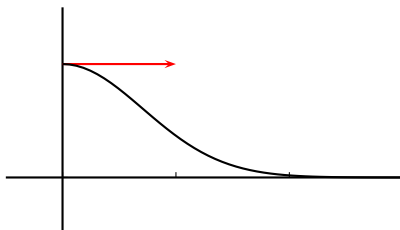


Partie I - existence de F et I

1. a. f est continue décroissante sur $[0, +\infty[$, $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 b. $f'(0) = 0$ donc la tangente en $(0, 1)$ a pour équation $y = 1$, l'axe des abscisses ($y = 0$) est asymptote.



2. La fonction f étant **continue** sur $[0, +\infty[$, F est en l'unique primitive qui s'annule en 0. F est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty$ et $F' = f$.
 3. f est continue sur $[0, +\infty[$ et $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ (croissances comparées) donc $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison à l'exemple de RIEMANN, f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc I converge.

Partie II - calcul de I : première méthode

1. Notons $h : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue (par morceaux) sur le **segment** $[0, 1]$ donc G est bien définie sur $[0, +\infty[$.

On utilise le théorème de dérivation sous le signe intégrale :

- Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$;
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $[0, 1]$;
- **HD locale** : soit $a > 0$. $\forall x \in [0, a], \forall t \in [0, 1], \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2a$ qui est intégrable sur le **segment** $[0, 1]$.

On en déduit que G est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, a]$ et donc aussi sur $\bigcup_{a>0} [0, a] = [0, +\infty[$ et que $G'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$

2. a. H est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et $H'(x) = 2F(x)F'(x) + G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$

Effectuons le changement de variable $t = xu$ dans la première intégrale :

$$2F(x)F'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 u^2} x du = 2x \int_0^1 e^{-x^2 - x^2 u^2} du = -G'(x).$$

Donc $H'(x) = 0$ et H est constante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

b. Pour $x = 0$, $H(0) = 0 + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

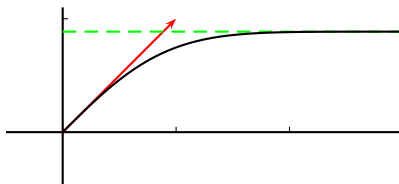
3. a. $\forall (x, t) \in [0, +\infty \times [0, 1], -x^2(1+t^2) \leq -x^2$ et $1+t^2 \geq 1$ donc $0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$.

On en déduit que $0 \leq G(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$ donc, avec le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

b. $F(x) \stackrel{F(x) \geq 0}{=} \sqrt{F^2(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - G(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. F est croissante sur $[0, +\infty[$, $F'(0) = 1$, $F(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.



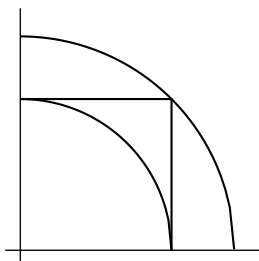
Partie III - calcul de I : deuxième méthode

1. Avec le passage en polaires, le domaine devient le **pavé** : $\Delta(R) = \left\{ 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

$$J(R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^R r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

2. $K(R) = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = (F(R))^2$.

3. a. .



On constate que $D(R) \subset \Gamma(R) \subset D(\sqrt{2}R)$.

- b. On utilise la positivité de l'intégrale et l'additivité des supports. On note $\phi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$:

$$\begin{aligned} \iint_{D(R)} \phi(x, y) dx dy &\leq \iint_{D(R)} \phi(x, y) dx dy + \iint_{\Gamma(R) \setminus D(R)} \phi(x, y) dx dy = \iint_{\Gamma(R)} \phi(x, y) dx dy \leq \\ \iint_{\Gamma(R)} \phi(x, y) dx dy + \iint_{D(\sqrt{2}R) \setminus \Gamma(R)} \phi(x, y) dx dy &= \iint_{D(\sqrt{2}R)} \phi(x, y) dx dy \end{aligned}$$

où l'on retrouve bien les inégalités demandées.

4. D'après III.1., $\lim_{R \rightarrow +\infty} J(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} J(\sqrt{2}R) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit avec les inégalités précédentes et le théorème des gendarmes que $\lim_{R \rightarrow +\infty} K(R) = \frac{\pi}{4}$.

5. D'après III.2., $F(R) = \sqrt{K(R)}$ donc $I = \lim_{R \rightarrow +\infty} F(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie IV - développements en séries entières

1. a. $\forall u \in \mathbf{R}, e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

b. On en déduit que $\forall u \in \mathbf{R}, e^{-u^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{n!}$.

2. a. D'après le théorème d'intégration des séries entières, F est développable en série entière de même rayon que f et son développement s'obtient en intégrant terme à terme celui de f .

b. $F(x) = \underbrace{F(0)}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$.

3. a. $\forall x \in]-R, R[, 2xy = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$. D'après le théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x \in]-R, R[, y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{et donc}$$

$$\forall x \in]-R, R[, y' - 2xy = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1}) x^n$$

On en déduit, avec le théorème d'unicité des coefficients d'un DSE, que $\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0 \end{cases}$.

- b. Avec l'hypothèse $a_0 = 0$, on déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, a_{2n} = 0$.

Récurrence encore : $\forall n \in \mathbf{N}, a_{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \frac{2}{2n-1} \cdots \frac{2}{1} = \frac{2^n \cdot (2n)(2n-2) \cdots 2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$

- c. D'après ce qui précède, la somme de la série entière $\sum \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ est solution de (E) et, puisque son terme constant est nul, elle s'annule en 0.

$$\text{Rayon de convergence : } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2^{2n+2}(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!|x|^{2n+1}} = \frac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit avec la règle de D'ALEMBERT que la série converge pour tout $x \in \mathbf{R}$ et donc que son rayon $R = +\infty$.

- d. g est solution de (E) sur $[0, +\infty[$ en effet : $g'(x) = 2xg(x) + e^{x^2} f(x) = 2xg(x) + 1$.

D'autre part, $g(0) = e^0 f(0) = 0$.

g et y sont donc solutions du même problème de CAUCHY. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, elles sont égales.

g est donc développable en série entière, de rayon $+\infty$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$