## Partie A

**1.** $y''=0 \Leftrightarrow \exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ y=ax+b$. Donc :

$$F\in S_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=ax+b\\ F(0)=F(\pi)=0\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow F=0$. D'où :

$$\boxed{S_0=\{0\}}$$

**2.a.** $y''+\omega^2y=0 \Leftrightarrow \exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ y=a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$. Donc :

$F\in S_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)\\ F(0)=F(\pi)=0\end{array}\right.$ . Or :

$F(0)=F(\pi)=0\Leftrightarrow a=0$ et $b\sin(\omega\pi)=0$. 2 cas :

$\rightarrow \omega\in\mathbb{N}^*$ : on a alors :

$$\boxed{S_0=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\\ x\rightarrow b\sin(\omega x)\end{array}\ /b\in\mathbb{R}\right\}}$$

$\rightarrow \omega\notin\mathbb{N}^*$ et $F(0)=F(\pi)=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$ et :

$$\boxed{S_0=\{0\}}$$

**b.** $y''-\omega^2y=0 \Leftrightarrow \exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ y=a.\mathrm{ch}(\omega x)+b.\mathrm{sh}(\omega x)$. Donc :

$F\in S_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=a.\mathrm{ch}(\omega x)+b.\mathrm{sh}(\omega x)\\ F(0)=F(\pi)=0\end{array}\right.$ . Or :

$$\begin{aligned}F(0)=F(\pi)=0 &\Leftrightarrow a=0 \text{ et } b.\mathrm{sh}(\omega\pi)=0\\ &\Leftrightarrow a=0 \text{ et } b=0\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{S_0=\{0\}}$$

**3.a.** $y''=\cos(nx) \Leftrightarrow \exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ y=-\dfrac{\cos(nx)}{n^2}+ax+b$. Donc :

$F\in S_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=-\dfrac{\cos(nx)}{n^2}+ax+b\\ F(0)=F(\pi)=0\end{array}\right.$ . Or :

$$\begin{aligned}F(0)=F(\pi)=0 &\Leftrightarrow b=\frac{1}{n^2} \text{ et } \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+a\pi+b=0\\ &\Leftrightarrow b=\frac{1}{n^2} \text{ et } a=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{S_0=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\\ x\rightarrow -\dfrac{\cos(nx)}{n^2}+\dfrac{(-1)^n-1}{\pi n^2}x+\dfrac{1}{n^2}\end{array}\right\}}$$

**b.** $y''=\sin(nx) \Leftrightarrow \exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ y=-\dfrac{\sin(nx)}{n^2}+ax+b$. Donc :

$F\in S_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=-\dfrac{\sin(nx)}{n^2}+ax+b\\ F(0)=F(\pi)=0\end{array}\right.$ . Or :

$$\begin{aligned} F(0)=F(\pi)=0 \quad &\Leftrightarrow b=0 \text{ et } a\pi=0 \\ &\Leftrightarrow b=a=0. \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{S_0=\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\to -\dfrac{\sin(nx)}{n^2} \end{array}\right\}}$$

**4.** $$\begin{aligned} y''=f(x) \quad &\Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ y'=\int_0^x f(t)dt+a \\ &\Leftrightarrow \exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ y=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du+ax+b. \end{aligned}$$

Donc :

$$F\in S_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists a,b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\displaystyle\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du+ax+b \\ F(0)=F(\pi)=0 \end{array}\right. .$$

Or :

$$\begin{aligned} F(0)=F(\pi)=0 \quad &\Leftrightarrow b=0 \text{ et } \int_0^\pi\left(\int_0^u f(t)dt\right)du+a\pi=0 \\ &\Leftrightarrow b=0 \text{ et } a=-\frac{\displaystyle\int_0^\pi\left(\int_0^u f(t)dt\right)du}{\pi}.\ \text{D'où :} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_0=\left\{\begin{array}{l} F_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\to\displaystyle\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du-\frac{\displaystyle\int_0^\pi\left(\int_0^u f(t)dt\right)du}{\pi}x \end{array}\right\}}$$

**5.a.** $\forall f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \varphi(f)=F_1\in\mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\subset\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (car $F_1$ est solution d'une équation différentielle du second ordre définie sur $\mathbb{R}$)

En outre, l'intégrale étant linéaire, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall f,g\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \varphi(\alpha f+\beta g)=\alpha\varphi(f)+\beta\varphi(g)$ ; D'où :

$$\boxed{\varphi\in\mathcal{L}\left(\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)}$$

**b.** Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \varphi(f)=0 \quad &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du-\frac{\displaystyle\int_0^\pi\left(\int_0^u f(t)dt\right)du}{\pi}x=0 \\ &\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x f(t)dt-\frac{\displaystyle\int_0^\pi\left(\int_0^u f(t)dt\right)du}{\pi}=0 \text{ (en dérivant par rapport à } x\text{)} \\ &\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=0 \text{ (en dérivant une seconde fois)} \end{aligned}$$

Donc, $\operatorname{Ker}(\varphi)=\{0\}$ et :

$$\boxed{\varphi \text{ est injectif}}$$

Soit $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to 1\end{array}$ $\forall f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \varphi(f)(0)=\varphi(f)(\pi)=0$. Or $g(0)=g(\pi)=1$, donc $\varphi(f)\neq g$.

Or $g$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjectif}}$$

**c.** Soit $f$ vecteur propre de $\varphi$. Alors $\left\{\begin{array}{l}\exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \varphi(f)=\lambda f\\ f\neq 0\end{array}\right.$. (En effet, 0 n'est pas valeur propre puisque $\varphi$ est injectif). D'où :

$\forall x\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du-\frac{\displaystyle\int_0^\pi\left(\int_0^u f(t)dt\right)du}{\pi}x=\lambda f(x)$ ce qui montre que $f$ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ($f=\dfrac{1}{\lambda}\varphi(f)$). En dérivant 2 fois, on obtient :

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lambda f''(x)$. D'où 2 cas :

$\rightarrow$ si $\lambda$ est négatif, on peut poser $\omega=\sqrt{\dfrac{1}{-\lambda}}$ et $f$ est solution de $y''+\omega^2y=0$, ce qui donne :

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$ et :

$$\begin{aligned}\varphi(f)(x)&=-\frac{a}{\omega^2}\cos(\omega x)-\frac{b}{\omega^2}\sin(\omega x)+\frac{f(\pi)-a}{\pi\omega^2}x+\frac{a}{\omega^2}\\&=-\frac{1}{\omega^2}f(x)+\frac{f(\pi)-a}{\pi\omega^2}x+\frac{a}{\omega^2}.\end{aligned}$$

D'où $f$ vecteur propre si :

$$(a,b)\neq(0,0),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \frac{f(\pi)-a}{\pi\omega^2}x+\frac{a}{\omega^2}=0\quad\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0,\ b\neq 0\\ \sin(\omega\pi)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0,\ b\neq 0\\ \omega\in\mathbb{N}^*\end{array}\right.$$

$\rightarrow$ si $\lambda>0$, on peut poser $\omega=\sqrt{\dfrac{1}{\lambda}}$ et $f$ est solution de $y''-\omega^2y=0$, ce qui donne :

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a\mathrm{ch}(\omega x)+b\mathrm{sh}(\omega x)$ et :

$$\begin{aligned}\varphi(f)(x)&=\frac{a}{\omega^2}\mathrm{ch}(\omega x)+\frac{b}{\omega^2}\mathrm{sh}(\omega x)+\frac{-f(\pi)+a}{\pi\omega^2}x-\frac{a}{\omega^2}\\&=\frac{1}{\omega^2}f(x)+\frac{-f(\pi)+a}{\pi\omega^2}x-\frac{a}{\omega^2}.\end{aligned}$$

D'où $f$ vecteur propre si :

$(a,b)\neq(0,0),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{-f(\pi)+a}{\pi\omega^2}x-\dfrac{a}{\omega^2}=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0,\ b\neq 0\\ \mathrm{sh}(\omega\pi)=0\end{array}\right.$ ce qui est impossible.

J'ai montré que :

- les valeurs propres de $\varphi$ sont les $-\dfrac{1}{n^2}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$
- les vecteurs propres de $\varphi$ associés à $-\dfrac{1}{n^2}$ sont les applications $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to b\sin(nx)\end{array}$ où $b\neq 0$.

**Partie B**

**1.a.** $\forall x\in\mathbb{R},\ p(-x)=\left|\sin\left(\dfrac{-x}{2}\right)\right|=\left|-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|=\left|\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|=p(x)$ et

$p(x+2\pi)=\left|\sin\left(\dfrac{x}{2}+\pi\right)\right|=\left|-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|=\left|\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|=p(x)$. Donc :

$$\boxed{p\text{ est paire et }2\pi-\text{ périodique}}$$

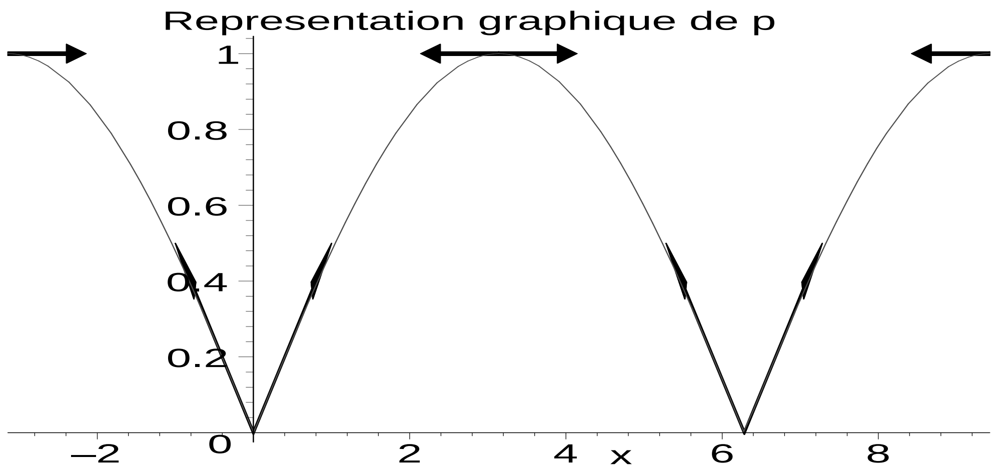
$p$ est composée de fonctions continues sur leur ensemble de définition, donc :

$$\boxed{p\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

$\left\{\begin{array}{l}p\text{ est }2\pi-\text{ périodique}\\ p_{|[0,2\pi]}:x\to\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\text{ est de classe }C^1\text{ sur }[0,2\pi]\end{array}\right.$, donc :

$$\boxed{p\text{ est de classe }C^1\text{ par morceaux}}$$

**b.**




**c.** $p$ est $2\pi-$ périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et $C^1$ par morceaux. D'où :

$$\boxed{\text{la série de Fourier de } p \text{ a un sens et converge pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ vers } p(x).}$$

**d.**
$$\begin{aligned} a_0(p) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{-2}{\pi}\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Comme $p$ est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(p) = 0$ et :

$$\begin{aligned} a_n(p) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)}{n-\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{-4}{\pi\left(4n^2-1\right)}. \end{aligned}$$

D'après, la question c., on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{4n^2-1}}$$

**2.a.** La formule de Parseval indique que :

✓ $\underline{a_0(g)^2 + \sum_{n\geq 1}\frac{a_n(g)^2 + b_n(g)^2}{2} \text{ converge}}$

✓ $\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} g^2(x)dx = a_0(g)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n(g)^2 + b_n(g)^2}{2}}$

où $a_0(g)$ désigne la valeur moyenne de $g$.

**b.** Appliquons cette formule à $p$.

$a_0(p)^2 + \sum_{n\geq 1} \dfrac{a_n(p)^2 + b_n(p)^2}{2} = \dfrac{4}{\pi^2} + \dfrac{8}{\pi^2} \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(4n^2-1)^2}$ et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} p^2(x)dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos(x))dx \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où :

$\dfrac{4}{\pi^2} + \dfrac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(4n^2-1)^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi}{4}}$$

**<u>Partie C</u>**

**1.** $y'' + y = 0 \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = a\cos(x) + b\sin(x)$.

L'ensemble des solutions 2 fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, solutions de $y'' + y = 0$, est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to a\cos(x) + b\sin(x) \end{array} \ /a, b \in \mathbb{R} \right\}}$$

**2.a.** $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \quad \displaystyle\int_0^x f(t)(\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x))dt$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = \sin(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt.$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt}$$

**b.** Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, $x \to \displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt$ et $x \to \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(t)dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (primitives d'une fonction continue) et ont pour dérivées respectives $x \to f(x)\cos(x)$ et $x \to f(x)\sin(x)$. Comme sin et cos sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$h'(x) = \sin(x)f(x)\cos(x) + \cos(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x)f(x)\sin(x) + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt.$

D'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt}$$

De même, $h'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = f(x)\cos^2(x) - \sin(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt +$ $f(x)\sin^2(x) + \cos(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(t)dt$. D'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = f(x) - \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt}$$

**c.** L'égalité précédente s'écrit aussi :
$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = f(x) - h(x) \Leftrightarrow h''(x) + h(x) = f(x)$. Donc :

$$\boxed{h \text{ est une solution particulière de } (E_1)}$$

**3.** $(E_1)$ étant une équation linéaire, ses solutions sont de la forme $h + g$ où $g$ est une solution quelconque de $y'' + y = 0$, c'est à dire de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to h(x) + a\cos(x) + b\sin(x) \end{array} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels quelconques.}}$$

**4.a.** En substituant $2x$ à $x$ dans la formule de **B.1.d.**, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}}$$

**b.**
$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos(2nt)\sin(x-t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^x (\sin((2n-1)t+x) - \sin((2n+1)t-x))\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((2n-1)t+x)}{2n-1} + \frac{\cos((2n+1)t-x)}{2n+1}\right]_0^x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(2nx)}{2n-1} + \frac{\cos(2nx)}{2n+1} + \frac{\cos(x)}{2n-1} - \frac{\cos(x)}{2n+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}\right)(\cos(x) - \cos(2nx)) \\
&= \frac{1}{4n^2-1}(\cos(x) - \cos(2nx)). \text{ D'où :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^x \cos(2nt)\sin(x-t)dt = \frac{\cos(x) - \cos(2nx)}{4n^2-1}}$$

**c.** On sait que $\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1} \Rightarrow$
$\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin(t)|\sin(x-t) = \frac{2\sin(x-t)}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nt)\sin(x-t)}{4n^2-1} \Rightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x |\sin(t)|\sin(x-t)dt = \int_0^x \frac{2\sin(x-t)}{\pi}dt - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{\cos(2nt)\sin(x-t)}{4n^2-1}dt$ (puisqu'on peut intervertir somme et intégrale)

On obtient :
$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \left[\frac{2\cos(x-t)}{\pi}\right]_0^x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(x) - \cos(2nx)}{(4n^2-1)^2} \Rightarrow$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi}(1 - \cos(x)) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx) - \cos(x)}{(4n^2-1)^2}}$$

**d.** D'après la question précédente,
$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi}(1 - \cos(x)) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2} - \frac{4\cos(x)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$ et
d'après **B.2.b.**, $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$. D'où :
$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi}(1 - \cos(x)) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2} - \cos(x)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)$ ce qui montre :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}\cos(x) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}}$$

**e.** $h(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\sin(-t)dt = 0$

$$\begin{aligned} h(\pi) &= \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}\cos(\pi) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n\pi)}{(4n^2-1)^2} \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \text{ (d'après B.2.b.). Donc :} \end{aligned}$$

$$\boxed{h(0) = 0 \text{ et } h(\pi) = \frac{\pi}{2}}$$

**f.** On a vu qu'une solution de $(E_1)$ s'écrit $F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to h(x) + a\cos(x) + b\sin(x) \end{array}$ où $a$ et $b \in \mathbb{R}$.

Donc :

$$\boxed{S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to h(x) + a\cos(x) + b\sin(x) \end{array} /a, b \in \mathbb{R} \right\}}$$

On a alors $F(0) = F(\pi) = 0 \ \Leftrightarrow h(0) + a = 0$ et $h(\pi) - a = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ et $a = \dfrac{\pi}{2}$ et :

$$\boxed{S_0 = \emptyset}$$

**<u>Partie D</u>**

**1.** Si l'on pose $t = \ln(x)$. L'on a $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t)$ et $z$ est une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ y'(x) = \frac{1}{x}z'(t) \text{ et } y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(t) + \frac{1}{x^2}z''(t)}$$

**2.** D'où $y$ solution de $(F)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ x^2\left(-\frac{1}{x^2}z'(t) + \frac{1}{x^2}z''(t)\right) + x\left(\frac{1}{x}z'(t)\right) + z(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ -z'(t) + z''(t) + z'(t) + z(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + z(t) = 0. \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$\boxed{z \text{ est solution de } z'' + z = 0\ (H)}$$

**3.** $z$ solution de $(H)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \\ &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ y(x) = a\cos(\ln(x)) + b\sin(\ln(x)). \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions de $(F)$ :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \to a\cos(\ln(x)) + b\sin(\ln(x)) \end{array} /a, b \in \mathbb{R} \right\}}$$

**4.** $\left\{ \begin{array}{l} y \text{ solution de } (F) \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ y(x) = a\cos(\ln(x)) + b\sin(\ln(x)) \\ a = 0,\ b = 1 \end{array} \right.$

car $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ y'(x) = \dfrac{-a\sin(\ln(x)) + b\cos(\ln(x))}{x}$. D'où :

$$\boxed{\text{l'unique solution du système donné est } \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \to \sin(\ln(x)) \end{array}}$$

$\Delta\Delta\Delta$

Rédigé par
Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal 22000 St Brieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr