

Banque PT 2006 — épreuve B

Partie I

Question I.1

On reconnaît la définition bifocale d'une ellipse de foyers F et F' . Comme l'axe $(x'x)$ est l'axe focal et que le milieu de F et F' est en O , on a la chance d'être dans le repère habituel de travail, où l'équation de l'ellipse est réduite, sous la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec ici $2a = 6$ et $2c = FF' = 2\sqrt{5}$. Alors $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2$.
L'excentricité de l'ellipse est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

Question I.2

L'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Question I.3

Au point $M(t)$, on a $\vec{M}'(t) = (-3\sin t, 2\cos t)$ donc $\frac{ds}{dt} = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{4 + 5\sin^2 t}$ et $\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{4 + 5\sin^2 t}}(-3\sin t, 2\cos t)$, donc $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{4 + 5\sin^2 t}}(-2\cos t, -3\sin t)$.
Alors $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} / \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{(4 + 5\sin^2 t)^2}(12\cos t, 18\sin t) = \gamma\vec{N}$ donc $\gamma = \frac{6}{(4 + 5\sin^2 t)^{3/2}}$ et $R = \frac{(4 + 5\sin^2 t)^{3/2}}{6}$.

Question I.4

Alors le centre de courbure a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_I = 3\cos t - \cos t \frac{4 + 5\sin^2 t}{3} = \frac{5\cos t}{3}(1 - \sin^2 t) = \frac{5}{3}\cos^3 t \\ y_I = 2\sin t - \sin t \frac{4 + 5\sin^2 t}{2} = -\frac{5}{2}\sin^3 t \end{cases}$$

Question I.5

Γ est le lieu du centre de courbure : c'est la développée de l'ellipse $\mathcal{E}$.

Quand t décrit $[0, \pi/2]$, $x_I(t)$ décroît de $5/3$ à 0 et $y_I(t)$ décroît de 0 à $-5/2$.

On observe qu'au voisinage de $t = 0$, on dispose de $\begin{cases} x_I = \frac{5}{3} - \frac{5}{2}t^2 + o(t^3) \\ y_I = -\frac{5}{2}t^3 + o(t^3) \end{cases}$ de sorte qu'au point $(-5/3, 0)$,

la courbe Γ' présente une tangente horizontale de rebroussement de première espèce.

De même, au voisinage de $t = \pi/2$, posant $t = \pi/2 - h$, on dispose de $\begin{cases} x_I = \frac{5}{3}h^3 + o(h^3) \\ y_I = -\frac{5}{2} + \frac{15}{4}h^2 + o(h^3) \end{cases}$ de sorte

qu'au point $(0, -5/2)$, la courbe Γ' présente une tangente verticale de rebroussement de première espèce.

Question I.6

On observe que $x_I(-t) = x_I(t)$ et $y_I(-t) = -y_I(t)$, donc que $I(-t)$ est le symétrique de $I(t)$ par rapport à l'axe $(x'x)$. Ainsi, en ajoutant à Γ' la courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on obtient une courbe Γ'' qui correspond à la partie de Γ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

De même $x_I(\pi + t) = -x_I(t)$ et $y_I(\pi + t) = -y_I(t)$, donc $I(\pi + t)$ est le symétrique de $I(t)$ par rapport à l'origine. Ainsi, en ajoutant à Γ'' la courbe symétrique par rapport à l'origine, on obtient la courbe Γ tout entière, puisqu'il suffit évidemment de faire varier le paramètre t dans $[-\pi/2, 3\pi/2]$.

La figure 1, page 2, présente Γ' en trait épais, Γ en trait fin et l'ellipse $\mathcal{E}$ en trait tireté.

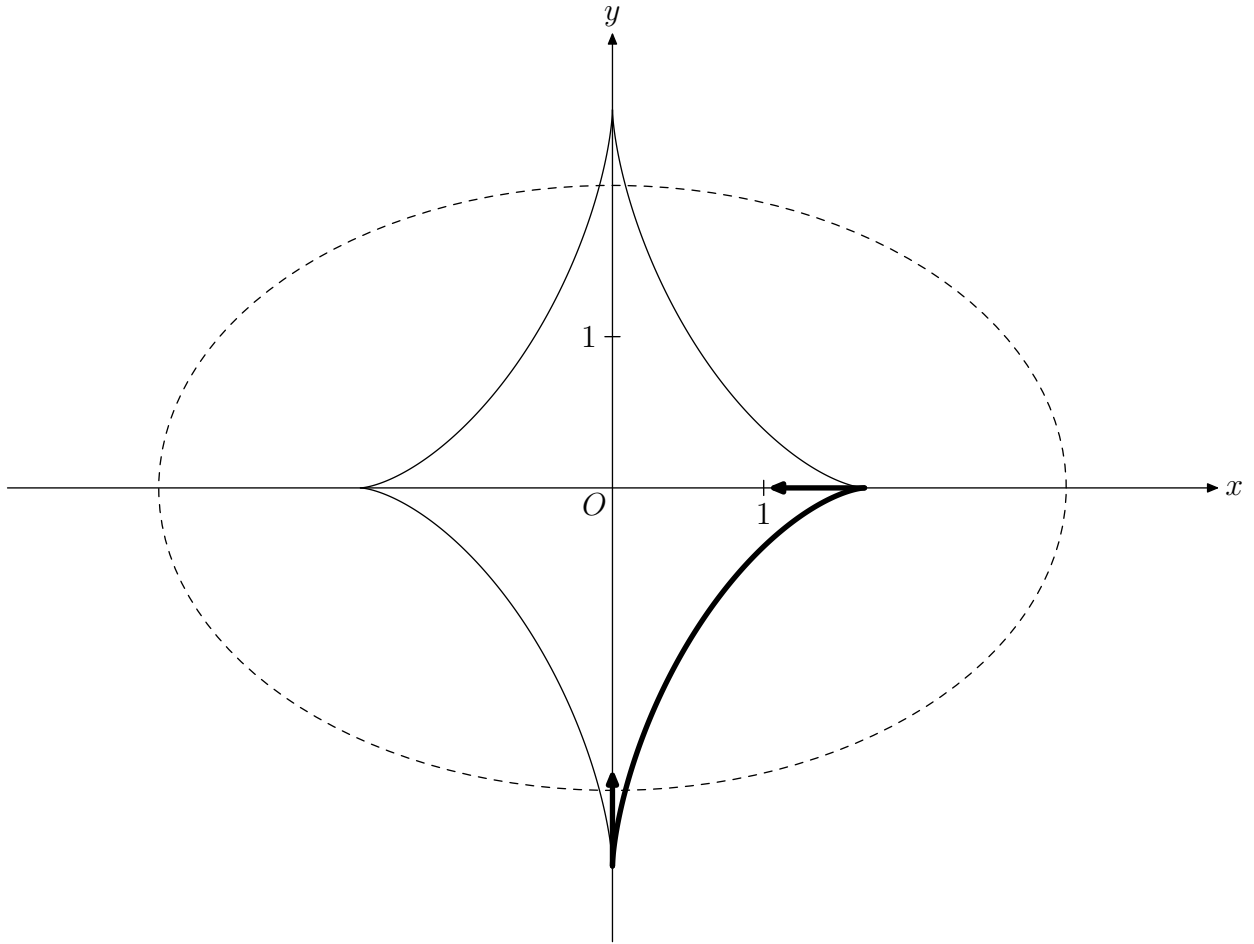


Figure 1 la courbe Γ et l'ellipse $\mathcal{E}$

Question I.7

On calcule le quart de l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide de la formule de Green-Riemann, en intégrant par exemple $-x_I dy_I$ sur $[0, \pi/2]$.

$$\mathcal{A} = -4 \int_0^{\pi/2} \frac{5}{3} \cos^3 t \left(-\frac{15}{2} \sin^2 t \cos t \right) dt = 50 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^4 t dt.$$

Pour calculer cette intégrale, on linéarise $\sin^2 t \cos^4 t = -\frac{\cos 6t}{36} - \frac{\cos 4t}{16} + \frac{\cos 2t}{32} + \frac{1}{16}$.

Finalement, $\mathcal{A} = \frac{25\pi}{16}$.

Question I.8

De même, la longueur de l'arc Γ est égale à quatre fois celle de Γ' : $\ell(\Gamma) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x_I'^2(t) + y_I'^2(t)} dt$.

Or $x_I'^2(t) + y_I'^2(t) = \frac{25}{4} \sin^2 t \cos^2 t (4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t)$, et $\sqrt{x_I'^2(t) + y_I'^2(t)} = \frac{5}{2} \sin t \cos t \sqrt{4 + 5 \sin^2 t}$.

Le changement de variable $u = \sin^2 t$ (donc $du = 2 \sin t \cos t dt$) conduit à :

$$\ell(\Gamma) = 5 \int_0^1 \sqrt{4 + 5u} du = 5 \left[\frac{2}{15} (4 + 5u) \sqrt{4 + 5u} \right]_0^1 = \frac{38}{3}.$$

Partie II

Question II.1

Quand θ décrit $[0, \pi/4]$, $\cos 2\theta$ décroît de 1 à 0, donc $\rho(\theta)$ décroît de $\sqrt{2}$ à 0.

ρ atteint un maximum pour $\theta = 0$: la tangente à $\mathcal{C}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$, donc verticale.

À l'origine, la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{u}(\pi/4)$ donc par la première bissectrice des axes.

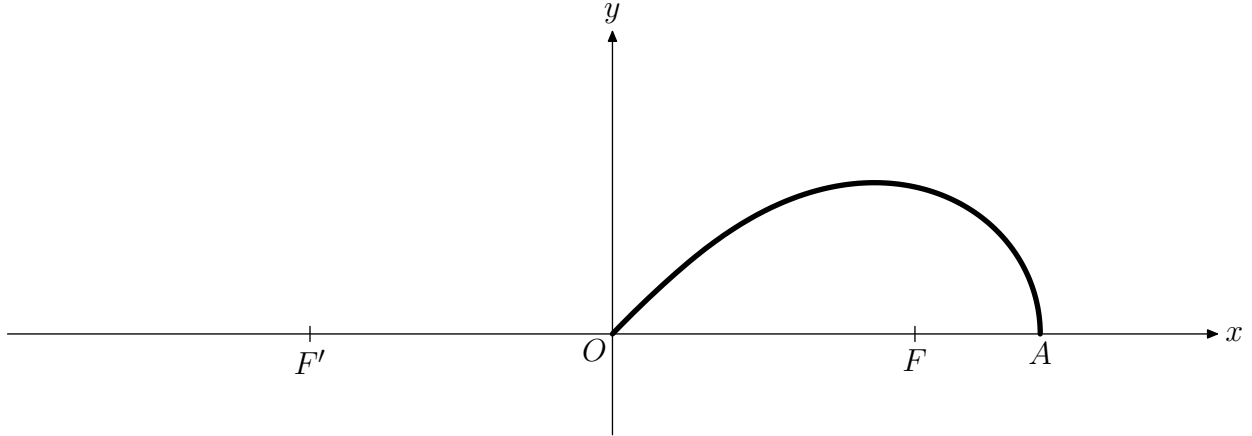


Figure 2 la courbe $\mathcal{C}$

Question II.2

Soit $M(x, y)$ un point de la courbe $\mathcal{C}$, $MF^2 = (x-1)^2 + y^2 = x^2 + 1 + y^2 - 2x = \rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta$ et $MF'^2 = (x+1)^2 + y^2 = x^2 + 1 + y^2 + 2x = \rho^2 + 1 + 2\rho \cos \theta$, donc

$$\begin{aligned} MF^2 \cdot MF'^2 &= (\rho^2 + 1)^2 - 4\rho^2 \cos^2 \theta = (1 + 2 \cos 2\theta)^2 - 8 \cos 2\theta \cos^2 \theta \\ &= (1 + 4 \cos^2 \theta - 2)^2 - 8(2 \cos^2 \theta - 1) \cos^2 \theta = 16 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1 - 16 \cos^4 \theta + 8 \cos^2 \theta = 1. \end{aligned}$$

Cela montre bien que $MF \cdot MF' = 1$.

Question II.3

On trouve $x'(\theta) = \frac{2\sqrt{2} \sin \theta \cos^2 \theta (3 - 4 \cos^2 \theta)}{3 \cos 2\theta \sqrt{\cos 2\theta}}$ et $y'(\theta) = \frac{2\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta (1 - 4 \cos^2 \theta)}{3 \cos 2\theta \sqrt{\cos 2\theta}}$.

On en déduit les variations des fonctions x et y sur $[0, \pi/4[$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
x'	0	-	0
y'	0	-	-
x	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$

Au voisinage de 0, on trouve $\begin{cases} x(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\theta^2 + o(\theta^3) \\ y(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\theta^3 + o(\theta^3) \end{cases}$ ce qui indique une tangente horizontale au point $B(2\sqrt{2}/3, 0)$.

Au voisinage de $\pi/4$, on pose $\theta = \frac{\pi}{4} - h$ d'où $x(\theta) = \frac{2\sqrt{2} \cos^3(\pi/4 - h)}{3 \sqrt{\sin 2h}}$ et $y(\theta) = -\frac{2\sqrt{2} \sin^3(\pi/4 - h)}{3 \sqrt{\sin 2h}}$.

Ainsi $x(\theta) \sim \frac{1}{3\sqrt{2h}}$ et $y(\theta) \sim -\frac{1}{3\sqrt{2h}}$.

On évalue donc $x(\theta) + y(\theta) = \frac{2\sqrt{2} \cos^3(\pi/4 - h) - \sin^3(\pi/4 - h)}{3 \sqrt{\sin 2h}}$.

Or

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta - \sin^3 \theta &= (\cos \theta - \sin \theta)(\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) \\ &\sim \frac{3}{2}(\cos(\pi/4 - h) - \sin(\pi/4 - h)) = \frac{3}{2}(\sin(\pi/4 + h) - \sin(\pi/4 - h)) \\ &\sim \frac{3}{2} 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin h = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin h \sim \frac{3h}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

donc, finalement, $x(\theta) + y(\theta) \sim \sqrt{2h}$ et la droite d'équation $x + y = 0$ (c'est-à-dire la deuxième bissectrice des axes) est asymptote à la courbe C' .

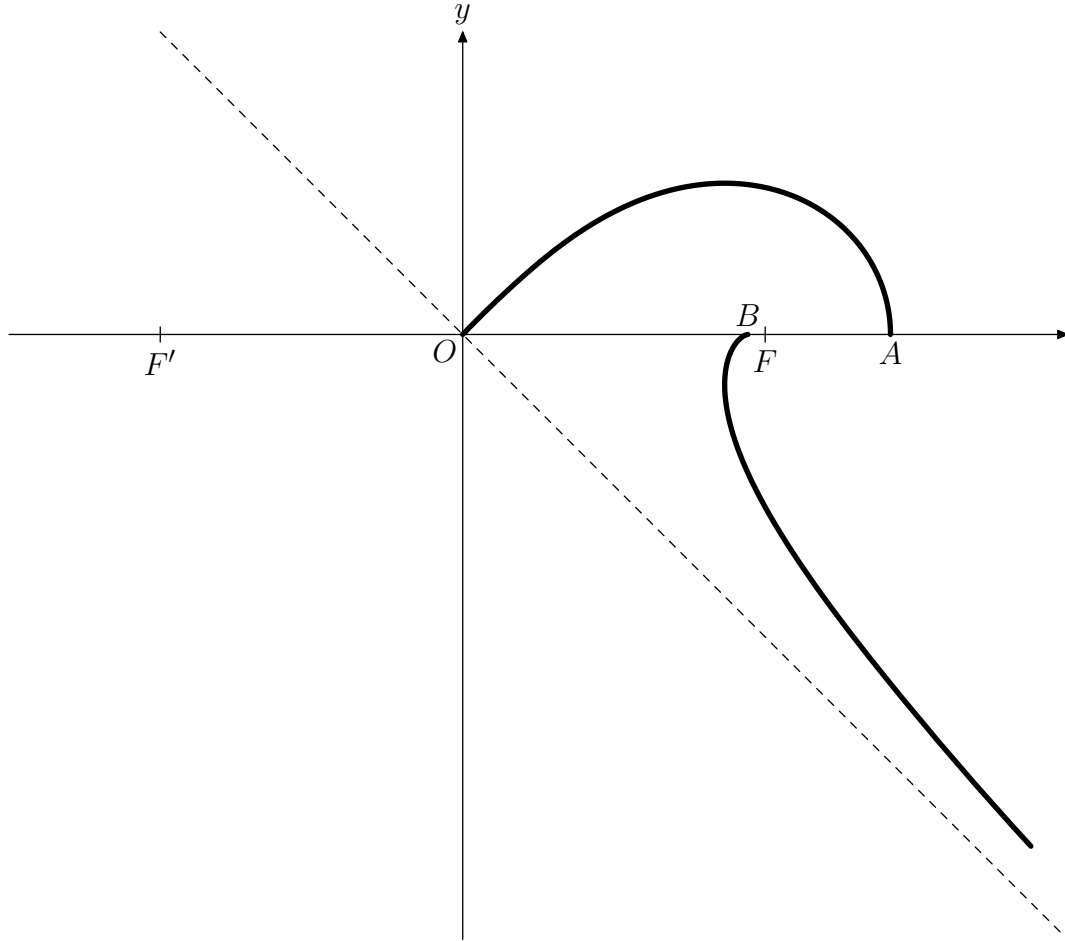


Figure 3 les courbes C et C'

Question II.4

L'aire demandée vaut

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/4} \frac{\rho^2(\theta)}{2} d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

C'est-à-dire que $\mathcal{A}$ vaut une demi unité d'aire, soit 8 cm^2 , puisqu'on a choisi une unité de 4 cm sur chaque axe.

On pourrait montrer que C' n'est autre que la développée de C . En outre C est le quart de la lemniscate de Bernoulli, qui n'est elle-même autre que Γ_1 .

Partie III

Question III.1

Soit $M(x, y)$, on a $MF^2 = (x-1)^2 + y^2$ et $MF'^2 = (x+1)^2 + y^2$, de sorte que $(MF.MF')^2 = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$ et qu'une équation de Γ_k est $(x^2 + y^2 + 1)^2 = 4x^2 + k^2$.

Question III.2

Si on se restreint à l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation $(x-1)^2(x+1)^2 = k^2$ ou encore $x^2 - 1 = \pm k$, ce qui fournit 4 points solutions si $0 < k < 1$, d'abscisses $\pm\sqrt{1 \pm k}$; 3 points si $k = 1$, d'abscisses 0 et $\pm\sqrt{2}$; et 2 points si $k > 1$, d'abscisses $\pm\sqrt{1+k}$.

Question III.3

III.3.a On a $\overrightarrow{OF'} = -\overrightarrow{OF}$, donc $MF^2 + MF'^2 = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OF})^2 + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OF})^2 = 2(OM^2 + OF^2) = 2OM^2 + OF^2 + OF'^2$.

III.3.b On vérifie que $(MF - MF')^2 + 2MF.MF' = MF^2 - 2MF.MF' + MF'^2 + 2MF.MF' = MF^2 + MF'^2$.

III.3.c On en déduit que $2OM^2 + 2 = MF^2 + MF'^2 \geq 2MF.MF'$, et, en particulier, si M est sur la courbe Γ_k , que $2OM^2 + 2 \geq 2k$ donc $OM^2 \geq k - 1$, ce qui n'est pas demandé !

Mais, dans un triangle ABC , on sait que $|AB - AC| \leq BC$, et donc ici on peut affirmer que $|MF - MF'| \leq FF' = 2$. Ainsi $2OM^2 + 2 \leq 2^2 + 2k$ donc $OM^2 \leq k + 1$. On a montré en conclusion que tout point M de Γ_k vérifie $k - 1 \leq OM^2 \leq k + 1$.

Question III.4

En partant directement de la définition $MF.MF' = k$, on vérifie que chacun des axes de coordonnées est axe de symétrie de Γ_k , donc l'origine du repère également.

Question III.5

C_k est le quart de Γ_k .

Son équation peut être réécrite $x^2 + y^2 + 1 = \sqrt{4x^2 + k^2}$ ou encore $y^2 = \sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1)$, et comme $y \geq 0$, $y = \varphi_k(x)$ où on a posé $\varphi_k(x) = \sqrt{\sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1)}$.

Question III.6

Remarquons que f_k n'est autre que φ_k .

III.6.a Le domaine D_k est l'ensemble des réels x positifs tels que $4x^2 + k^2 \geq (x^2 + 1)^2$, ce qui se réécrit $x^4 - 2x^2 + 1 \leq k^2$ ou encore $(x^2 - 1)^2 \leq k^2$. Cette inéquation équivaut à $-k \leq x^2 - 1 \leq k$.

Finalement $D_k = \begin{cases} [\sqrt{1-k}, \sqrt{1+k}], & \text{si } k \leq 1 ; \\ [0, \sqrt{1+k}], & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$

III.6.b On obtient $f'_k(x) = \frac{x(2 - \sqrt{4x^2 + k^2})}{f_k(x) \sqrt{4x^2 + k^2}}$.

Aux bornes de D_k , on a $\sqrt{4x^2 + k^2} = x^2 + 1$ donc $2 - \sqrt{4x^2 + k^2} = 1 - x^2$.

▷ Si $k > 1$, $D_k = [0, \sqrt{1+k}]$. $f'_k(0) = 0$ mais, quand $x \rightarrow \sqrt{1+k}$, $f'_k(x) \rightarrow -\infty$.

▷ Si $k = 1$, $D_k = [0, \sqrt{2}]$. Au voisinage de 0, $f'_k(x) \sim \frac{x}{f_k(x)} \sim \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$. Au voisinage de $\sqrt{2}$, $f'_k(x)$ tend vers $-\infty$.

▷ Si $k < 1$, f'_k n'est pas définie aux bornes de D_k : elle tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow \sqrt{1-k}$, et vers $-\infty$ quand $x \rightarrow \sqrt{1+k}$.

III.6.c $f'_k(x)$ a le signe de $g_k(x) = 2 - \sqrt{4x^2 + k^2}$. On en déduit l'étude suivante :

▷ Si $k > 1$, sur $D_k = [0, \sqrt{1+k}]$, on a $k^2 \leq 4x^2 + k^2 \leq (k+2)^2$ donc $-k \leq g_k(x) \leq 2 - k$.

– si $k \geq 2$, $g_k(x)$ reste négatif, et donc $f'_k(x)$ aussi.

– si $1 < k < 2$, $g_k(x)$, donc $f'_k(x)$, s'annule en $\alpha_k = \sqrt{1 - k^2/4}$, est négatif sur $[0, \alpha_k]$ puis positif sur $[\alpha_k, \sqrt{1+k}]$.

▷ Si $k = 1$, $g_1(x)$ donc $f'_1(x)$ s'annule en $\alpha_1 = \sqrt{3}/2$, est négatif sur $[0, \alpha_1]$ et positif sur $[\alpha_1, \sqrt{2}]$.

▷ Si $0 < k < 1$, sur $D_k = [\sqrt{1-k}, \sqrt{1+k}]$, $g_k(x)$ varie dans $[-k, k]$. $g_k(x)$ donc $f'_k(x)$ s'annule en $\alpha_k = \sqrt{1 - k^2/4}$, est négatif sur $[0, \alpha_k]$ puis positif sur $[\alpha_k, \sqrt{1+k}]$.

III.6.d On va distinguer différents cas.

Pour $k \geq 2$.

x	0	α_k	$\sqrt{1+k}$
$f'_k(x)$	0	-	$-\infty$
$f_k(x)$	$\sqrt{k-1}$	$\searrow$	0

Pour $1 < k < 2$.

x	0	α_k	$\sqrt{1+k}$
$f'_k(x)$	0	+	0 - $-\infty$
$f_k(x)$	$\sqrt{k-1}$	$\nearrow k/2 \searrow$	0

Pour $k = 1$.

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$
$f'_k(x)$	1	+	0 - $-\infty$
$f_k(x)$	0	$\nearrow 1/2 \searrow$	0

Pour $0 < k < 1$.

x	$\sqrt{1-k}$	α_k	$\sqrt{1+k}$
$f'_k(x)$	$+\infty$	+	0 - $-\infty$
$f_k(x)$	0	$\nearrow k/2 \searrow$	0

Question III.7

Remarque : $\Gamma_{1/2}$ est en deux morceaux...

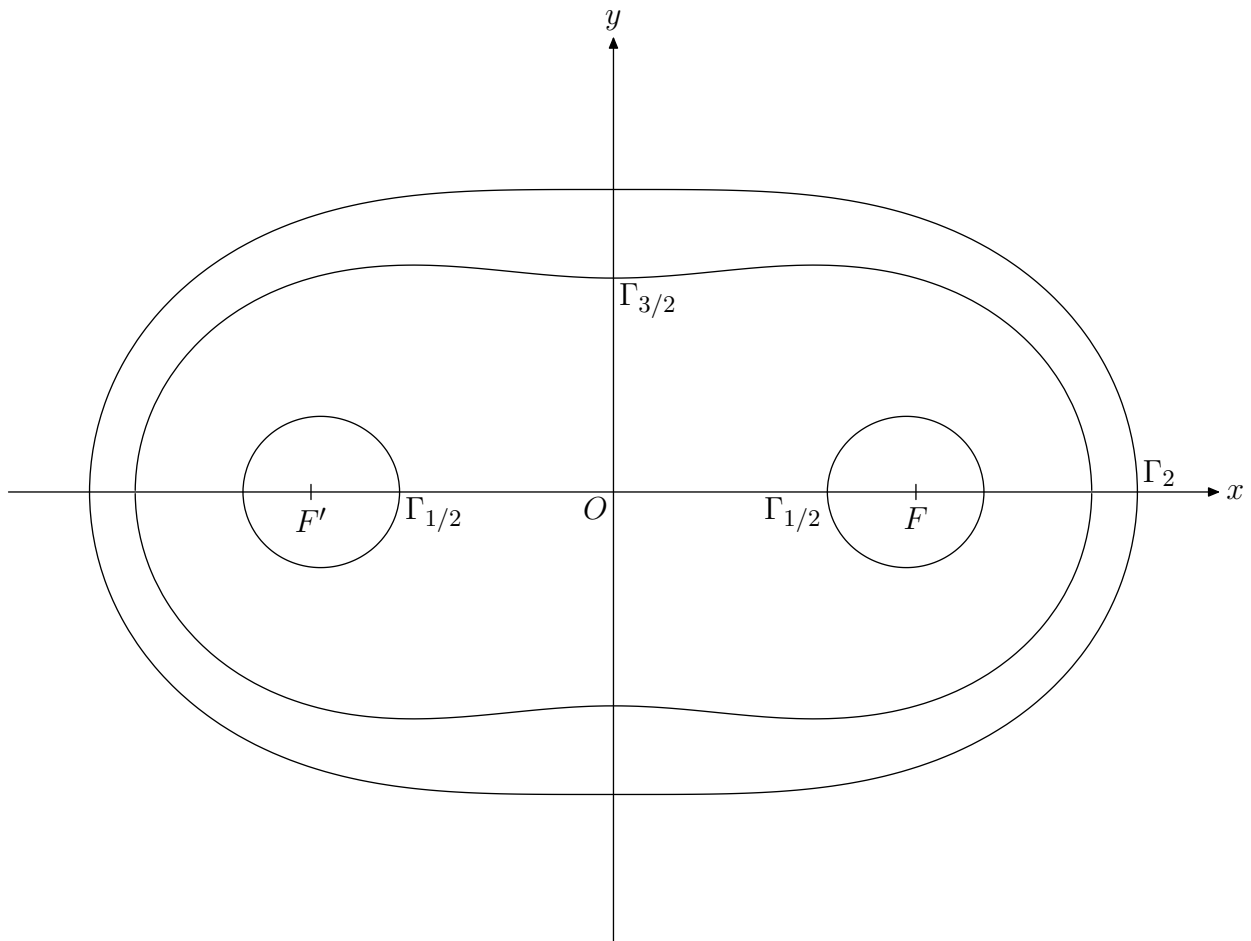


Figure 4 quelques courbes Γ_k