CONCOURS COMMUN INP

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1 MP - MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

EXERCICE 1

Q1. Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. L'application f' est donc continue sur l'intervalle $]-1,1[$, qui est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$. L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs. Donc $f'(]-1,1[)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

Q2. On considère l'application $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } t \in]-1,0] \\ \left(t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), t^2\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) & \text{si } t \in]0,1[\end{cases}$$

On note pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

a) Dérivabilité en 0 :

On étudie la limite du taux d'accroissement. Pour $t \in]0,1[$:

$$\frac{1}{t-0}\left(f(t)-f(0)\right) = \left(t\sin\left(\frac{1}{t}\right), t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

On a

$$\left|t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq |t| \underset{t\to 0^+}{\to} 0 \text{ et } \left|t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq |t| \underset{t\to 0^+}{\to} 0.$$

Donc

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t-0}\left(f(t)-f(0)\right)\right) = (0,0)$$

Pour $t \in]-1,0[$:

$$\frac{1}{t-0}\left(f(t)-f(0)\right) = (0,0)$$

Donc

$$\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t-0}\left(f(t)-f(0)\right)\right) = (0,0)$$

Les limites à gauche et à droite existent, sont égales à $(0,0)$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = (0,0)$.

Dérivabilité sur $]-1,0[$ *:*

Si $t \in]-1,0[$ on a $f(t) = (0,0)$, donc f est dérivable, et $f'(t) = (0,0)$ pour tout $t \in]-1,0[$.

Dérivabilité sur $]0,1[$ *:*

Sur $]0,1[$, les composantes de f : $f_1(t) = t^2\sin(1/t)$ et $f_2(t) = t^2\cos(1/t)$ sont dérivables sur $]0,1[$.

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici `https://tinyurl.com/4up84xze` 07-05-2025

Donc f est dérivable sur $]0,1[$ et
$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t))$ pour $t \in]0,1[$, avec :

$$f_1'(t) = 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) + t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) = 2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$f_2'(t) = 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + t^2 \left(-\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) = 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

Donc $f'(t) = \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right), 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ pour $t \in]0,1[$.
Conclusion *:* f est donc dérivable sur $]-1,1[$ et

$$f'(t) = \begin{cases} \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right), 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) & \text{si } t \in]0,1[\\ (0,0) & \text{si } t \in]-1,0] \end{cases}$$

b) Pour $t \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|_2^2 &= \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 + \left(2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 \\ &= 4t^2\left(\sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\right) + \left(\cos^2\left(\frac{1}{t}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\ &= 1 + 4t^2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\|f'(t)\|_2 = \sqrt{1+4t^2}}$. Ainsi pour tout $t \in]0,1[$, $\|f'(t)\|_2 \geq 1$.
Connexité par arcs :
On a

$$f'(]-1,1[) = f'(]-1,0]) \cup f'(]0,1[) = \{(0,0)\} \cup f'(]0,1[)$$

Les éléments de $f'(]0,1[)$ sont de norme supérieure à 1 donc

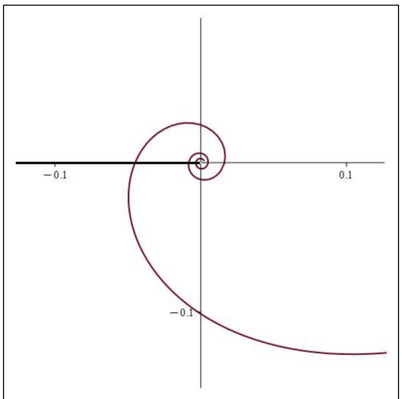
$$f'(]0,1[) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \geq 1\right\} = \complement_{\mathbb{R}^2} \overline{B(0,1)}$$

mais $(0,0)$ est au centre de $\overline{B(0,1)}$. Intuitivement on ne peut pas passer du centre vers l'extérieur de la boule fermée d'une manière continue, c'est à dire $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs.
Montrons le par l'absurde :
Supposons que $f'(]-1,1[)$ est connexe par arcs. Soit $v = f'(t_0)$, avec $t_0 \in]-1,1[$, alors il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to f'(]-1,1[)$ tel que $\gamma(0) = (0,0) \in f'(]-1,1[)$ et $\gamma(1) = v$. Considérons la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(s) = \|\gamma(s)\|_2$.
Comme γ est continue et la norme $\|\cdot\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, la fonction h est continue sur $[0,1]$.
On a

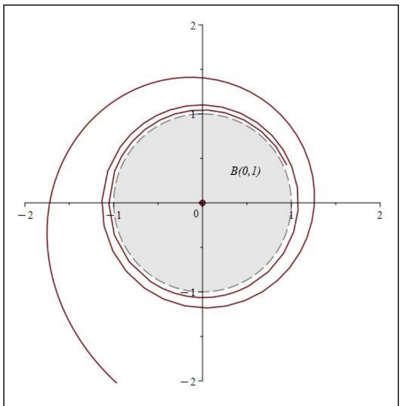
$$h(0) = \|\gamma(0)\|_2 = \|(0,0)\|_2 = 0 \quad \text{et } h(1) = \|\gamma(1)\|_2 = \|v\|_2 \geq 1$$

Puisque h est continue sur $[0,1]$ et $h(0) = 0 < \dfrac{1}{2} < h(1)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $s \in]0,1[$ tel que $h(s_0) = \dfrac{1}{2}$. Cela signifie qu'il existe un point $w = \gamma(s_0)$ dans $f'(]-1,1[)$ tel que

$\|w\|_2 = \dfrac{1}{2}$, ce qui est absurde ($h([0,1]) \subset \{0\} \cup [1,+\infty[$) . Donc $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs.



Représentation de l'arc paramétré définie par f



Représentation de $f'(]-1,1[)$

EXERCICE 2

On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2-x-y)^2 + (1-x)^2 + (1-2x-y)^2$.

Q3. Point critique :

La fonction f est polynomiale en x et y, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Les points critiques sont les solutions de $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

Calculons les dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x + 6y - 10$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x + 4y - 6$$

(x,y) est point critique si et seulement si :

$$\begin{cases} 6x + 3y = 5 & (L_1) \\ 3x + 2y = 3 & (L_2) \end{cases} \overset{L_1 - 2L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Le seul point critique est $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$.

Matrice Hessienne :

On a

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$$

donc $\boxed{H_f\left(\dfrac{1}{3}, 1\right) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}}$.

Ona $\det(H) = rt - s^2 = 12 > 0$ et $r = 12 > 0$ donc le point $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ est un minimum local.

Minimum global

Formule générale de Taylor à l'ordre 2 pour f s'écrit :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f(a,b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(\|(h,k)\|^2\right)$$

dans notre cas f est une fonction polynomiale, le degré (en x ou en y) est 2 , la formule est exacte et $o\left(\|(h,k)\|^2\right)=0$:
(*En effet ce reste de Taylor est de la forme*

$$\left(h^2+k^2\right)\varepsilon(h,k)=A.h^2+Bhk+Ck^2+Dh+Ek+F$$

pour $t\in]0,1[$ *assez petit on a*

$$\left(h^2+k^2\right)\varepsilon(th,tk)=A.h^2+Bhk+Ck^2+\frac{1}{t}\left(Dh+Ek\right)+\frac{1}{t^2}F$$

on fait tendre t *vers* 0 *on obtient* $A=B=C=D=E=F=0$.
D'où le résultat qui est une généralisation du résultat connu sur les polynômes d'une seule variable).
Ce qui donne pour $(a,b)=\left(\frac{1}{3},1\right)$

$$f(\frac{1}{3}+h,1+k)=f(\frac{1}{3},1)+\frac{1}{2}(h,k)H_f\left(\frac{1}{3},1\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

Le fait $rt-s^2=12>0$ et $r=12>0$ signifie que $H_f\left(\frac{1}{3},1\right)$ est une matrice symétrique définie et positive , donc

$$(h,k)H_f\left(\frac{1}{3},1\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}>0 \text{ pour tout } (h,k)\neq(0,0)$$

ce qui donne

$$f\left(\frac{1}{3}+h,1+k\right)>f(\left(\frac{1}{3},1\right)) \text{ pour tout } (h,k)\neq(0,0)$$

Ainsi $\left(\frac{1}{3},1\right)$ est un minimum global de f et $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=f\left(\frac{1}{3},1\right)=\frac{4}{3}$.

Q4. Soit $a=(2,1,1)$, $u=(1,1,2)$, $v=(1,0,1)$ et $F=\text{vect}\{u,v\}$. Posons $b=p_F(a)\in F$ la projection orthogonale de a sur F.

- On a $u,v\in F$, comme $p_F(a)$ est l'unique élément de tel que $a-p_F(a)\in F^\perp$, alors $a-b\in F^\perp$ par suite

$$\langle a-b,u\rangle=\langle a-b,v\rangle=0$$

- Pour $w=xu+yv=(x+y,x,2x+y)\in F$, on a

$$\|a-w\|^2=(2-(x+y))^2+(1-x)^2+(1-(2x+y))^2=f(x,y).$$

Minimiser $f(x,y)$ revient à minimiser la distance (*au carré*) entre a et $w\in F$.
D'après le théorème de la projection orthogonale, le minimum est atteint pour $w=b$, donc

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=\min_{w\in F}\|a-w\|^2=\|a-b\|^2$$

Posons $b=xu+yv$. On a $a-b$ est orthogonal à F, donc $\langle a-b,u\rangle=0$ et $\langle a-b,v\rangle=0$.
Cela équivaut à

$$\begin{cases}6x+3y=5\\3x+2y=3\end{cases}$$

dont la solution est $x=\frac{1}{2},y=1$. Donc

$$b=\frac{1}{3}u+v=(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}).$$

Le minimum de $f(x, y)$ est

$$\min f(x, y) = \|a - b\|^2 = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{3}.$$

.

PROBLÈME.

Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Partie 1 - Théorème de comparaison avec une intégrale

Soit f continue, positive, décroissante sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$, $J_n = \int_0^n f(t)dt$, $I_k = \int_{k-1}^{k} f(t)dt$ $(k \geq 1)$.

Q5. Monotonie de (S_n) et (J_n) :

On a :

- $S_n - S_{n-1} = f(n) \geq 0$, donc (S_n) est croissante.
- $J_n - J_{n-1} = I_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq 0$, donc (J_n) est croissante.

Encadrement de I_k :

Pour $t \in [k-1, k]$ on a $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$. En intégrant on obtient $\boxed{f(k) \leq I_k \leq f(k-1).}$

Q6. Encadrement de J_n.

Par sommation de la relation précédente, on obtient

- $\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} I_k$ donc $S_n - f(0) \leq J_n$.
- $\sum_{k=1}^{n} I_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$ et $\sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j) = S_{n-1}$, donc $J_n \leq S_{n-1}$.

Ainsi $\boxed{S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}}$.

Q7. Résultats (1) :

On a (S_n) et (J_n) sont croissantes, donc :

- Si $\sum f(n)$ CV alors (S_n) majorée, or $J_n \leq S_{n-1}$ donc (J_n) majorée, par suite (J_n) CV et

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n f(t)dt = L \in \mathbb{R}^+$$

Soit $x > 0$ et $N = \lfloor x \rfloor$, on a

$$J_N = \int_0^N f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{N+1} f(t)dt = J_{N+1}$$

donc

$$0 \leq \int_0^x f(t)dt - J_N \leq J_{N+1} - J_N$$

On a , si $x \to +\infty$ alors $N \to +\infty$ et $J_{N+1} - J_N \to 0$.
Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge ($= L$) et f est positive donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

- Si f intégrable, alors (J_n) CV et elle est majorée, or $S_n \leq J_n + f(0)$ donc (S_n) majorée, par suite (S_n) CV et $\sum f(n)$ CV.

D'où l'équivalence .

Résultats (2) : Soit $d_n = I_n - f(n)$.

D'après Q5

$$0 \leq d_n \leq f(n-1) - f(n).$$

et

$$\sum_{n=1}^{N} (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N).$$

la limite $\lim_{N\to\infty} f(N)$,donc la série $\sum(f(n-1) - f(n))$ CV.

Par comparaison de séries à termes ≥ 0, $\sum d_n$ CV.

Q8. **Un exemple :** $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \geq 2$.

a) • On a $f'(x) = -\dfrac{(\ln x)^{\alpha-1}(\ln x + \alpha)}{x^2(\ln x)^{\alpha+1}}$. f strictement décroissante sur $]\mathrm{e}^{-\alpha}, +\infty[$, comme $\mathrm{e}^{-\alpha} < 2$, alors f strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.

• On a

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \int_{\ln 2}^{\ln x} u^{-\alpha} du = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)^{1-\alpha} - \ln(2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. Par Q7 (1), $\displaystyle\sum_{n\geq 2} f(n)$ converge ssi $\alpha > 1$.

b) Cas $\alpha = 2$.

On applique Q6 à la fonction $t \mapsto f(t+2)$. $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} f(k)$ et $J_n = \displaystyle\int_2^{n+2} f(t)dt$:

$$S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}.$$

ce qui donne

$$J_{n+1} \leq S_n \leq J_n + f(2)$$

par passage à la limite :

$$\int_2^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \leq \int_2^{+\infty} f(t)dt + f(2)$$

Comme $\displaystyle\int_2^{\infty} f(t)dt = \frac{1}{\ln 2}$ et $f(2) = \dfrac{1}{2(\ln 2)^2}$ alors

$$\frac{1}{\ln 2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}$$

Q9. **Une application :**

Soit $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

a) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Elle est continue et décroissante et positive sur $[2, +\infty[$.

D'après Q7(2) la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left[\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)\right]$ CV.

Soit u_n et S_n le terme général et la somme partielle de cette série . On a :

$$u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$$

et

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln k - \ln(k-1) - \frac{1}{k} \right) = \ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - T_n$$

Donc la suite (T_n) CV.

b) On a $T_n \underset{n\to+\infty}{\to} \gamma$ donc $T_n = \gamma + o(1)$ .Ainsi $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$

Q10. Une autre application :

a) Soit : $g_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$, $\forall x \in]0, +\infty[$.
Pour $x > 0$, $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$, donc $\sum_{n\geq 1} g_n(x)$ CV par suite $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
On a : $g_n'(x) = \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$. Ce qui donne : g_n est strictement croissante sur $]0, n[$ et elle est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.
Le maximum de g_n sur $]0, +\infty[$ est $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$.
La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ ne converge pas normalement sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Soit $a \in]0, +\infty[$, pour $n \geq \lfloor a \rfloor + 1$ alors g_n est croissante sur $]0, a]$ et $\sup_{x\in]0,a]} |g_n(x)| = g_n(a)$, donc $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement sur $]0, a]$.

b) Soit $x > 0$ fixé. La fonction $f(t) = \frac{x}{t^2 + x^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Et on a

$$f'(t) = \frac{-2xt}{(t^2 + x^2)^2}$$

f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
D'après Q5 on a

$$f(k) \overset{(1)}{\leq} \int_{k-1}^{k} f(t)dt \overset{(2)}{\leq} f(k-1).$$

On somme (1) de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f(t)dt$$

Et on somme (2) de 2 à $n+1$:

$$\int_{1}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Ainsi on a $\boxed{\int_{1}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f(t)dt}$.

c) Soit $x > 0$. On a $f(k) = g_k(x)$ donc la série $\sum_{k\geq 1} f(k)$ converge, et d'après Q7 l'intégrale $\int_{0}^{\infty} f(t)dt$ converge . Nous pouvons donc passer à la limite quand $n \to \infty$ dans l'encadrement obtenu en (b) :

$$\int_{1}^{\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq \int_{0}^{\infty} f(t)dt$$

pour $A > a > 0$

$$\int_a^A f(t)dt = \int_a^A \frac{x}{t^2+x^2}dt \overset{u=\frac{t}{x}}{=} \int_{\frac{a}{x}}^{\frac{A}{x}} \frac{1}{u^2+1}du = \arctan\left(\frac{A}{x}\right) - \arctan\left(\frac{a}{x}\right)$$

donc

$$\int_0^\infty f(t)dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_1^\infty f(t)dt = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi $\boxed{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}}$.

d) Par le théorème d'encadrement et l'inégalité précédentes, on conclut $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}}$.

Si on suppose que $\sum g_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$. On a $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$, le théorème d'interversion de $\sum$ et lim en $+\infty$ donne

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$$

ce qui est absurde , donc $\sum_{n\geq 1} g_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

Partie 2 - Contre-exemples

Q11. $f(x) = |\sin(2\pi x)|$, $x \geq 1$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait le changement $t = 2\pi(x-n)$

$$\int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)|\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(t)|\, dt$$

par periodicité

$$\int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)|\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(t)|\, dt$$

donc

$$\int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)|\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos(t)\Big]_n^{n+\frac{1}{2}}$$

Ainsi $\boxed{\int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)|\, dx = \frac{2}{\pi}}$.

b) Soit $x \geq 1$, posons $n = \lfloor x \rfloor$. On a $\int_1^x f(t)\, dt \geq \int_1^n f(t)\, dt$ et

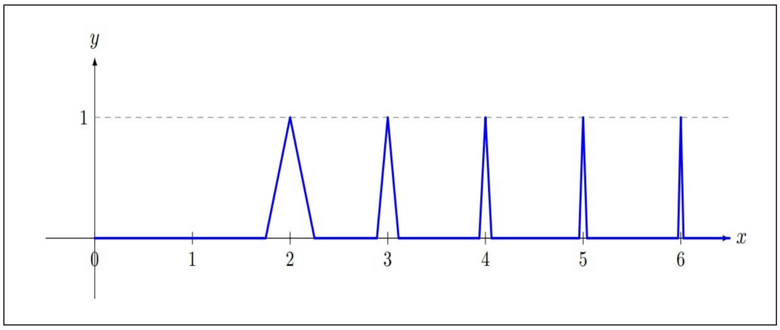
$$\int_1^n f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\, dt = (n-1)\frac{2}{\pi}$$

Donc $\boxed{\int_1^x f(t)\, dt \geq (\lfloor x \rfloor - 1)\frac{2}{\pi}}$, et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente vers $+\infty$.

On a , $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la série $\sum f(n)$ converge.

Q12. Soit $n \geq 1$ et a_n tel que le triangle, T_n, de base l'intervalle $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 , dont l'aire est $\dfrac{1}{n^2}$.
On a
$$\text{Aire}(T_n) = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \times (2a_n) \times 1 = a_n.$$
Ainsi, $a_n = \frac{1}{n^2}$.
On corrige la définition de la fonction f :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in \left[0, 2 - \frac{1}{4}\right]. \\ f \text{ continue }. \\ f(n) = 1 \text{ pour } n \geq 2. \\ f \text{ affine sur } \left[n - \dfrac{1}{n^2}, n\right] \text{ et sur } \left[n, n + \dfrac{1}{n^2}\right]. \end{cases}$$



Intégrabilité de f :
Soit $x \geq 1$ et $n = \lfloor x \rfloor$, on a $x \in [n, n+1[\subset]n - a_n, n + 1 + a_{n+1}[$, donc
$$\int_1^{n-a_n} f(t)dt \leq \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^{n+1+a_{n+1}} f(t)dt$$
par construction de f on a
$$\int_1^{n-a_n} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-a_k}^{k+a_k} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$
et
$$\int_1^{n+1+a_{n+1}} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n+1} \int_{k-a_k}^{k+a_k} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2}$$
par suite
$$\sum_{k=2}^{\lfloor x \rfloor - 1} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^x f(t)dt \leq \sum_{k=2}^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{1}{k^2}$$
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, comme $f \geq 0$ alors elle est intégrable.
On a $f(n) = 1$ pour $n \geq 2$ donc $\sum f(n)$ diverge grossièrement .