ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFATURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1983

****

MATHEMATIQUES II

(2 pages dactylographiées)

M

N.B.1. Le candidat pourra résoudre la seconde partie avant la première, à condition d'admettre les résultats fournis par l'énoncé de celle-ci.

N.B.2. On fera des conventions telles que toutes les courbures qui interviennent soient positives.

Dans tout le problème, on se donne un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3, un point fixe O de $\mathcal{E}$ et, à partir de la seconde partie, un repère orthonormal direct fixe $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ de $\mathcal{E}$.

<u>Questions préliminaires</u>

Soit φ une application continûment dérivable d'un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in I \qquad \varphi(x)\,(1-\varphi'(x)) = 0.$$

P.1. Montrer que si en un point x_0 de I on a $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi'(x_0) \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap\,]x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon[\qquad \varphi'(x) = 1.$$

P.2. En déduire que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

- ou bien φ est l'application nulle de I dans $\mathbb{R}$;
- ou bien il existe un réel λ tel que :

$$\forall x \in I \qquad \varphi(x) = x + \lambda$$

PREMIERE PARTIE

On appelle "arc Γ" tout arc orienté de $\mathcal{E}$ admettant un paramétrage par l'abscisse curviligne, $s \longmapsto M(s)$, qui soit une application indéfiniment dérivable d'un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}$ tel que $\left\|\frac{d\vec{M}}{ds}\right\|$ garde la valeur constante 1 et que $\frac{d^2\vec{M}}{ds^2}$ ne prenne pas la valeur 0.

On sait que, dans ces conditions, on peut définir sur I les applications repère de Frenet $(M\ ;\ \vec{T},\ \vec{N},\ \vec{B})$, courbure c et torsion γ de Γ, et que c ne prend pas la valeur 0.

1.1. Pour tout arc Γ, montrer l'équivalence des propriétés :

i) La distance de O à la tangente en M à Γ est une constante strictement positive ;

ii) L'application $\|\overrightarrow{OM}\|^2 - (\overrightarrow{OM}.\ \vec{T})^2$ est une constante strictement positive.

Montrer que si un arc Γ possède la propriété i), alors :

- ou bien l'application $\overrightarrow{OM}.\ \vec{T}$ est nulle (ce que l'on interprètera) ;
- ou bien l'application $\overrightarrow{OM}.\ \vec{N}$ est nulle.

1.2. On considère un arc Γ possédant la propriété :

iii) L'application $\overrightarrow{OM}.\ \vec{N}$ est nulle.

Montrer que Γ possède les propriétés i) et ii).

Soit a la distance constante de O aux tangentes à Γ. Montrer que, moyennant éventuellement un changement de l'orientation de Γ et/ou l'addition d'une constante à l'abscisse curviligne, on a (les égalités d'applications de I dans $\mathbb{R}$) :

$$\overrightarrow{OM}.\ \vec{B} = a\ ;\quad \overrightarrow{OM}.\ \vec{T} = s;\quad sc + a\gamma = 0 \qquad (*)$$

(la troisième valant avec la convention $\frac{d\vec{B}}{ds} = \gamma\,\vec{N}$, et devant être remplacée par $sc - a\gamma = 0$ si le candidat adopte $\frac{d\vec{B}}{ds} = -\gamma\vec{N}$, ce qu'il devra alors mentionner sur sa copie).

1.3. On considère un arc Γ possédant la propriété iii), et l'on suppose que l'orientation et l'abscisse curviligne s ont été choisies de façon que les formules (*) soient valables.

On note H (s) la projection orthogonale de O sur la tangente à Γ en M(s), et C l'arc paramétré par $s \longmapsto H(s)$, que l'on oriente de façon que l'abscisse curviligne s_1 de H soit une fonction croissante de s.

1.3.1. Vérifier : $\overrightarrow{OH} = a\,\vec{B}$.

ablir que C admet au point H(s), $s \neq 0$, un repère de Frenet $(H(s)\,;\vec{T}_1(s),\ \vec{N}_1(s),\ \vec{B}_1(s))$ e courbure $c_1(s)$ et une torsion $\gamma_1(s)$. Donner des expressions des fonctions $\frac{ds_1}{ds}$, $\vec{T}_1$, $\vec{N}_1$, $\vec{B}_1$, c_1 et γ_1 faisant intervenir a, s, $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, c et γ (On notera $|s| = \varepsilon s$).

Vérifier que $\gamma\gamma_1\|\overrightarrow{OM}\|^2$ est une constante.

Dans le cas de $0 \in I$, montrer que H(0) est un point de rebroussement de C et préciser la demi-tangente de rebroussement.

1.3.2. Montrer que le centre de courbure W(s) de C en H(s), défini par
$$\overrightarrow{H(s)W(s)} = \frac{1}{c_1(s)}\vec{N}_1(s)$$
est la projection orthogonale de H(s) sur la droite qui contient O et M(s).

Montrer : $\overrightarrow{OW} = \dfrac{a^2}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}\overrightarrow{OM}$.

DEUXIEME PARTIE

Le temps t décrivant $\mathbb{R}$, on étudie le mouvement ponctuel (dans $\mathcal{E}$) $t \longmapsto M(t)$ défini par : $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{u}(t) + \vec{k}\,\text{ch}t$

où $\vec{u}(t) = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t$. On note $\vec{v}(t) = -\vec{i}\sin t + \vec{j}\cos t$.

Soit Γ la trajectoire de M, orientée dans le sens des t croissants, avec M (0) pour origine des abscisses curvilignes.

2.1.1) Déterminer l'abscisse curviligne s(t), le repère de Frenet $\mathcal{F}(t) = (M(t)\,;\vec{T}(t),\ \vec{N}(t),\ \vec{B}(t))$, la courbure c (t), la torsion γ (t) de Γ au point de paramètre t.

A titre de vérification, montrer $\vec{B} = \vec{N} + \vec{u}\sqrt{2}$.

2.1.2) Vérifier que l'arc Γ possède les propriétés i), ii) et iii) de la première partie (on précisera la constante a), et que les formules (*) de 1.2. sont valables.

2.2. Expliciter $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OW}$ en fonction de t (notations de I.3).

Construire sur une même figure les trajectoires des projections orthogonales H' et W' de H et W sur le plan repéré par $(O\,;\vec{i},\vec{j})$; on montrera qu'une symétrie permet de se limiter à $t \geqslant 0$; on précisera les points H'(0) et W'(0) ainsi que les tangentes en ces points ; on donnera des valeurs approchées des coordonnées dans le repère $(O\,;\vec{u}(t),\vec{v}(t))$ de H' (t) et de W' (t) successivement pour $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = \pi$.

TROISIEME PARTIE

On reprend le mouvement ponctuel $t \longmapsto M(t)$ étudié dans la seconde partie dont on conserve les notations (t décrit $\mathbb{R}$ tout entier).

3.1. Le repère $\mathcal{F}(t)$ de $\mathcal{E}$ est la position à l'instant t d'un repère orthonormal direct $\mathcal{F} = \{M\,;\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ d'un solide Σ en mouvement par rapport à $\mathcal{E}$.

Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(t)$, l'axe $\Delta(t)$ et le vecteur glissement $\vec{J}(t)$, à l'instant t dans le mouvement $\Sigma/\mathcal{E}$. On déterminera les coordonnées dans le repère $\mathcal{F}(t)$ de $\vec{\Omega}(t)$, de $\vec{J}(t)$ et de la projection orthogonale Q (t) de M(t) sur $\Delta(t)$.

Vérifier : $$\vec{\Omega}(t) = \frac{1}{\text{ch}t}\overrightarrow{OM}(t).$$

3.2. On désigne par Δ_t la droite liée à Σ qui occupe à l'instant t la position $\Delta(t)$ dans $\mathcal{E}$. Quand t décrit $\mathbb{R}$, Δ_t engendre une nappe réglée $\mathcal{B}$ dont on donnera une réprésentation paramétrique dans le repère $\mathcal{F}$ de Σ.

Montrer $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, où $\mathcal{B}'$ est un sous-ensemble de Σ qui admet, dans $\mathcal{F}$, une équation $f(X, Y, Z) = 0$, dans laquelle f est un polynôme de degré 3 ; préciser $\mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$.

Montrer qu'il existe un repère $\mathcal{F}'$ de Σ dans lequel $\mathcal{B}'$ admet une équation de la forme : $Y'(X'^2 + Z'^2) = \mu(X'^2 - Z'^2)$.

****
**
*