcal{M}_2 \quad M\in GL_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \Big(\Phi(M)\in GL_2(\mathbb{R})$ et $\Phi\big(M^{-1}\big) = \Phi(M)^{-1}\Big)$

• Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2$ telle que $\Phi(M)$ soit inversible.
Posons : $N = \Phi^{-1}\big[\Phi(M)^{-1}\big]$ alors : $\Phi(MN) = \Phi(M)\times\Phi(N) = \Phi(M)\times\Phi(M)^{-1} = I = \Phi(I)$
or Φ est bijective donc : $MN = I$ donc M est inversible.
Donc : $\forall\, M\in\mathcal{M}_2 \quad \Phi(M)\in GL_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow M\in GL_2(\mathbb{R})$
Regroupons : $\underline{\forall\, M\in\mathcal{M}_2 \quad M\in GL_2(\mathbb{R}) \iff \Phi(M)\in GL_2(\mathbb{R})}$

• On a : $\Gamma_0 = \big\{M\in\mathcal{S}_2\,/\,det\,M = 0\big\}$

Donc : $\forall\, M\in\mathcal{M}_2 \quad M\in\Gamma_0 \iff \begin{cases}det\,M = 0\\ \text{et}\\ M\in\mathcal{S}_2\end{cases} \iff \begin{cases}M \text{ non inversible}\\ \text{et}\\ {}^tM = M\end{cases} \iff \begin{cases}\Phi(M) \text{ non inversible}\\ \text{et}\\ \Phi\big({}^tM\big) = \Phi(M)\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}det\,\Phi(M) = 0\\ \text{et}\\ {}^t\Phi(M) = \Phi(M)\end{cases} \iff \begin{cases}det\,\Phi(M) = 0\\ \text{et}\\ \Phi(M)\in\mathcal{S}_2\end{cases} \iff \Phi(M)\in\Gamma_0$$

(pour la troisième équivalence, on a utilisé l'alinéa ci-dessus et le caractère bijectif de Φ)

Donc, Φ étant bijective : $\underline{\Phi(\Gamma_0) = \Gamma_0}$

IV.B.1) <u>Hypothèse : Φ_A vérifie **P**</u> alors, d'après **IV.A.1)** : $I = \Phi_A(I) = AIA = A^2$ donc $A^2 = I$.

<u>Hypothèse : $A^2 = I$</u>

alors : • $\mathcal{M}_2$ est une $\mathbb{R}$-algèbre donc <u>Φ_A est linéaire</u> (vrai pour tout A de $\mathcal{M}_2$)

• $\forall\, M\in\mathcal{M}_2 \quad \Phi_A(M) = 0_{\mathcal{M}_2} \iff AMA = 0_{\mathcal{M}_2} \iff A^2MA^2 = A\,0_{\mathcal{M}_2}A \iff IMI = 0_{\mathcal{M}_2} \iff M = 0_{\mathcal{M}_2}$
donc : $Ker\,\Phi_A = \big\{0_{\mathcal{M}_2}\big\}$ donc <u>Φ_A est bijective</u> ($\mathcal{M}_2$ est de dimension finie)

• $\forall\,(M,M')\in\mathcal{M}_2^2 \quad \underline{\Phi_A(MM') =} AMM'A = AMIM'A = AMA^2M'A = AMAAM'A \underline{= \Phi_A(M)\times\Phi_A(M')}$

• $\forall\, M\in\mathcal{M}_2 \quad \underline{{}^t\Phi_A(M) =} {}^t(AMA) = {}^tA\,{}^tM\,{}^tA = A\,{}^tMA \underline{= \Phi_A\big({}^tM\big)}$

donc Φ_A vérifie **P**.

Donc : $\underline{\forall\, A\in\mathcal{S}_2 \quad \big(\Phi_A \text{ vérifie } \mathbf{P}\big) \iff A^2 = I}$

IV.B.2) A appartient à $\mathcal{S}_2$ et A^2 égale I donc : $\;{}^tAA = A^2 = I\;$ donc A est une matrice orthogonale symètrique.

Or : • les seules matrices orthogonales droites symètriques de $\mathcal{M}_2$ sont I et $-I$ • A est distinct de I et $-I$.

Donc A est une matrice orthogonale gauche de $\mathcal{M}_2$, donc : $\underline{\exists\,\theta\in[0,2\pi[\;/\;A = \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}}$

IV.B.2) On a : $\Phi_A(E_4) = AE_4A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -sin\,\theta & cos\,\theta \\ cos\,\theta & sin\,\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_4$$

Donc : $\underline{\Phi_A(E_4) = -E_4}$

IV.B.3) On a : $\forall\,A\in\mathcal{S}_2\setminus\{-I,I\}\quad \big(\Phi_A \text{ vérifie } \mathbf{P}\big) \iff A^2 = I \iff \left[\exists\,\theta\in[0,2\pi[\;\Big/\;A = \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}\right]$

$$\iff \Big(\exists\,\theta\in[0,2\pi[\;/\;A = (E_1-E_2)\,cos\,\theta\sqrt{2}\,E_3\,sin\,\theta\Big)$$

Or (O,E_1,E_2,E_3) est un repère orthonormal de $\mathcal{S}_2$, donc : $\begin{cases} \|E_1-E_2\|^2 = \|E_1\|^2+\|E_2\|^2 = 2 \\ \text{et} \\ \|\sqrt{2}\,E_3\| = \sqrt{2}\,\|E_3\| = \sqrt{2} \end{cases}$

donc : $\|E_1-E_2\| = \|\sqrt{2}\,E_3\| = \sqrt{2}$

Donc $\underline{\big\{A\in\mathcal{S}_2\setminus\{-I,I\}\;/\;\Phi_A \text{ vérifie } \mathbf{P}\big\}\text{ est le cercle de centre } 0_{\mathcal{M}_2} \text{ de rayon } \sqrt{2} \text{ dans le plan } (O,E_1\text{-}E_2,E_3).}$

IV.B.4) On a : $\|\Phi_A(M)\|^2 = \|AMA\|^2 = tr\big[AMA\,{}^t(AMA)\big] = tr\big[AMA\,{}^tA\,{}^tM\,{}^tA\big] = tr\big[AMAA\,{}^tMA\big] = tr\big[AMA^2\,{}^tMA\big]$

$$= tr\big[AM\,{}^tMA\big] = tr\big[{}^tMAAM\big] = tr\big[{}^tMA^2M\big] = tr\big[{}^tMM\big] = tr\big[M\,{}^tM\big] = \|M\|^2$$

on a utilisé : • $A\in\mathcal{S}_2$ • $A^2 = I$ • **I.A.1**

Donc : $\underline{\forall\,A\in\mathcal{S}_2\quad A^2 = I \Longrightarrow \big(\forall\,M\in\mathcal{M}_2\quad \|\Phi_A(M)\| = \|M\|\big)}$

Donc : $\underline{\forall\,A\in\mathcal{S}_2\quad A^2 = I \Longrightarrow \Phi_A \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_2)}$

Or : $\forall\,M\in\mathcal{M}_2\quad \Phi_A\circ\Phi_A(M) = \Phi_A(AMA) = A(AMA)A = A^2MA^2 = M$ donc : $\underline{\Phi_A\circ\Phi_A = Id_{\mathcal{M}_2}}$

Posons : $F = Ker\,\big(\Phi_A - Id_{\mathcal{M}_2}\big)$ et $G = Ker\,\big(\Phi_A + Id_{\mathcal{M}_2}\big)$

F et G sont différents de $\big\{O_{\mathcal{M}_2}\big\}$ car I appartient à F et E_4 appartient à G.

On a : • F et G sont en somme directe car ce sont deux sous-espaces propres de Φ_A,

• $\forall\,M\in\mathcal{M}_2\;\; M = \dfrac{M+\Phi_A(M)}{2}\,\dfrac{M-\Phi_A(M)}{2}$

$$\Phi_A\left(\frac{M+\Phi_A(M)}{2}\right) = \frac{1}{2}\big[\Phi_A(M)+\Phi_A\circ\Phi_A(M)\big] = \frac{M+\Phi_A(M)}{2}$$

$$\Phi_A\left(\frac{M-\Phi_A(M)}{2}\right) = \frac{1}{2}\big[\Phi_A(M)-\Phi_A\circ\Phi_A(M)\big] = -\frac{M-\Phi_A(M)}{2}$$

donc : $\dfrac{M+\Phi_A(M)}{2}\in F$ et $\dfrac{M-\Phi_A(M)}{2}\in G$ donc : $M\in F+G$

donc : $\mathcal{M}_2 = F+G$.

Donc : $\mathcal{M}_2 = F\oplus G = Ker\,\big(\Phi_A - Id_{\mathcal{M}_2}\big)\oplus Ker\,\big(\Phi_A + Id_{\mathcal{M}_2}\big)$

Donc Φ_A est la symètrie par rapport à $Ker\,\big(\Phi_A - Id_{\mathcal{M}_2}\big)$ parallèlement à $Ker\,\big(\Phi_A + Id_{\mathcal{M}_2}\big)$, or Φ_A appartient à $\mathcal{O}(\mathcal{M}_2)$, donc $\underline{\text{pour tout } A \text{ de } \mathcal{S}_2 \text{ tel que } A^2 = I,\; \Phi_A \text{ est la symètrie orthogonale par rapport à } Ker\,\big(\Phi_A - Id_{\mathcal{M}_2}\big)}$

IV.B.5.a) On sait que : • Φ_A est la symètrie orthogonale par rapport à $Ker\left(\Phi_A - Id_{\mathcal{M}_2}\right)$

• $\Phi_A(\mathcal{S}_2) = \mathcal{S}_2$ • $dim\,\mathcal{S}_2 = 3$ • $\{I, A\} \subset \mathcal{S}_2$ • $\{I, A\} \subset Ker\left(\Phi_A - Id_{\mathcal{M}_2}\right)$ • $A \notin \mathbb{R}I$

La restriction de Φ_A à $\mathcal{S}_2$ est donc soit la réflexion par rapport à $Vect\,\{I, A\}$ soit $Id_{\mathcal{S}_2}$.

Or : $\{E_1, E_3\} \subset \mathcal{S}_2$

$$\Phi_A(E_1) = \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & 0 \\ sin\,\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos^2\theta & cos\,\theta\,sin\,\theta \\ cos\,\theta\,sin\,\theta & sin^2\theta \end{pmatrix}$$ donc $\Phi_A(E_1)$ diffère de E_1 sauf si θ appartient à $\{0, \pi\}$

$$\Phi_A(\sqrt{2}\,E_3) = \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin\,\theta & cos\,\theta \\ -cos\,\theta & sin\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sin\,2\theta & -cos\,2\theta \\ -cos\,2\theta & -sin\,2\theta \end{pmatrix}$$ donc $\Phi_A(\sqrt{2}\,E_3)$ diffère de $\sqrt{2}\,E_3$ sauf si θ appartient à $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

La restriction de Φ_A à $\mathcal{S}_2$ n'est donc pas $Id_{\mathcal{S}_2}$.

<u>La restriction de Φ_A à $\mathcal{S}_2$ est donc la réflexion par rapport au plan $Vect\,\{I, A\}$.</u>

IV.B.5.b) On a : $U = \dfrac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}} = \dfrac{I}{\sqrt{2}}$, $V = \dfrac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc : $\Phi_A(U) = \Phi_A\left(\dfrac{I}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{I}{\sqrt{2}} = U,$

$$\Phi_A(V) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} cos\,2\theta & sin\,2\theta \\ sin\,2\theta & -cos\,2\theta \end{pmatrix} = V\,cos\,2\theta E_3 sin\,2\theta,$$

$$\Phi_A(E_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} sin\,2\theta & -cos\,2\theta \\ -cos\,2\theta & -sin\,2\theta \end{pmatrix} = V\,sin\,2\theta - E_3 cos\,2\theta$$

Donc : $\underline{Mat_{(U,V,E_3)}\Phi_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,2\theta & sin\,2\theta \\ 0 & sin\,2\theta & -cos\,2\theta \end{pmatrix}}$

IV.C.1) Posons : $\forall\,(x,y)\in\left(\mathbb{R}^4\right)^2 \quad \varphi(x,y) \;=\; \dfrac{1}{4}\left[det\circ\Phi\circ\psi\,(x+y) \;-\; det\circ\Phi\circ\psi\,(x-y)\right]$

Ainsi : • φ est une application de $\left(\mathbb{R}^4\right)^2$ vers $\mathbb{R}$,

• $\forall\,x\in\mathbb{R}^4 \quad 4\,\varphi(x,x) = det\circ\Phi\circ\psi\,(2x) - det\circ\Phi\circ\psi\,\left(0_{\mathbb{R}^4}\right) = det\left[2\,\Phi\circ\psi\,(x)\right] - det\,0_{\mathcal{M}_2}$ car $\begin{cases}\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2)\\ \psi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathcal{M}_2)\end{cases}$

$= \;4\,det\circ\Phi\circ\psi\,(x)$

<u>Prouver que $det\circ\Phi\circ\psi$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ revient donc à prouver que φ est bilinéaire et symètrique.</u>

Or : $\forall\,(x,y)\in\left(\mathbb{R}^4\right)^2 \quad 4\,\varphi(y,x) = det\circ\Phi\circ\psi\,(y+x) - det\circ\Phi\circ\psi\,(y-x) = det\circ\Phi\circ\psi\,(x+y) - det\left[\,-\,\Phi\circ\psi\,(x-y)\right]$

$= det\circ\Phi\circ\psi\,(x+y) - (-1)^2 det\circ\Phi\circ\psi\,(x-y) \;=\; 4\,\varphi(x,y)$

on a utilisé $\Phi\circ\psi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathcal{M}_2)$

donc <u>φ est symètrique.</u>

De plus : $\forall\,(M,M') = \left[\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\right]\in\mathcal{M}_2^2$

$$det\,(M+M') = \begin{vmatrix}a+a' & b+b'\\ c+c' & d+d'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b+b'\\ c & d+d'\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a' & b+b'\\ c' & d+d'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & b'\\ c & d'\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a' & b\\ c' & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{vmatrix}$$

$$= \;det\,M\,det\,M' \;+\; \begin{vmatrix}a & b'\\ c & d'\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b & a'\\ d & c'\end{vmatrix}$$

Soit donc x, x' et y trois éléments de $\mathbb{R}^4$ et λ un réel.

Posons : $\Phi\circ\psi\,(x) \;=\; \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \qquad \Phi\circ\psi\,(y) \;=\; \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, \qquad \Phi\circ\psi\,(x') \;=\; \begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$

On a : $4\,\varphi(\lambda x,y) \;=\; det\circ\Phi\circ\psi\,(\lambda x+y) - det\circ\Phi\circ\psi\,(\lambda x-y) \;=\; det\left[\lambda\Phi\circ\psi\,(x)+\Phi\circ\psi\,(y)\right] - det\left[\lambda\Phi\circ\psi\,(x)-\Phi\circ\psi\,(y)\right]$

$$= \;det\left[\lambda\Phi\circ\psi\,(x)\right] + det\left[\Phi\circ\psi\,(y)\right] + \begin{vmatrix}\lambda a & \beta\\ \lambda c & \delta\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\lambda b & \alpha\\ \lambda d & \gamma\end{vmatrix}$$

$$-\left(det\left[\lambda\Phi\circ\psi\,(x)\right] + det\left[\text{-}\Phi\circ\psi\,(y)\right] + \begin{vmatrix}\lambda a & \text{-}\beta\\ \lambda c & \text{-}\delta\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\lambda b & \text{-}\alpha\\ \lambda d & \text{-}\gamma\end{vmatrix}\right)$$

$$= \;2\lambda\begin{vmatrix}a & \beta\\ c & \delta\end{vmatrix} - 2\lambda\begin{vmatrix}b & \alpha\\ d & \gamma\end{vmatrix}$$

En particulier, si l'on donne la valeur 1 à λ, on obtient : $\varphi(x,y) \;=\; \dfrac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}a & \beta\\ c & \delta\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b & \alpha\\ d & \gamma\end{vmatrix}\right)$

Donc, <u>pour tout (λ,x,y) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4$: $\varphi\,(\lambda x,y) \;=\; \lambda\,\varphi\,(x,y)$</u>

On a encore : $4\,\varphi\,(x+x',y) \;=\; det\circ\Phi\circ\psi\,(x+x'+y) - det\circ\Phi\circ\psi\,(x+x'-y)$

$$= \;det\left[\Phi\circ\psi\,(x)+\Phi\circ\psi\,(x'+y)\right] - det\left[\Phi\circ\psi\,(x)+\Phi\circ\psi\,(x'-y)\right]$$

$$= \;det\left[\Phi\circ\psi\,(x)\right] + det\left[\Phi\circ\psi\,(x'+y)\right] + \begin{vmatrix}a & b'+\beta\\ c & d'+\delta\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b & a'+\alpha\\ d & c'+\gamma\end{vmatrix}$$

$$-\left(det\left[\Phi\circ\psi\,(x)\right] + det\left[\Phi\circ\psi\,(x'-y)\right] + \begin{vmatrix}a & b'-\beta\\ c & d'-\delta\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b & a'-\alpha\\ d & c'-\gamma\end{vmatrix}\right)$$

$$= \;4\,\varphi(x',y) + \begin{vmatrix}a & 2\beta\\ c & 2\delta\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b & 2\alpha\\ d & 2\gamma\end{vmatrix} = \;4\,\varphi(x',y) + \;2\left(\begin{vmatrix}a & \beta\\ c & \delta\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b & \alpha\\ d & \gamma\end{vmatrix}\right) = \;4\left[\varphi(x',y)+\varphi(x,y)\right]$$

ceci pour tout (x,x',y) de $\left(\mathbb{R}^4\right)^3$

Résumons : φ est symètrique et linéaire à gauche, φ est donc bilinéaire et symètrique.

Ceci suffit pour conclure que $det\circ\Phi\circ\psi$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.

De plus, d'après **IV.A.1** : $det\circ\Phi\circ\psi\,(1,0,0,1) \;=\; det\circ\Phi\,(I) \;=\; det\,I \;=\; 1$

Donc <u>$det\circ\Phi\circ\psi$ est bien une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^4$.</u>

IV.C.2) De plus : $\forall\,(M,N)\in\mathcal{M}_2^2 \quad det\circ\Phi\,(MN) \,=\, det\big[\Phi(M)\times\Phi(N)\big] \,=\, det\big[\Phi(M)\big]\times det\big[\Phi(N)\big] \,=\, \big[det\circ\Phi\,(M)\big]\times\big[det\circ\Phi\,(N)$

Donc, d'après **II** : $\underline{\forall\, M\in\mathcal{M}_2 \quad det\big[\Phi(M)\big] \,=\, det\, M.}$

Donc : $\forall\,(k,M)\in\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2 \quad M\in\Gamma_k \iff \begin{cases} det\, M \,=\, k \\ {}^tM \,=\, M \end{cases} \iff \begin{cases} det\big[\Phi\,(M)\big] \,=\, k \\ \Phi\big({}^tM\big) \,=\, \Phi\,(M) \end{cases}$ car Φ est bijective

$$\iff \begin{cases} det\big[\Phi\,(M)\big] \,=\, k \\ {}^t\big[\Phi\,(M)\big] \,=\, \Phi\,(M) \end{cases} \iff \Phi\,(M)\in\Gamma_k$$

Donc, encore en utilisant le caractère bijectif de Φ : $\underline{\forall\, k\in\mathbb{R} \quad \Phi\,(\Gamma_k) \,=\, \Gamma_k}$

IV.C.3) Posons : $Mat_{(U,V,E_3,E_4)}\Phi = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

D'après **IV.A.1** : $\bullet\ \Phi(U) = \Phi\left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right) = \frac{I}{\sqrt{2}} = U$ donc : $\underline{a_{2,1} = a_{3,1} = a_{4,1} = 0}$

$\bullet\ (V, E_3) \in {\mathcal{S}_2}^2$ et $\Phi(\mathcal{S}_2) = \mathcal{S}_2 = Vect(U, V, E_3)$ donc $\big(\Phi(V), \Phi(E_3)\big) \in \big[Vect(U, V, E_3)\big]^2$

donc : $\underline{a_{4,2} = a_{4,3} = 0}$

$\bullet\ \Phi(E_4) = \pm E_4$ donc : $\underline{a_{1,4} = a_{2,4} = a_{3,4} = 0 \text{ et } a_{4,4} = \pm 1}$

On a : $\bullet\ U = \dfrac{I}{\sqrt{2}},\quad V = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad E_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$\bullet\ det\,V = -\dfrac{1}{2}$

$det\,\Phi(V) = det\big(a_{1,2}U + a_{2,2}V + a_{3,2}E_3\big) = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}a_{1,2}+a_{2,2} & a_{3,2}\\ a_{3,2} & a_{1,2}-a_{2,2}\end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\big(a_{1,2}^2 - a_{2,2}^2 - a_{3,2}^2\big)$

donc, d'après **IV.C.2** : $\underline{a_{2,2}^2 + a_{3,2}^2 - a_{1,2}^2 = 1}$

$\bullet\ det\,E_3 = -\dfrac{1}{2}$ et $det\,\Phi(E_3) = det\big(a_{1,3}U + a_{2,3}V + a_{3,3}E_3\big) = \dfrac{1}{2}\big(a_{1,3}^2 - a_{2,3}^2 - a_{3,3}^2\big)$

donc, d'après **IV.C.2** : $\underline{a_{2,3}^2 + a_{3,3}^2 - a_{1,3}^2 = 1}$

$\bullet\ det\,(U+V) = det\,(\sqrt{2}\,E_1) = 0$

$det\big[\Phi(U+V)\big] = det\big[\Phi(U) + \Phi(V)\big] = det\big[(1+a_{1,2})U + a_{2,2}V + a_{3,2}E_3\big] = \dfrac{1}{2}\big[(1+a_{1,2})^2 - a_{2,2}^2 - a_{3,2}^2\big]$

$= \dfrac{1}{2}\big[(1 + 2a_{1,2} + a_{1,2}^2 - a_{2,2}^2 - a_{3,2}^2\big] = \dfrac{1}{2}\,(1 + 2a_{1,2} - 1) = a_{1,2}$

donc, d'après **IV.C.2** : $\underline{a_{1,2} = 0}$

$\bullet\ det\,(U + E_3) = det\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] = 0$

$det\big[\Phi(U+E_3)\big] = det\big[\Phi(U) + \Phi(E_3)\big] = det\big[(1+a_{1,3})U + a_{2,3}V + a_{3,3}E_3\big] = a_{1,3}$

donc, d'après **IV.C.2** : $\underline{a_{1,3} = 0}$

Donc : $a_{2,2}^2 + a_{3,2}^2 = a_{2,3}^2 + a_{3,3}^2 = 1$, soit donc θ et θ', éléments de $[0, 2\pi[$, tels que : $\begin{cases} a_{2,2} = cos\,\theta, & a_{3,2} = sin\,\theta\\ a_{2,3} = cos\,\theta', & a_{3,3} = sin\,\theta'\end{cases}$

Enfin : $det\,(V + E_3) = det\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right] = -1$

$det\big[\Phi(V+E_3)\big] = det\big[\Phi(V) + \Phi(E_3)\big] = det\big[(a_{2,2}+a_{2,3})V + (a_{3,2}+a_{3,3})E_3\big]$

$= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}a_{2,2}+a_{2,3} & a_{3,2}+a_{3,3}\\ a_{3,2}+a_{3,3} & -a_{2,2}-a_{2,3}\end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\big[-(a_{2,2}+a_{2,3})^2 - (a_{3,2}+a_{3,3})^2\big]$

donc, d'après **IV.C.2** : $(a_{2,2}+a_{2,3})^2 + (a_{3,2}+a_{3,3})^2 = 2$

donc : $cos^2\theta + 2\cos\theta\cos\theta' + cos^2\theta' + sin^2\theta + 2\sin\theta\sin\theta' + sin^2\theta' = 2$

donc : $cos\,(\theta - \theta') = 0$ or $\theta - \theta' \in]\text{-}2\pi, 2\pi[$ donc $\theta' - \theta \in \left\{\text{-}\dfrac{3\pi}{2}, \text{-}\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

si $\theta' - \theta \in \left\{\text{-}\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ alors $\theta' = \theta + \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ avec $\alpha \in \{0, \text{-}2\pi\}$ donc $\begin{cases} cos\,\theta' = cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -sin\,\theta\\ sin\,\theta' = sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = cos\,\theta\end{cases}$

si $\theta' - \theta \in \left\{\text{-}\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ alors $\theta' = \theta - \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ avec $\alpha \in \{0, 2\pi\}$ donc $\begin{cases} cos\,\theta' = cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = sin\,\theta\\ sin\,\theta' = sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = -cos\,\theta\end{cases}$

Donc, en regroupant : $\underline{\exists\,(\theta, \varepsilon, \varepsilon') \in [0, 2\pi[\, \times \{-1, 1\}^2 \Big/ Mat_{\mathbf{B}}\Phi = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & cos\,\theta & \varepsilon' sin\,\theta & 0\\ 0 & sin\,\theta & -\varepsilon' cos\,\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}}$

IV.C.4.a) On a : $A = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) V sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) E_3\right] = \begin{pmatrix} cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) & sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \\ sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) & -cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$ donc $A^2 = I$.

Donc, d'après **IV.B.1**, Φ_A vérifie **P**, de plus, par hypothèse, Φ vérifie **P**.

Donc : • Φ et Φ_A appartiennent à $GL(\mathcal{M}_2)$ donc $\Phi\circ\Phi_A$ appartient à $GL(\mathcal{M}_2)$,

• $\forall\,(M, M')\in\mathcal{M}_2^2 \quad \Phi\circ\Phi_A(MM') = \Phi\left[\Phi_A(M)\times\Phi_A(M')\right] = \Phi\circ\Phi_A(M)\times\Phi\circ\Phi_A(M')$

$$\Phi\circ\Phi_A\left({}^tM\right) = \Phi\left[{}^t\Phi_A(M)\right] = {}^t\left(\Phi\left[\Phi_A(M)\right]\right) = {}^t\left[\Phi\circ\Phi_A(M)\right]$$

Donc $\underline{\Phi\circ\Phi_A \text{ vérifie } \mathbf{P}.}$

Par ailleurs : $A = \begin{pmatrix} cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) & sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \\ sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) & -cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$ donc $A \in \mathcal{S}_2 \setminus \{-I, I\}$ donc, d'après **IV.B.2** : $\Phi_A(E_4) = -E_4$

et, d'après **IV.B.5**, la restriction de Φ_A à $\mathcal{S}_2$ a pour matrice dans (U, V, E_3) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta \\ 0 & sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$

Donc : $$\underline{Mat_{(U,V,E_3,E_4)}\Phi\circ\Phi_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta & 0 \\ 0 & sin\,\theta & -cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta & 0 \\ 0 & sin\,\theta & -cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}}$$

IV.C.4.b) On a : $\Phi(E_3E_4) = \Phi\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\Phi\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Phi\left(E_2 - E_1\right) = \frac{1}{2}\Phi\left(-\sqrt{2}\,V\right)$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi\left(V\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(cos\,\theta\, V sin\,\theta\, E_3\right) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$$

$$\Phi(E_3E_4) = \Phi(E_3)\times\Phi(E_4) = \left(sin\,\theta\, V - cos\,\theta\, E_3\right)\varepsilon E_4$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} sin\,\theta & -cos\,\theta \\ -cos\,\theta & -sin\,\theta \end{pmatrix}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$$

Donc : $\underline{\varepsilon = -1}$

Donc $\Phi\circ\Phi_A = Id_{\mathcal{M}_2}$ or, d'après **IV.B.4**, Φ_A est une symètrie (orthogonale) donc $\Phi_A\circ\Phi_A = Id_{\mathcal{M}_2}$

Donc : $\underline{\Phi = \Phi\circ\left(\Phi_A\circ\Phi_A\right) = \left(\Phi\circ\Phi_A\right)\circ\Phi_A = Id_{\mathcal{M}_2}\circ\Phi_A = \Phi_A}$

IV.C.5) En reprenant les calculs de **IV.C.4.b)**, on obtient : $\Phi(E_3E_4) \;=\; -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$

$$\Phi(E_3E_4) \;=\; \Phi(E_3)\times\Phi(E_4) \;=\; \big(-\,sin\,\theta\, V cos\,\theta\, E_3\big)\,\varepsilon E_4$$

$$=\; -\frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$$

Donc : $\underline{\varepsilon \;=\; 1}$

Soit φ un élément de $[0, 2\pi[$, posons : $B \;=\; \sqrt{2}\,\left[cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) V sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) E_3\right]$

Comme en **IV.C.4.a)** : $Mat_{\mathbf{B}}\Phi_A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta & 0 \\ 0 & sin\,\theta & -cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Mat_{\mathbf{B}}\Phi_B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & sin\,\varphi & 0 \\ 0 & sin\,\varphi & -cos\,\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc : $$Mat_{\mathbf{B}}\Phi_B\circ\Phi_A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & sin\,\varphi & 0 \\ 0 & sin\,\varphi & -cos\,\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta & 0 \\ 0 & sin\,\theta & -cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi\, cos\,\theta + sin\,\varphi\, sin\,\theta & cos\,\varphi\, sin\,\theta - sin\,\varphi\, cos\,\theta & 0 \\ 0 & sin\,\varphi\, cos\,\theta - cos\,\varphi\, sin\,\theta & sin\,\varphi\, sin\,\theta + cos\,\varphi\, cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(\varphi-\theta) & -sin\,(\varphi-\theta) & 0 \\ 0 & sin\,(\varphi-\theta) & cos\,(\varphi-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ pour $\varphi \;=\; 2\theta$ on retrouve $Mat_{\mathbf{B}}\Phi$

Donc, $\underline{\text{avec } B \;=\; \sqrt{2}\,\big(cos\,\theta\, V sin\,\theta\, E_3\big), \text{ on a : } \Phi \;=\; \Phi_B\circ\Phi_A}$