

# CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2021

Épreuve de mathématiques II, PSI, quatre heures  
(corrigé)

## *Autour des fonctions hypergéométriques*

### I - Suites et séries hypergéométriques

**Q1.** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique à valeurs réelles, alors il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = au_n$ . Ainsi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la définition d'une suite hypergéométrique avec  $P = a$  et  $Q = 1$ .

**Q2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n + 1 > p$  alors on a :

$$\binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} = \frac{(n+1)n!}{p!(n+1-p)(n-p)!} = \frac{n+1}{n+1-p} \binom{n}{p},$$

donc :  $\forall n > p - 1$ ,  $(n+1-p) \binom{n+1}{p} = (n+1) \binom{n}{p}$ . Si  $n \leq p - 1$  alors on peut montrer que chaque membre de cette égalité est nul, donc le résultat reste valable. On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \binom{n}{p} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+1)u_n = (n+1-p)u_{n+1}$ . Il suffit de poser  $P = X + 1$  et  $Q = X + 1 - p$  pour reconnaître la relation de récurrence d'une suite hypergéométrique.

**Q3.** Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant (I.1) avec  $P = X(X-1)(X-2)$  et  $Q = X(X-2)$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ . Après simplification, la relation de récurrence (I.1) équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}, \quad u_{n+1} = (n-1)u_n.$$

(Attention à bien considérer  $n \notin \{0, 2\}$  au moment de diviser par  $n(n-2)$ , pour que ce terme soit non nul ; pour  $n \in \{0, 2\}$ , la relation de récurrence donne  $0 = 0$ ). De cette relation on déduit d'abord  $u_2 = 0$  (prendre  $n = 1$ ), et ensuite, par une récurrence facile :  $\forall n \geq 3$ ,  $u_n = \left( \prod_{k=2}^{n-2} k \right) u_3 = (n-2)!u_3$ . Pour résumer, une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $E$  si et seulement si :

$$u_2 = 0, \quad \text{et : } \forall n \geq 3, \quad u_n = (n-2)!u_3.$$

On note qu'il n'y a pas de contrainte sur la valeur de  $u_0$ ,  $u_1$ , et  $u_3$ , et que ces trois termes suffisent à déterminer entièrement  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui semble indiquer qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 3. Formalisons. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , si l'on note  $e_i = (e_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i \neq n, \end{cases}$$

et  $\Gamma = (\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{0, 1, 2\}, \\ (n-2)! & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

alors la description explicite donnée ci-dessus des suites de  $E$  montre qu'une suite réelle  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $E$  si et seulement si :

$$u = u_0 \cdot e_0 + u_1 \cdot e_1 + u_3 \cdot \Gamma.$$

On en déduit d'une part que  $E$  est un espace vectoriel engendré par  $e_0$ ,  $e_1$ ,  $\Gamma$ , et d'autre part qu'une base de  $E$  est  $(e_0, e_1, \Gamma)$  : pour montrer qu'elle est libre, il suffit d'évaluer une relation de dépendance linéaire entre  $e_0$ ,  $e_1$  et  $\Gamma$  en  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = 3$ , pour constater la nullité de tous les scalaires. En résumé :

$$E = \text{Vect}_{\mathbb{R}}((e_0, e_1, \Gamma)), \quad \text{et : } \dim(E) = 3.$$

**Q 4.** Montrons que  $u_n = 0$  pour tout entier  $n \geq n_0 + 1$ , par récurrence sur  $n$ .

Pour l'initialisation, posons  $n = n_0$  dans la relation de récurrence (I.1). On a alors :  $P(n_0)u_{n_0} = Q(n_0)u_{n_0+1}$ . Le membre de gauche est nul car  $P(n_0) = 0$  par hypothèse de l'énoncé, et comme  $Q(n_0) \neq 0$  on en déduit :  $u_{n_0+1} = 0$ . D'où l'initialisation.

À présent, soit  $n \geq n_0 + 1$  tel que  $u_n = 0$ . La relation de récurrence (I.1) donne  $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$ . Or  $u_n = 0$  par hypothèse de récurrence, donc  $Q(n)u_{n+1} = 0$ . Or  $Q(n) \neq 0$  par hypothèse de l'énoncé (on a  $n \geq n_0 + 1 \geq n_0$ ), donc  $u_{n+1} = 0$ . D'où l'hérédité de la proposition.

Par récurrence, on en déduit que  $u_n = 0$  pour tout entier  $n \geq n_0 + 1$ .

## II - Extension de la factorielle

**Q 5.** Il s'agit de justifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$  converge. Pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times ]0, +\infty[$ , posons :

$$f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}. \tag{1}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . L'application  $t \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$  en tant que produit d'exponentielles : étudions son intégrabilité au voisinage de 0 et  $+\infty$ . Comme la fonction est positive, on peut procéder par relations de comparaison.

Au voisinage de  $+\infty$  on a :  $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ , car d'après le théorème des croissances comparées :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ . Or  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  en tant que fonction de Riemann d'exposant  $2 > 1$ , donc par comparaison  $t \mapsto f(x, t)$  l'est également.

Au voisinage de 0 on a :  $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ , qui est intégrable sur  $]0, 1]$  si et seulement si  $1 - x < 1$  (en tant que fonction de Riemann), si et seulement si  $x > 0$ . On en déduit, par comparaison, que  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, 1]$  si et seulement si  $x > 0$  : c'est vrai par hypothèse.

Ainsi  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , ce qui prouve que l'intégrale  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$  converge. Ainsi  $\Gamma$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Q 6.** Reprenons la notation  $f$  introduite dans la question précédente (équation (1)). Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , l'application  $t \mapsto f(x, t)$  est CONTINUE, positive et non identiquement nulle sur  $]0, +\infty[$ , donc  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t)dt > 0$  par propriété de séparation de l'intégrale.

Justifions à présent que  $\Gamma$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètres. L'application  $f$  est manifestement continue sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ , donc continue sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  par rapport à chaque variable. De plus, pour tout segment  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $(x, t) \in [a, b] \times ]0, +\infty[$ , on a :

$$|f(x, t)| \leq \begin{cases} t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1, \\ t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leq 1. \end{cases} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

L'application :

$$\begin{cases} \varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1, \\ t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leq 1, \end{cases} \end{cases}$$

manifestement continue (par morceaux) sur  $]0, +\infty[$ , est intégrable sur  $]0, +\infty[$  : en effet, au voisinage de 0 on a :  $\varphi(t) = f(a, t)$ , et au voisinage de  $+\infty$  on a :  $\varphi(t) = f(b, t)$  ; or nous avons justifié l'intégrabilité sur  $]0, +\infty[$  de  $t \mapsto f(x, t)$  dans la question précédente pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , donc en particulier pour  $x = a$  et  $x = b$  ; d'où l'intégrabilité de  $\varphi$ . L'hypothèse de domination est bien vérifiée.

Ainsi, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, l'application  $\Gamma$  est continue sur tout segment de  $]0, +\infty[$ , donc sur  $]0, +\infty[$  : d'où le résultat.

**Q 7.** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Intégrons par parties l'intégrale  $\Gamma(x + 1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ , en intégrant l'application  $t \mapsto e^{-t}$  (qui est continue sur  $]0, +\infty[$ , de primitive  $t \mapsto -e^{-t}$ ) et en dérivant l'application  $t \mapsto t^x$  (qui est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , de dérivée  $t \mapsto xt^{x-1}$ ).

Comme nous avons ici une intégrale impropre, nous devons préalablement vérifier que le terme  $[t^x(-e^{-t})]_0^{+\infty}$  est correctement défini ; c'est le cas, puisque :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x(-e^{-t}) = 0$  d'après le théorème des croissances comparées, et :  $\lim_{t \rightarrow 0} t^x(-e^{-t}) = 0$  car  $x > 0$ .

Ainsi la formule de l'intégration par parties est valable, et on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [t^x(-e^{-t})]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

c'est-à-dire :  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ , ce qu'il fallait démontrer.

**Q 8.** Démontrons l'égalité :  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \Gamma(n) = (n - 1)!$ , par récurrence sur  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Pour  $n = 1$ , on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1,$$

or  $0! = 1$ , donc  $\Gamma(1) = 0!$  ; d'où l'initialisation.

À présent, soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel qu'on ait :  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ . D'après la question précédente, on a :  $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$ . Or  $\Gamma(n) = (n - 1)!$  par hypothèse de récurrence, donc :  $\Gamma(n + 1) = n(n - 1)! = n!$ , d'où l'égalité au rang  $n + 1$ .

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, par principe de récurrence l'égalité est vraie pour tout entier  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

### III - Fonctions hypergéométriques

#### III.A – Symbole de Pochhammer

**Q 9.** Soit  $a$  un entier négatif ou nul. Si l'on pose  $\ell = -a \in \mathbb{N}$ , alors  $a + \ell = 0$ , donc pour tout entier  $n \geq \ell + 1$  on a :  $[a]_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a + k) = (a + \ell) \times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \ell}}^{n-1} (a + k) = 0$  (on a  $0 \leq \ell \leq n - 1$  par définition de  $\ell$  et hypothèse sur  $n$ , donc  $a + \ell$  apparaît bien dans ce produit). D'où le résultat.

**Q 10.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $n = 0$  alors par définition du symbole de Pochhammer on a :  $a[a + 1]_0 = a = \prod_{k=0}^0 (a + k) = [a]_1$ . Si  $n \geq 1$ , alors :

$$a[a + 1]_n = a \prod_{k=0}^{n-1} (a + 1 + k) \stackrel{[k'=k+1]}{=} a \prod_{k'=1}^n (a + k') = \prod_{k'=0}^{(n+1)-1} (a + k') = [a]_{n+1},$$

d'où le résultat.

**Q 11.** Soit  $a \in D$ . En réitérant la relation (II.1), on a facilement :

$$\Gamma(a + n) = \prod_{k=0}^{n-1} (a + k)\Gamma(a) = [a]_n \Gamma(a) \tag{2}$$

(pour  $n = 0$  c'est trivialement vrai du fait que  $[a]_0 = 1$  par définition). Il reste à diviser par  $\Gamma(a)$  pour en déduire l'expression de  $[a]_n$  désirée. Pour cela, encore faut-il justifier que  $\Gamma(a) \neq 0$  : pour  $a > 0$  c'est une conséquence de la question **Q 6** ; pour  $a$  négatif mais non entier, on écrit (2) avec  $n$  suffisamment grand pour que  $a + n > 0$  (par exemple  $n = \lfloor 1 - a \rfloor$ , mais il n'est pas utile de l'expliciter), de sorte que :  $[a]_n \Gamma(a) = \Gamma(a + n) > 0$ . Ceci impose  $\Gamma(a) \neq 0$ .

Après division par  $\Gamma(a)$  dans (2), on a donc :

$$\forall a \in D, \quad [a]_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Si, de plus, on suppose que  $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , alors  $\Gamma(a+n) = (a+n-1)!$  et  $\Gamma(a) = (a-1)!$  d'après la question **Q 8**, donc :

$$\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad [a]_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}.$$

### III.B – Fonction hypergéométrique de Gauss

**Q 12.** Si  $c \in D$ , alors  $c$  n'est pas un entier négatif, c'est-à-dire :  $\forall k \in \mathbb{N}, c \neq -k$ . On en déduit que  $c+k \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et donc  $[c]_n = \prod_{k=0}^{n-1} (c+k) \neq 0$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Pour  $n=0$ , on a directement  $[c]_0 = 1 \neq 0$ . La division par  $[c]_n$  est donc licite et  $\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n}$  est correctement défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q 13.** Posons :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n}$ . La série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$  est hypergéométrique si et seulement si la suite  $\left(\frac{u_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est. Or on a clairement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \ell \in \mathbb{R}, \quad [\ell]_{n+1} = (\ell+n)[\ell]_n, \tag{3}$$

et :  $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1)n!$ , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \frac{u_n}{n!}. \tag{4}$$

Ainsi la suite  $\left(\frac{u_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie (I.1) avec  $P = (a+X)(b+X)$  et  $Q = (c+X)(X+1)$ , donc elle est hypergéométrique, et par suite la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$  l'est également.

*Remarque.* La relation (3) démontre que pour tout  $\ell \in \mathbb{R}$ , la suite  $([\ell]_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est hypergéométrique.

**Q 14.** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \times D$ . On pose  $P = (a+X)(b+X)$  et  $Q = (c+X)(X+1)$ . Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite hypergéométrique associée aux polynômes  $P$  et  $Q$ . Elle vérifie donc, après division par  $Q(n) \neq 0$  (qui est bien non nul pour tout  $n \in \mathbb{N}$  si  $c$  n'est pas un entier négatif ou nul) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{P(n)}{Q(n)} v_n = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} v_n.$$

Par récurrence, on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad v_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (a+k) \prod_{k=0}^{n-1} (b+k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (c+k) \prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} v_0 = \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n n!} v_0,$$

égalité qui reste valable pour  $n=0$ . On en déduit que toute suite hypergéométrique associée à  $P$  et  $Q$  est proportionnelle à la suite  $\left(\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , la réciproque étant vraie d'après la question précédente. Or cette suite n'est jamais nulle, vu que son terme d'indice 0 est égal à 1. L'ensemble de ces suites est donc une droite vectorielle engendrée par  $\left(\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  : autrement dit, c'est un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est  $\left(\left(\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ .

**Q 15.** Posons à nouveau  $u_n = \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $a$  ou  $b$  est un entier négatif ou nul, alors  $u_n = 0$  pour tout  $n$  suffisamment grand d'après la question **Q 9**, et dans ce cas le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$  est trivialement infini.

Supposons à présent que  $a$  et  $b$  ne sont pas des entiers négatifs ou nuls. Alors  $u_n \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et en divisant par  $\frac{u_n}{n!}$  dans (4) on a, pour tout  $x \neq 0$  et tout  $n$  au voisinage de  $+\infty$  :

$$\left| \frac{\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{u_n}{n!} x^n} \right| = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} |x| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} |x| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x| \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} |x|.$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert :

- pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  tel que  $|x| < 1$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$  converge absolument ;
- pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  tel que  $|x| > 1$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$  diverge (grossièrement).

On en déduit que le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$  est égal à 1 si  $a$  et  $b$  ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

**Q 16.** On pose encore une fois  $u_n = \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . L'application  $F_{a,b,c}$  est une somme de série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, donc elle est de classe  $C^\infty$  (et de classe  $C^1$  en particulier) sur son intervalle ouvert de convergence, qui contient au moins  $] -1, 1[$ , et est dérivable terme à terme. On en déduit :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad F'_{a,b,c}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n.$$

Or d'après la question **Q 10** on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} = \frac{ab [a+1]_n [b+1]_n}{c [c+1]_n},$$

donc :

$$F'_{a,b,c} = \frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}.$$

**Q 17.** On a déjà justifié que  $F_{a,b,c}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$ . On réitère la relation entre fonctions hypergéométriques obtenue à la question précédente, et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad F_{a,b,c}^{(n)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (a+k) \prod_{k=0}^{n-1} (b+k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (c+k)} F_{a+n,b+n,c+n} = \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} F_{a+n,b+n,c+n}.$$

**Q 18.** Soit  $x \in ] -1, 1[$ . On a bien  $\frac{3}{2} \in D$ , donc  $F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}$  est définie sur  $] -1, 1[$  d'après les questions précédentes. On a :

$$F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n [1]_n}{\left[\frac{3}{2}\right]_n n!} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n [1]_n}{\left[\frac{3}{2}\right]_n n!} x^{2n}.$$

Or  $[1]_n = n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (conséquence immédiate de la définition, ou de la question **Q 11**), et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n}{\left[\frac{3}{2}\right]_n} \stackrel{\text{[Q 10]}}{=} \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{3}{2}\right]_{n-1}}{\left[\frac{3}{2}\right]_n} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{3}{2} + n - 1\right)} = \frac{1}{2n+1}.$$

On remarque que l'égalité reste valable pour  $n = 0$ . Alors, pour  $x \neq 0$  :

$$F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(-x^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\arctan(x)}{x},$$

tandis que pour  $x = 0$  on a :  $F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(0) = \frac{\left[\frac{1}{2}\right]_0 [1]_0}{\left[\frac{3}{2}\right]_0 0!} = 1$ .

**Q 19.** On sait que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a :  $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ . Par conséquent, si l'on note  $g$  la fonction de l'énoncé, alors :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n+1} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[1]_n}{n+1} \frac{(-x)^n}{n!}.$$

Pour faire apparaître deux autres symboles de Pochhammer, on note que d'après (3) et la question **Q 10** on a :

$$n+1 \stackrel{(3)}{=} \frac{[1]_{n+1}}{[1]_n} \stackrel{[\mathbf{Q10}]}{=} \frac{[2]_n}{[1]_n},$$

donc en reprenant l'égalité ci-dessus :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[1]_n [1]_n}{[2]_n} \frac{(-x)^n}{n!} = F_{1,1,2}(-x),$$

d'où le résultat.

**Q 20.** Le coefficient d'indice  $n \in \mathbb{N}$  de  $F_{a,-N,c}(1)$  est  $\frac{[a]_n [-N]_n}{[c]_n}$ , et d'après la question **Q 9** on a  $[-N]_n = 0$  pour tout entier  $n \geq N+1$  (car  $-N$  est un entier négatif ou nul). Ainsi  $F_{a,-N,c}(1)$  est une série avec un nombre fini de termes non nuls : elle converge évidemment. Comme tous ses termes sont nuls au-delà de l'indice  $n \geq N+1$ , on a :

$$F_{a,-N,c}(1) = \sum_{n=0}^N \frac{[a]_n [-N]_n}{[c]_n n!}.$$

Or, d'après le résultat admis dans l'énoncé, on a :

$$F_{a,-N,c}(1) = \frac{\Gamma(c-a+N)}{\Gamma(c-a)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+N)} \stackrel{[\mathbf{Q11}]}{=} \frac{[c-a]_N}{[c]_N}. \tag{5}$$

(Notons qu'il n'y a pas de problème de définition : on a  $c \in D$  et  $c-a \in D$  donc  $\Gamma(c)$  et  $\Gamma(c-a)$  existent, comme ce fut admis dans l'énoncé ; de plus il est facile de vérifier que  $c+N \in D$  si  $c \in D$ , donc il en est de même pour  $\Gamma(c+N)$ , puis pour  $\Gamma(c-a+N)$ ).

Pour en déduire le résultat demandé, simplifions la somme  $F_{a,-N,c}(1) = \sum_{n=0}^N \frac{[a]_n [-N]_n}{[c]_n n!}$ . Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , on a :  $\frac{[-N]_n}{n!} = (-1)^n \binom{N}{n}$ . Or, par définition du symbole de Pochhammer, on a  $\frac{[-N]_0}{0!} = 1 = (-1)^0 \binom{N}{0}$ , et pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$[-N]_n = \prod_{k=0}^{n-1} (-N+k) = \prod_{k=0}^{n-1} ((-1) \cdot (N-k)) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (N-k) \stackrel{[k'=N-k]}{=} (-1)^n \prod_{k'=N-(n-1)}^N k',$$

et comme :  $\prod_{k'=N-(n-1)}^N k' = \prod_{k'=N-n+1}^N k' = \frac{\prod_{k'=0}^N k'}{\prod_{k'=0}^{N-n} k'} = \frac{N!}{(N-n)!}$ , on en déduit :

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad [-N]_n = (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!}, \tag{6}$$

puis :  $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \frac{[-N]_n}{n!} = (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!n!} = (-1)^n \binom{N}{n}$  (relation aussi valable pour  $n=0$ ). Finalement :

$$F_{a,-N,c}(1) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{N}{n} \frac{[a]_n}{[c]_n} \stackrel{(5)}{=} \frac{[c-a]_N}{[c]_N},$$

d'où le résultat.

**Q 21.** Avec  $a = -u$  et  $c = v - N + 1$ , on a :  $c - a = u + v - N + 1$ . Or  $N \leq u$  et  $N \leq v$ , donc  $c \geq 1$  et  $c - a \geq 1$ , ce dont on déduit  $c \in D$  et  $c - a \in D$  (ce sont même des entiers naturels non nuls). On est donc dans le cadre de la question précédente. On a :

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{N}{n} \frac{[a]_n}{[c]_n} = \frac{[c-a]_N}{[c]_N},$$

ou encore :

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{N}{n} \frac{[-u]_n}{[v-N+1]_n} = \frac{[u+v-N+1]_N}{[v-N+1]_N}.$$

Simplifions tous ces symboles. Tout d'abord, comme  $v - N + 1$  et  $u + v - N + 1$  sont des entiers naturels non nuls d'après ce qui précède, la question **Q 10** nous permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [v-N+1]_n = \frac{(v-N+n)!}{(v-N)!}, \quad [u+v-N+1]_n = \frac{(u+v-N+n)!}{(u+v-N)!}.$$

De plus, en reprenant la relation (6) démontrée dans la question précédente (en remplaçant  $N$  par  $u$ ; on a bien  $n \leq N \leq u$  donc on peut l'appliquer), on a :

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad [-u]_n = (-1)^n \frac{u!}{(u-n)!}.$$

Par conséquent, l'égalité ci-dessus devient :

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{N}{n} (-1)^n \frac{u!(v-N)!}{(u-n)!(v-N+n)!} = \frac{(u+v)!(v-N)!}{(u+v-N)!v!}.$$

Simplifions d'abord  $(v-N)!$  et les puissances de  $-1$ . On obtient :

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \frac{u!}{(u-n)!(v-N+n)!} = \frac{(u+v)!}{(u+v-N)!v!} = \frac{N!}{v!} \frac{(u+v)!}{(u+v-N)!N!} = \frac{N!}{v!} \binom{u+v}{N}.$$

En multipliant par  $\frac{v!}{N!}$  cette égalité, on a le membre de droite espéré :

$$\frac{v!}{N!} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \frac{u!}{(u-n)!(v-N+n)!} = \binom{u+v}{N}.$$

Il reste à simplifier le membre de gauche, afin de reconnaître la somme de l'énoncé. Or, pour tout entier  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{v!}{N!} \binom{N}{n} \frac{u!}{(u-n)!(v-N+n)!} &= \frac{v!}{N!} \frac{N!}{(N-n)!n!} \frac{u!}{(u-n)!(v-N+n)!} \\ &= \frac{v!}{(N-n)!(v-N+n)!} \frac{u!}{(u-n)!n!} = \binom{v}{N-n} \binom{u}{n}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^N \binom{v}{N-n} \binom{u}{n} = \binom{u+v}{N},$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Q 22.** Le nombre  $\binom{u+v}{N}$  donne le nombre de parties à  $N$  éléments d'un ensemble  $A$  à  $u+v$  éléments. On note que pour construire une telle partie, on peut d'abord *fixer* une partition de  $A$  en deux sous-ensembles disjoints  $B_1$  et  $B_2$  qui ont respectivement  $u$  et  $v$  éléments. Ensuite, pour construire une partie  $B \subseteq A$  à  $N$  éléments :

- on décreète combien d'éléments de  $B$  sont dans  $B_1$ , et on appelle  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$  cet entier (il y a donc  $N - k$  éléments de  $B$  dans  $B_2$ );
- on choisit  $k$  éléments parmi les  $u$  éléments de  $B_1$  (il y a  $\binom{u}{k}$  façons de les choisir), et  $N - k$  éléments parmi les  $v$  éléments de  $B_2$  (il y a  $\binom{v}{N-k}$  choix possibles).

Par principe multiplicatif, à  $k$  fixé, il y a  $\binom{u}{k} \binom{v}{N-k}$  parties  $B \subseteq A$  à  $N$  éléments, dont  $k$  éléments sont dans  $B_1$ . Par principe additif, il y a donc  $\sum_{k=0}^N \binom{u}{k} \binom{v}{N-k}$  parties  $B \subseteq A$  à  $N$  éléments. Or, comme on l'a rappelé, ce nombre de parties est aussi  $\binom{u+v}{N}$ , d'où l'identité de Vandermonde.

### III.C – Fonction hypergéométrique confluente

**Q 23.** Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  non nul, dont on note  $S$  la somme. Alors  $S$  est de classe  $C^\infty$  et dérivable terme à terme sur  $] - R, R[$ . On a :

$$\forall x \in ] - R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2}.$$

On en déduit que  $S$  vérifie (III.1) sur  $] - R, R[$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \forall x \in ] - R, R[, \quad x S''(x) + (c - x) S'(x) - a S(x) = 0 \\ \iff & \forall x \in ] - R, R[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} c n u_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a u_n x^n = 0 \\ \iff & \forall x \in ] - R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n u_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c(n+1) u_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a u_n x^n = 0 \\ \iff & \forall x \in ] - R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) n u_{n+1} + c(n+1) u_{n+1} - n u_n - a u_n) x^n = 0, \end{aligned}$$

si et seulement si, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ((n+1)n + c(n+1)) u_{n+1} - (n+a) u_n = 0.$$

Cette relation de récurrence se réécrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (c+n)(n+1) u_{n+1} = (a+n) u_n. \tag{7}$$

On reconnaît une relation de récurrence hypergéométrique, associée aux polynômes  $P = X + a$  et  $Q = (X + c)(X + 1)$ .

Déterminons les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant cette relation. Comme  $c \in D$  on a  $n + c \neq 0$  pour tout entier naturel  $n$ , donc la relation (7) peut se réécrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{a+n}{(c+n)(n+1)} u_n. \tag{8}$$

Par récurrence, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (a+k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (c+k) \prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} u_0 = \frac{[a]_n}{[c]_n n!} u_0.$$

Réciproquement, toute suite de cette forme vérifie bien la relation de récurrence (7), c'est immédiat grâce à (3).

Pour s'assurer que cela définit une solution  $x \mapsto u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n}{[c]_n n!} x^n$  de (III.1) qui soit développable en série entière en 0, encore faut-il s'assurer que c'est une série entière de rayon de convergence non nul. Or, si  $a$  est un entier négatif ou nul, alors  $[a]_n = 0$  pour tout  $n \geq 1 - a$  (d'après la question **Q 9**), donc  $x \mapsto u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n}{[c]_n n!} x^n$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini (et dans ce cas cette application est polynomiale). Si  $a \in D$ , alors  $[a]_n \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $n$  au voisinage de l'infini et tout  $x \neq 0$  on a :

$$\left| \frac{\frac{[a]_{n+1}}{[c]_{n+1}(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{[a]_n}{[c]_n n!} x^n} \right| \stackrel{(8)}{=} \frac{a+n}{(c+n)(n+1)} |x| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} |x| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , les quotients des termes successifs tendent vers une limite strictement inférieure à 1, donc d'après la règle de D'Alembert la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{[a]_n}{[c]_n n!} x^n$  converge absolument (et donc  $u_0 \sum_{n \geq 0} \frac{[a]_n}{[c]_n n!} x^n$  aussi). On en déduit que c'est une série entière de rayon de convergence infini dans tous les cas, et comme son terme général vérifie (7) on en déduit que sa somme vérifie (III.1), d'après les équivalences démontrées ci-dessus.

En conclusion, nous avons démontré que toute fonction développable en série entière, et solution de (III.1), est de la forme :

$$x \mapsto u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n}{[c]_n} \frac{x^n}{n!}$$

avec  $u_0 \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des solutions de (III.1) développables en série entière en 0 est donc une droite vectorielle, engendrée par l'application  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n}{[c]_n} \frac{x^n}{n!}$ , que l'énoncé note  $M_{a,c}$ .

### IV - Les polynômes de Laguerre

**Q 24.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On trouve par un calcul sans mystère :

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x + 1, \quad L_2(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 2), \quad L_3(x) = \frac{1}{6} (-x^3 + 9x^2 - 18x + 6).$$

**Q 25.** Posons :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}, g_n(x) = x^n$ . Alors :  $\Phi_n = f \times g_n$ , et d'après la formule de dérivation de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g_n^{(n-k)}(x).$$

Une récurrence triviale montre qu'on a :  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ . Pour les dérivées de  $g_n$ , on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n^{(\ell)}(x) = n(n-1) \cdots (n-\ell+1) x^{n-\ell} = \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell}.$$

Donc, en posant  $\ell = n - k$ , on peut simplifier  $\Phi_n^{(n)}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k.$$

Or :  $\forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \Phi_n^{(n)}(x)$ . On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k,$$

ce qui démontre à la fois que  $L_n$  est polynomiale de degré  $n$ , et que  $L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  si l'on pose :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, c_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!}$ .

**Q 26.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\Phi_n^{(n)}(x) = n!e^{-x}L_n(x)$$

et donc, après dérivation de cette égalité :

$$\Phi_n^{(n+1)}(x) = -n!e^{-x}L_n(x) + n!e^{-x}L'_n(x) = n!e^{-x}(L'_n(x) - L_n(x)).$$

**Q 27.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On remarque qu'on a :  $\Phi_{n+1}(x) = x^{n+1}e^{-x} = x \cdot x^n e^{-x} = x \cdot \Phi_n(x)$ . En utilisant encore la formule de dérivation de Leibniz pour dériver  $n + 1$  fois le membre de droite de cette égalité, on obtient :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \binom{n+1}{0}x\Phi_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}\Phi_n^{(n)}(x) = x\Phi_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\Phi_n^{(n)}(x),$$

parce que les dérivées de  $x \mapsto x$  sont nulles au-delà de l'ordre 2. Or, d'après la question précédente :  $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!e^{-x}L_{n+1}(x)$ ,  $\Phi_n^{(n+1)}(x) = n!e^{-x}(L'_n(x) - L_n(x))$  et  $\Phi_n^{(n)}(x) = n!e^{-x}L_n(x)$ . En injectant ces égalités ci-dessus, et en simplifiant les factorielles et exponentielles, on obtient :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = x(L'_n(x) - L_n(x)) + (n+1)L_n(x) = (n+1-x)L_n(x) + xL'_n(x),$$

d'où le résultat demandé après division par  $n+1 \neq 0$ .

**Q 28.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Notons d'abord qu'on a :

$$\Phi'_{n+1}(x) = -e^{-x}x^{n+1} + (n+1)e^{-x}x^n = -\Phi_{n+1}(x) + (n+1)\Phi_n(x).$$

En dérivant  $n+1$  fois cette égalité, on obtient :

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (\Phi'_{n+1})^{(n+1)}(x) = -\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) + (n+1)\Phi_n^{(n+1)}(x).$$

On peut exprimer ces différentes dérivées à l'aide de  $L_n$  et  $L_{n+1}$ , grâce à la question **Q 26**. On obtient, après simplification des exponentielles :

$$(n+1)!(L'_{n+1}(x) - L_{n+1}(x)) = -(n+1)!L_{n+1}(x) + (n+1)n!(L'_n(x) - L_n(x)).$$

Ou encore :  $L'_{n+1}(x) - L_{n+1}(x) = -L_{n+1} + L'_n(x) - L_n(x)$ , d'où le résultat après simplification.

**Q 29.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En dérivant l'identité de la question **Q 27**, on a :

$$\begin{aligned} L'_{n+1}(x) &= -\frac{1}{n+1}L_n(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L'_n(x) + \frac{1}{n+1}L'_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x) \\ &= -\frac{1}{n+1}L_n(x) + \left(1 + \frac{1-x}{n+1}\right)L'_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x). \end{aligned}$$

Mais on a aussi, d'après la question précédente :  $L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$ . En confrontant ces deux expressions de  $L'_{n+1}(x)$ , on obtient :

$$L'_n(x) - L_n(x) = -\frac{1}{n+1}L_n(x) + \left(1 + \frac{1-x}{n+1}\right)L'_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x).$$

Regroupons les termes en  $L_n(x)$  et  $L'_n(x)$ , et multiplions par  $n+1$  cette équation. On obtient :

$$0 = (n+1-1)L_n(x) + (1-x)L'_n(x) + xL''_n(x),$$

ou encore :  $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$ , ce qu'il fallait démontrer.

**Q 30.** D'après la question précédente,  $L_n$  est solution de (III.1) avec  $a = -n$  et  $c = 1 \in D$ . C'est de plus une application développable en série entière, en tant qu'application polynomiale. Donc, d'après la question **Q 23**, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :  $L_n = \alpha M_{-n,1}$ . On détermine la valeur de  $\alpha$  en comparant leurs valeurs en 0. On a  $M_{-n,1}(0) = 1$ , et d'après la question **Q 25** on a :  $L_n(0) = c_{n,0} = \binom{n}{0} \frac{(-1)^0}{0!} = 1$ . Par conséquent, l'égalité  $L_n = \alpha M_{-n,1}$  donne  $1 = \alpha$  quand on l'évalue en 0.

En conclusion, on a  $L_n = M_{-n,1}$ , ce qui prouve que  $L_n$  est une fonction hypergéométrique confluyente.

## V - Loi hypergéométrique

### V.A – Premiers résultats

**Q 31.** Pour que la définition de l'énoncé soit bien celle d'une loi de probabilité, nous devons vérifier que :

— pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $\mathbb{P}(X = k) \geq 0$  ;

— on a  $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$ .

La première propriété est évidemment vérifiée, car les coefficients binomiaux sont des entiers naturels. Pour la seconde, on utilise l'identité de Vandermonde, démontrée à la question **Q 21** (et dont l'énoncé nous assure qu'elle reste valable pour des entiers naturels moins contraignants), avec  $u = pA$ ,  $v = qA$  et  $N = n$ . On obtient :

$$\sum_{k=0}^n \binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k} = \binom{(p+q)A}{n},$$

et comme  $p + q = 1$  d'après l'hypothèse de l'énoncé, le membre de droite est égal à  $\binom{A}{n}$ . Ainsi, diviser cette égalité par  $\binom{A}{n}$  donne :

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} = 1,$$

c'est-à-dire :  $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$ , ce qu'on voulait démontrer.

On en déduit qu'on a bien défini une loi de probabilité.

**Q 32.** L'espérance de  $X$  existe bien, car c'est une variable aléatoire à support fini. On a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} = \frac{1}{\binom{A}{n}} \sum_{k=1}^n k \binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}.$$

Or, comme le rappelle l'énoncé, on a :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k \binom{pA}{k} = pA \binom{pA-1}{k-1}$ . Donc :

$$E(X) = \frac{pA}{\binom{A}{n}} \sum_{k=1}^n \binom{pA-1}{k-1} \binom{qA}{n-k} \stackrel{[k'=k-1]}{=} \frac{pA}{\binom{A}{n}} \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{pA-1}{k'} \binom{qA}{n-k'-1}.$$

En réutilisant la formule de Vandermonde démontrée dans la question **Q 21**, mais cette fois-ci avec  $u = pA - 1$ ,  $v = qA$  et  $N = n - 1$ , on a :

$$\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{pA-1}{k'} \binom{qA}{n-k'-1} = \binom{A-1}{n-1}.$$

On en déduit :  $E(X) = \frac{pA}{\binom{A}{n}} \cdot \binom{A-1}{n-1}$ . Or, toujours grâce à la formule dans l'énoncé, on a :  $\binom{A}{n} = \frac{A}{n} \binom{A-1}{n-1}$

(du moins, si  $n \neq 0$  ; mais si  $n = 0$ , on n'a aucune peine à montrer que  $E(X) = 0$  directement).

Donc, en conclusion :

$$E(X) = \frac{pA}{\frac{A}{n} \binom{A-1}{n-1}} \cdot \binom{A-1}{n-1} = np.$$

**Q 33.** Il est utile de remarquer que l'égalité  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{qA}{n-k}\binom{pA}{k}}{\binom{A}{n}}$  reste valable si  $k > n$  : les deux membres de cette égalité sont nuls dans ce cas.

Montrons que la suite  $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}}$  est hypergéométrique. On a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 0, pA - 1 \rrbracket, \quad \binom{pA}{k+1} &= \frac{(pA)!}{(pA - (k+1))!(k+1)!} = \frac{(pA)!}{(pA - k)!k!} \times \frac{(pA - k)!k!}{(pA - k - 1)!(k+1)!} \\ &= \binom{pA}{k} \times \frac{pA - k}{k+1}, \end{aligned}$$

ou encore :

$$(k+1) \binom{pA}{k+1} = \binom{pA}{k} (pA - k),$$

cette écriture étant aussi valable si  $k \notin \llbracket 0, pA - 1 \rrbracket$ , y compris si  $k$  est un entier négatif (chaque membre de cette égalité est alors nul), ce qui permet de la réutiliser avec flexibilité ci-dessous.

En effet, en reprenant ce calcul, où l'on remplace  $pA$  par  $qA$ , et  $k$  par  $n - k - 1$ , on trouve :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $(n - k) \binom{qA}{n-k} = \binom{qA}{n-k-1} (qA - (n - k - 1))$ , qu'on réarrange légèrement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (qA - n + k + 1) \binom{qA}{n - (k+1)} = (n - k) \binom{qA}{n - k}.$$

Ainsi, en combinant ces deux égalités, on obtient pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} (k+1)(qA - n + k + 1)\mathbb{P}(X = k+1) &= \frac{(qA - n + k + 1) \binom{qA}{n-(k+1)} (k+1) \binom{pA}{k+1}}{\binom{A}{n}} \\ &= (n - k)(pA - k) \frac{\binom{qA}{n-k} \binom{pA}{k}}{\binom{A}{n}} \\ &= (n - k)(pA - k)\mathbb{P}(X = k), \end{aligned}$$

donc la suite  $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie (I.1) avec  $P = (X - n)(X - pA)$  et  $Q = (X + 1)(X + qA - n + 1)$ . En particulier, elle vérifie la relation de récurrence de la question **Q 14**, avec :  $a = -pA$ ,  $b = -n$ ,  $c = qA - n + 1$ , donc d'après cette même question (et celle qui précède) on en déduit d'une part :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{[-pA]_k [-n]_k}{[qA - n + 1]_k k!} \mathbb{P}(X = 0) = \frac{[-pA]_k [-n]_k}{[qA - n + 1]_k k!} \frac{\binom{qA}{n}}{\binom{A}{n}}$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  si  $qA - n + 1 \in D$  (autrement, l'égalité n'est valable que pour les entiers  $k$  inférieurs ou égaux à  $-(qA - n + 1)$ ), et d'autre part, si l'on note  $G_X$  la fonction génératrice de  $X$  :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) t^k = \frac{\binom{qA}{n}}{\binom{A}{n}} F_{-pA, -n, qA - n + 1}(t).$$

### V.B – Modélisation

**Q 34.** La variable aléatoire  $Z$  compte le nombre de succès (obtenir une boule blanche) dans une succession de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $\frac{pA}{A} = p$  (puisque les tirages sont équiprobables et avec remise). On en déduit que  $Z$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . On sait que dans ce cas, on a :

$$E(Z) = np, \quad V(Z) = np(1 - p).$$

**Q 35.** Tout d'abord, il est clair que  $Y(\Omega) \subseteq \llbracket 0, pA \rrbracket$  (ou  $\llbracket 0, qA \rrbracket$ , ou  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ). Ensuite, comme les tirages sont équiprobables, on a :

$$\forall k \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\text{card}(Y = k)}{\text{card}(\Omega)}.$$

L'univers est l'ensemble des parties à  $n$  éléments de  $\llbracket 1, A \rrbracket$  (chaque partie correspondant à une façon de tirer  $n$  boules dans l'urne qui contient  $A$  boules), donc  $\text{card}(\Omega) = \binom{A}{n}$ . Pour expliciter le numérateur, on note que  $(Y = k)$  se réalise si et seulement si, dans ce  $n$  tirage de  $n$  boules, on obtient  $k$  boules blanches et  $n - k$  boules noires. En reprenant le raisonnement combinatoire de la question **Q 22** (avec  $A$  l'ensemble des boules dans l'urne,  $B_1$  l'ensemble des boules blanches et  $B_2$  l'ensemble des boules noires), on en déduit :  $\forall k \in Y(\Omega)$ ,  $\text{card}(Y = k) = \binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}$ . Ainsi on trouve bien :

$$\forall k \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}},$$

c'est-à-dire :  $Y \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$ .

### V.C – Calcul de la variance

**Q 36.** On a immédiatement :  $Y = \sum_{i=1}^{pA} Y_i$ . Par linéarité de l'espérance, on a donc :  $E(Y) = \sum_{i=1}^{pA} E(Y_i)$ . Or les  $Y_i$  suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{n}{A}$  ; en effet, si  $i \in \llbracket 1, pA \rrbracket$  alors on a évidemment  $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$ , et on note que pour réaliser  $(Y_i = 0)$  il faut et il suffit de tirer  $n$  boules parmi les  $A - 1$  différentes de la numéro  $i$  : il y a  $\binom{A-1}{n}$  façons d'avoir un tel résultat de tirage. Les tirages étant équiprobables :

$$\mathbb{P}(Y_i = 0) = \frac{\binom{A-1}{n}}{\binom{A}{n}} = \frac{\binom{A}{n} - \binom{A-1}{n-1}}{\binom{A}{n}} = 1 - \frac{\binom{A-1}{n-1}}{\binom{A}{n}} = 1 - \frac{n}{A},$$

d'après la formule de Pascal :  $\binom{A}{n} = \binom{A-1}{n-1} + \binom{A-1}{n}$ , et la formule :  $n \binom{A}{n} = A \binom{A-1}{n-1}$ , déjà évoquée dans la question **Q 32**. Alors :  $\mathbb{P}(Y_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_i = 0) = \frac{n}{A}$ . On connaît l'espérance d'une variable suivant une loi de Bernoulli, et on en déduit :  $\forall i \in \llbracket 1, pA \rrbracket$ ,  $E(Y_i) = \frac{n}{A}$ . Ensuite :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{pA} \frac{n}{A} = \frac{n}{A} \sum_{i=1}^{pA} 1 = \frac{n}{A} \times pA = np.$$

On remarque qu'on a :  $E(Y) = E(Z)$ .

**Q 37.** Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $0 \leq i < j \leq pA$ . La variable aléatoire  $Y_i Y_j$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , donc elle suit une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre en calculant  $\mathbb{P}(Y_i Y_j = 1)$ . L'évènement  $(Y_i Y_j = 1)$  se réalise si et seulement si  $Y_i = 1$  et  $Y_j = 1$ , si et seulement si les boules numérotées  $i$  et  $j$  sont toutes les deux parmi les  $n$  boules tirées. Il y a  $\binom{2}{2} \binom{A-2}{n-2} = \binom{A-2}{n-2}$  tels tirages (le coefficient binomial  $\binom{A-2}{n-2}$  correspond au nombre de façons possibles de choisir les  $n - 2$  autres boules). Les tirages étant équiprobables :

$$\mathbb{P}(Y_i Y_j = 1) = \frac{\binom{A-2}{n-2}}{\binom{A}{n}}.$$

Or, en réitérant une formule déjà invoquée dans la question précédente :

$$\binom{A}{n} = \frac{A(A-1)}{n(n-1)} \binom{A-2}{n-2},$$

donc :

$$\mathbb{P}(Y_i Y_j = 1) = \frac{n(n-1)}{A(A-1)}.$$

*A priori* la formule ci-dessus nécessite de considérer  $n \geq 2$ ; mais si  $n < 2$ , alors on tire strictement moins de deux boules, et donc l'évènement  $(Y_i Y_j = 1) = (Y_i = 1, Y_j = 1)$  est impossible, de sorte que :  $\mathbb{P}(Y_i Y_j = 1) = 0$ . Or le membre de droite de l'égalité obtenue est aussi nul pour  $n < 2$ , donc l'égalité est en vérité valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . *A priori* on a également un problème si  $A = 0$  ou  $A = 1$ , mais dans ce cas il n'existe pas  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $1 \leq i < j \leq A$ , donc cette question ne se pose même pas.

En résumé, nous avons démontré que  $Y_i Y_j$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{n(n-1)}{A(A-1)}$ .

**Q 38.** Comme  $Y = \sum_{i=1}^{pA} Y_i$ , on a :

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{pA} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{pA} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq pA} \text{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Comme les  $Y_i$  suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{n}{A}$ , on a :  $\forall i \in \llbracket 1, pA \rrbracket, V(Y_i) = \frac{n}{A} \left(1 - \frac{n}{A}\right)$ . Par conséquent :

$$V(Y) = \frac{n}{A} \left(1 - \frac{n}{A}\right) \times pA + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq pA} \text{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  tel que :  $1 \leq i < j \leq pA$ . On sait qu'on a, d'après la relation de Huygens :

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j).$$

Comme on l'a vu précédemment :  $E(Y_i) = E(Y_j) = \frac{n}{A}$ . Comme  $Y_i Y_j$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{n(n-1)}{A(A-1)}$ , on a de même :  $E(Y_i Y_j) = \frac{n(n-1)}{A(A-1)}$ . Donc :

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \frac{n(n-1)}{A(A-1)} - \left(\frac{n}{A}\right)^2 = \frac{n}{A} \left(\frac{n-1}{A-1} - \frac{n}{A}\right).$$

Nous pouvons conclure en calculant la variance de  $Y$  :

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{n}{A} \left(1 - \frac{n}{A}\right) pA + 2 \frac{n}{A} \left(\frac{n-1}{A-1} - \frac{n}{A}\right) \sum_{1 \leq i < j \leq pA} 1 \\ &= \frac{n}{A} \left[ \left(1 - \frac{n}{A}\right) pA + \left(\frac{n-1}{A-1} - \frac{n}{A}\right) pA(pA-1) \right]. \end{aligned}$$

Pour calculer  $\sum_{1 \leq i < j \leq pA} 1$ , je note qu'il y a  $\binom{pA}{2} = \frac{pA(pA-1)}{2}$  façons de choisir  $i$  et  $j$  vérifiant  $1 \leq i < j \leq pA$  (c'est le choix de deux éléments distincts parmi  $pA$ ).

On simplifie cette expression, pour obtenir :

$$\begin{aligned} V(Y) &= np \left[ \left(1 - \frac{n}{A}\right) + \left(\frac{n-1}{A-1} - \frac{n}{A}\right) (pA-1) \right] \\ &= np \left[ \frac{A-n}{A} + ((n-1)A - n(A-1)) \frac{pA-1}{A(A-1)} \right] \\ &= \frac{np}{A} \left[ (A-n) + (n-A) \frac{pA-1}{A-1} \right] \\ &= np \frac{A-n}{A} \left[ 1 - \frac{pA-1}{A-1} \right] = np \frac{A-n}{A} \frac{A-1 - (pA-1)}{A-1}. \end{aligned}$$

Or :  $A - 1 - (pA - 1) = A(1 - p)$ . On arrive au terme des calculs :

$$V(Y) = np \frac{A - n}{A} \times \frac{A(1 - p)}{A - 1},$$

c'est-à-dire :

$$V(Y) = np(1 - p) \cdot \frac{A - n}{A - 1}.$$

On remarque qu'on a :  $V(Y) = V(Z) \cdot \frac{A-n}{A-1}$ . Par anticipation sur la dernière question du sujet, on observe aussi que quand  $A \rightarrow +\infty$ , on a  $\frac{A-n}{A-1} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$ , donc la variance de  $Y$  tend vers la variance de  $Z$ .

**V.D – Résultats asymptotiques**

**Q 39.** Rappelons qu'on a :  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} &= \frac{(pA)!}{(pA - k)!k!} \frac{(qA)!}{(qA - (n - k))!(n - k)!} \frac{n!(A - n)!}{A!} \\ &= \frac{n!}{(n - k)!k!} \cdot \frac{(pA)!}{(pA - k)!} \cdot \frac{(qA)!}{(qA - (n - k))!} \frac{(A - n)!}{A!}. \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{(pA)!}{(pA - k)!} = pA(pA - 1) \times \dots \times (pA - (k - 1)) \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} (pA)^k.$$

De même :  $\frac{(qA)!}{(qA - (n - k))!} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} (qA)^{n-k}$ , et :  $\frac{(A - n)!}{A!} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{A^n}$ . Donc :

$$\mathbb{P}(X = k) \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{(n - k)!k!} (pA)^k (qA)^{n-k} \frac{1}{A^n} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Or :  $q = 1 - p$ . On en déduit :  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .

**Q 40.** La question précédente nous fait démontrer que la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  est une approximation de la loi hypergéométrique de paramètres  $n$ ,  $p$  et  $A$  lorsque  $A \rightarrow +\infty$ . On a par ailleurs :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \lim_{A \rightarrow +\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(Z = k) = E(Z)$$

(en vérité, pour l'espérance, un passage à la limite n'est pas nécessaire, nous l'avons vu : on a  $E(X) = E(Z)$  si  $X \leftrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$ ). Par un calcul analogue, quand  $A \rightarrow +\infty$  la variance d'une variable aléatoire suivant une loi hypergéométrique de paramètres  $n$ ,  $p$  et  $A$  tend vers la variance de  $Z$ , c'est-à-dire  $np(1 - p)$ . C'est en adéquation avec ce que nous avons constaté dans la question **Q 38**.