Corrigé du problème ENS Ulm-Lyon 2004, filière MP.

R.Krust (romain.krust@prepas.org)

I : Actions de groupes

1. $\mathrm{Aut}(G)$ est une partie non vide du groupe des bijections de G dans G dont on sait qu'elle est stable par composition et par passage à l'inverse. C'est donc un sous-groupe.

2. Parce que Φ est un morphisme et que $\Phi(\gamma) \in \mathrm{Aut}(G)$, on a :

$$^{\gamma}(g_1g_2) = \Phi(\gamma)(g_1g_2) = \Phi(\gamma)(g_1)\Phi(\gamma)(g_2) = {}^{\gamma}(g_1)^{\gamma}(g_2)$$

$$^{\gamma_1\gamma_2}g = \Phi(\gamma_1\gamma_2)(g) = \Phi(\gamma_1)\Phi(\gamma_2)(g) = {}^{\gamma_1}({}^{\gamma_2}(g))$$

$$^{e}g = \Phi(e)(g) = \mathrm{Id}_G(g) = g$$

$$^{\gamma}(e) = \Phi(\gamma)(e) = e$$

$$^{\gamma}(g^{-1}) = \Phi(\gamma)(g^{-1}) = (\Phi(\gamma)(g))^{-1} = ({}^{\gamma}g)^{-1}$$

3. On a clairement $\overline{\overline{M}} = M$ (donc la conjugaison est bijective) et $\overline{M_1M_2} = \overline{M_1}\,\overline{M_2}$. Donc Φ est à valeurs dans $\mathrm{Aut}(G)$. De plus $\Phi(-1) \circ \Phi(-1) = \Phi(1)$ (car $\overline{\overline{M}} = M$), donc Φ est un morphisme (les autres égalités sont triviales), et il s'agit bien d'une action de Γ_2 sur G. Clairement aussi, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^{\Gamma_2} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4. (a) Pour tous $g \in G^{\Gamma}$ et $\gamma \in \Gamma$, ${}^{\gamma}u(g) = u({}^{\gamma}g) = u(g)$. Donc $u(g) \in H^{\Gamma}$, ce qui prouve $G^{\Gamma} \subset H^{\Gamma}$.

   (b) La réponse est non, et voici un contre-exemple. On pose $G = \dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$, $H = \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, $\Gamma = \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. On définit l'action de Γ sur G par (on note $[k]_n$ la classe de k modulo n)

$$^{[0]_2}([k]_4) = [k]_4 \qquad ^{[1]_2}([k]_4) = [k+2]_4$$

   et celle de Γ sur H par

$$^{[0]_2}([k]_2) = [k]_2 \qquad ^{[1]_2}([k]_2) = [k]_2$$

   Et on choisit $u : G \to H$ défini par $\begin{cases} u([0]_4) = u([2]_4) = [0]_2 \\ u([1]_4) = u([3]_4) = [1]_2 \end{cases}$

   On vérifie sans mal qu'il s'agit bien d'actions de groupe, et que u est un Γ-morphisme surjectif. De plus, $G^{\Gamma} = \{e_G\}$, $H^{\Gamma} = H$ et $u(G^{\Gamma}) \neq H^{\Gamma}$.

II : Sous-groupes matriciels

1. Un élément M de G vérifie $M^2 = I_n$. Le polynôme $X^2 - 1$ étant (scindé) à racines simples, M est une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont parmi $\{1, -1\}$. Mieux, G étant commutatif, il est classique (et l'énoncé le rappelle en fin de section "Notations et conventions") que les éléments de G sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale pour tout $M \in G$, les éléments diagonaux valant 1 ou -1. Comme il n'y a que 2^n matrices de cette forme, G est fini et $|G| \leqslant 2^n$.

2. Soient $a = \phi(I_n)$, et $g : V_1 \to V$ définie par

$$g(x) = \phi(\phi^{-1}(x)^2) = f(x, x)$$

   g est de classe C^1 sur V_1 (qui est un ouvert de V contenant a). On note que $\forall x, y \in V$, $f(x, a) = x$, $f(a, y) = y$. En conséquence, en notant $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$,

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \frac{\partial f}{\partial x_k}(a, a) = \frac{\partial f}{\partial y_k}(a, a) = e_k$$

d'où $dg_a = 2id_{\mathbb{R}^p}$. On a donc, puisque g est C^1 et $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^p)$ ouvert, $dg_x \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^p)$ pour tout x appartenant à un certain voisinage $W \subset V_1$ de a. D'après le théorème d'inversion locale[1], $g(W)$ est un ouvert et, en particulier, a est un point intérieur de $g(V_1)$. ϕ étant un homéomorphisme, cela montre que I_n est un point intérieur de $\phi^{-1}(g(V_1)) = \{M^2, M \in U\}$.

3. Désignons, lorsque $M \in M_n(\mathbb{C})$, par $\tilde{M} \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ la matrice obtenue en retirant les n-ièmes lignes et colonnes de M. Posons

$$A = \{M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R});\ \tilde{M} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})\}$$

A est un ouvert de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (car $M \mapsto \tilde{M}$ est continue et $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ ouvert dans $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$) qui contient I_n, et l'application $\phi : A \to \mathbb{R}^{n^2-1}$ qui à M associe la liste de ses coefficients à l'exception de celui d'indice (n,n) :

$$\phi(M) = (M_{i,j})_{(i,j)\neq(n,n)}$$

est clairement continue. De plus, étant donné $(b_{i,j})_{(i,j)\neq(n,n)} \in \mathbb{R}^{n^2-1}$, l'équation $\phi(M) = (b_{i,j})_{(i,j)}$, $M \in A$, admet une solution unique ($M_{i,j} = b_{i,j}$ pour $(i,j) \neq (n,n)$, et on trouve $M_{n,n}$ en écrivant $\det(M) = 1$ et en développant par rapport à la dernière colonne). L'expression qu'on obtient de M en fonction de $(b_{i,j})_{(i,j)}$ (les $M_{i,j}$ sont des fractions rationnelles en les $(b_{i,j})$) montre que ϕ^{-1} est continue. ϕ est ainsi un homéomorphisme.

Choisissons maintenant pour U n'importe quel ouvert de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ contenu dans A, contenant I_n, et pour lequel $\forall (M,N) \in U,\ MN \in A$ (il en existe par continuité de $(M,N) \mapsto MN$), puis V_1 et f comme en II.2. Alors, compte tenu de ce qui vient d'être dit, les composantes de $f(x,y)$ sont des fractions rationnelles en les composantes de x et y. f est donc de classe C^1, et on a montré que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ vérifie la condition (L).

4.
   - J contient, en vertu de II.2., un voisinage W de I_n. Soit $N_0 \in J$. En utilisant la commutativité de G on voit immédiatement que J contient $N_0 W$, qui est ouvert en tant qu'image réciproque de W par l'application continue $\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ X & \mapsto & N_0^{-1}X \end{array}$, et contient N_0. Donc J est ouvert.
   - Chaque ensemble $M_0 J = \{M_0 X, X \in J\}$ est un ouvert de G, car image réciproque de J par l'application continue $X \mapsto M_0^{-1}X$. Or ces parties forment une partition de G (c'est la partition associée à la congruence modulo le sous-groupe J de G). Donc J, complémentaire de la réunion des $M_0 J$ distincts de J, est fermé.

III : Construction de matrices inversibles

1. (a) Cherchons λ de la forme $\lambda = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\det(\lambda I_n + \overline{\lambda} A) = e^{-in\theta} \det\left(A + e^{2in\theta} I_n\right)$. Comme $\mu \mapsto \det(A + \mu I_n)$ est polynômiale et non nulle (c'est le polynôme caractéristique de A), cette application ne possède qu'un nombre fini de zéros et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\det\left(A + e^{2in\theta} I_n\right) \neq 0$.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $B = \lambda I_n + \overline{\lambda} M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a $M\overline{B} = \overline{\lambda} M + \lambda M \overline{M} = \overline{\lambda} M + \lambda I_n = B$, d'où $M = B\overline{B}^{-1}$.

2. (a) L'identité et la conjugaison sont évidemment éléments de Γ. Ce sont les seuls, car un élément $\gamma \in \Gamma$, qui est aussi une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, est déterminé par l'image de la base $(1, i)$. Or $\gamma(1) = 1$ et $\gamma(i)^2 = \gamma(i^2) = \gamma(-1) = -1$, d'où $\gamma(i) = \pm i$.

[1] En fait, pour être strictement au diapason du programme en vigueur, il faudrait prouver que g est injective au voisinage de a, ce qui revient à dire que $X \mapsto X^2$ est injective au voisinage de I_n.

(b) L étant de dimension finie sur K, la famille $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de L est K-liée. Donc il en existe une combinaison linéaire non triviale à coefficients dans K de somme nulle. Ce qui établit l'existence de $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(X) = 0$.

(c) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base du K-espace vectoriel L. Pour chaque k, désignons par $P_k \in K[X]$ un polynôme non nul vérifiant $P_k(x_k) = 0$. Une élément γ est entièrement déterminé par les valeurs des $\gamma(e_k)$. Or, γ étant un morphisme de corps, $P(\gamma(e_k)) = \gamma(P(e_k)) = 0$. Donc $\gamma(e_k)$ est l'une des racines de P_k, et le nombre de "choix" possibles est fini[2]. Γ est donc fini.

3. On raisonne par récurrence sur r. Le résultat est évident si $r = 1$. Supposons-le vrai au rang $r \geqslant 1$. Soient $\rho_1, \dots, \rho_{r+1}$ des morphismes deux à deux distincts de L^* dans lui-même, et $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1} \in L$ tels que
$$\lambda_1\rho_1 + \ldots + \lambda_{r+1}\rho_{r+1} = 0$$
Alors, pour tous $x, y \in L^*$, en appliquant cette relation à xy :
$$\lambda_1\rho_1(x)\rho_1(y) + \ldots + \lambda_{r+1}\rho_{r+1}(x)\rho_{r+1}(y) = 0$$
Donc, pour tout $y \in L^*$,
$$\begin{cases} \lambda_1\rho_1 + \ldots + \lambda_{r+1}\rho_{r+1} = 0 \\ \lambda_1\rho_1(y)\rho_1 + \ldots + \lambda_{r+1}\rho_{r+1}(y)\rho_{r+1} = 0 \end{cases}$$
En effectuant une combinaison linéaire de ces deux relations :
$$\lambda_1(\rho_{r+1}(y) - \rho_1(y))\rho_1 + \ldots + \lambda_r(\rho_{r+1}(y) - \rho_r(y))\rho_r = 0$$
En choisissant ensuite, pour chaque $k \in [\![1, r]\!]$, y tel que $\rho_k(y) \neq \rho_{r+1}(y)$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence, on voit que $\lambda_k = 0$. On a montré que $(\rho_1, \dots, \rho_{r+1})$ est libre.

4. (a) Pour tous $x \in L^n$ et $h \in L^*$, on a :
$$\begin{aligned} 0 = \theta(b(hx)) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \theta[f(\gamma)\gamma(hx)] \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \theta[f(\gamma)(\gamma(h)\gamma(x))] \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma(h)\theta[f(\gamma)\gamma(x)] \end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout $h \in L^*$, on peut écrire :
$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \theta[f(\gamma)\gamma(x)]\gamma = 0$$
Les éléments de Γ sont de L dans L. Ils induisent donc des morphismes du groupe L^* dans lui-même, évidemment deux à deux distincts. Donc, par III.3.,
$$\forall \gamma \in \Gamma,\ \theta[f(\gamma)\gamma(x)] = 0$$
En particulier, pour $\gamma = e_\Gamma = \mathrm{Id}_L$:
$$\theta[f(e_\Gamma)x] = 0$$
Ceci étant vrai pour tout $x \in L^n$, et parce que $f(e_\Gamma) \in \mathrm{GL}_n(L)$, $\theta = 0$.

(b) Soit F le sous-espace vectoriel de L^n engendré par la famille $(b(x))_{x\in L^n}$. Si F n'est pas égal à E, il existe une forme linéaire non nulle θ sur L^n dont la restriction à F est nulle, ce qui contredit III.3.a. Donc $F = E$.

(c) $B(M)$ est la matrice dont le i-ième vecteur colonne est $b(x_i)$. Elle est donc inversible.

[2] Mais chacun de ces choix ne correspond pas forcément à un élément de γ, car si les e_k sont linéairement indépendants, ils ne sont pas "algébriquement indépendants". On peut en fait démontrer que Γ, appelé groupe de Galois de L sur K, a un cardinal majoré par $\dim_K(L)$. Lorsque l'égalité a lieu, l'extension de corps est dite galoisienne.

IV : Cocycles

1. - Réflexivité : $\forall \gamma \in \Gamma,\ f(\gamma) = e_G^{-1} f(\gamma)^\gamma e_G$ donc $f \sim f$.
   - Symétrie : Si $\forall \gamma \in \Gamma,\ f(\gamma) = b^{-1} f'(\gamma)^\gamma b$, alors $\forall \gamma \in \Gamma,\ f'(\gamma) = (b^{-1})^{-1} f(\gamma)^\gamma (b^{-1})$.
   - Transitivité : Si $\forall \gamma \in \Gamma,\ f(\gamma) = b^{-1} f'(\gamma)^\gamma b,\ f'(\gamma) = (b')^{-1} f''(\gamma)^\gamma b'$ alors $\forall \gamma \in \Gamma,\ f(\gamma) = (b'b)^{-1} f''(\gamma)^\gamma (b'b)$

2. Les cocycles sont les applications de Γ_2 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui vérifient

$$f(1) = f(1)f(1), \qquad f(1) = f(-1)\overline{f(-1)},$$
$$f(-1) = f(-1)\overline{f(1)}, \qquad f(-1) = f(1)f(-1)$$

ce qui équivaut à $f(1) = I_n,\ f(-1)\overline{f(-1)} = I_n$. Ils sont donc en bijection, par $f \mapsto f(-1)$, avec l'ensemble des matrices M vérifiant $M\overline{M} = I_n$. Et deux cocycles f et f' sont équivalents si et seulement si il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que, en posant $M = f(-1)$, $M' = f'(-1)$, on ait $M' = BM\overline{B}^{-1}$.

Soit maintenant un cocycle f, et $M = f(-1)$. D'après III.1.b., il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = C\overline{C}^{-1} = CI_n\overline{C}^{-1}$, ce qui montre que f est équivalente à 0. Donc $\mathcal{H}(\Gamma_2, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = \{0\}$.

3. (a) Soit maintenant un cocycle f. Il s'agit de montrer que f est équivalent au cocycle nul. Soient, comme en III.3., M telle que $B(M) \in \mathrm{GL}_n(L)$. On a, pour tout $\eta \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} {}^\eta B &= \sum_{\gamma\in\Gamma} {}^\eta f(\gamma)^\eta\gamma(M) = \sum_{\gamma\in\Gamma} {}^\eta f(\gamma)(\eta\gamma)(M) \\ &= \sum_{\xi\in\Gamma} {}^\eta f(\eta^{-1}\xi)\xi(M) = \sum_{\xi\in\Gamma} {}^\eta[f(\eta^{-1})({}^{\eta^{-1}} f(\xi))]\xi(M) \\ &= {}^\eta f(\eta^{-1}) \sum_{\xi\in\Gamma} f(\xi)\xi(M) = {}^\eta f(\eta^{-1})B \end{aligned}$$

   D'où[3]

$$B^{-1}f(\eta)^\eta B = B^{-1}f(\eta)^\eta f(\eta^{-1})B = B^{-1}f(\eta\eta^{-1})B = e_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

   On a montré $\mathcal{H}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(L)) = 0$.

   (b) Pour $K = \mathbb{R}$ et $L = \mathbb{C}$, $\Gamma = \Gamma_2$ d'après III.2.a., l'action de Γ étant la même que celle décrite en I.3. On retrouve donc le résultat de IV.2.

4. (a) ${}^u f(\gamma_1\gamma_2) = u(f(\gamma_1\gamma_2)) = u(f(\gamma_1)^{\gamma_1} f(\gamma_2)) = u(f(\gamma_1))^{\gamma_1} u(f(\gamma_2)) = {}^u f(\gamma_1)^{\gamma_1}({}^u f(\gamma_2))$.

   (b) Si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $f(\gamma) = b^{-1}f'(\gamma)^\gamma b$ alors $u(f(\gamma)) = u(b)^{-1}u(f'(\gamma))u({}^\gamma b)$, donc ${}^u f(\gamma) = u(b)^{-1\,u} f'(\gamma)^\gamma u(b)$ et ${}^u f \sim {}^u f'$.

5. (a) Pour tous γ in Γ et $a \in A$, $u({}^\gamma a) = {}^\gamma u(a) = {}^\gamma e_G = e_G$, d'où ${}^\gamma a \in \Gamma$.

   (b) On a, pour tout $f \in Z(\Gamma, A)$, $(\tilde{u} \circ \tilde{i})([f]) = [u \circ i \circ f] = 0$ (puisque f est à valeurs dans $A = \mathrm{Ker}(u)$). Donc $\mathrm{Im}(\tilde{i}) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{u})$.

   Réciproquement, soit $f \in Z(\Gamma, B)$ tel que que $[f] \in \mathrm{Ker}(\tilde{u})$. Alors $[{}^u f] = 0$, et il existe $b \in C$ tel que $b^{-1\,u} f(\gamma)^\gamma b = e_C$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Puisque u est surjective, il existe $a \in B$ tel que $b = u(a)$, et on a $a^{-1}f(\gamma)^\gamma a \in \mathrm{Ker}(u) = A$. Si on note $g : \Gamma \to A$ l'application définie par $g(\gamma) = a^{-1}f(\gamma)^\gamma a$, on vérifie $g \in Z(\Gamma, A)$ et $[f] = \tilde{i}([g])$.

   (c) Soit $f \in Z(\Gamma, A)$ tel que $\tilde{i}([f]) = 0$. Il existe $b \in B$ tel que $\forall \gamma \in \Gamma,\ f(\gamma) = b^{-1\,\gamma} b$. On souhaite montrer $[f] = 0$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que $\forall \gamma \in \Gamma,\ f(\gamma) = a^{-1\,\gamma} a$. Or, puisque $f(\gamma) \in A = \mathrm{Ker}(u)$, $u(b)^{-1\,\gamma} u(b) = e_C$, d'où $u(b) \in C^\Gamma$. Il existe donc $c \in B^\Gamma$ tel que $u(b) = u(c)$. En posant $a = c^{-1}b$, on a $u(a) = e_C$, donc $a \in A$, puis, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $a^{-1\,\gamma} a = b^{-1}c^\gamma c^{-1\,\gamma} b = b^{-1\,\gamma} b = f(\gamma)$ (car $c \in B^\Gamma$).

[3] f étant un cocycle, $f(e_\Gamma) = f(e_\Gamma e_\Gamma) = f(e_\Gamma)\ {}^{e_\Gamma} f(e_\Gamma) = f(e_\Gamma)^2$ d'où $f(e_\Gamma) = e_G$.

V : Exemples d'ensembles $\mathcal{H}(\Gamma, G)$

1. (a) L'image J de l'application $M \mapsto M^2$ de G dans lui-même est, d'après II.3.b. ouvert et fermé. G étant connexe par arc, et J non vide, cela entraîne $J = G$.

   (b) Les cocycles f de Γ_2 dans G sont, comme en IV.2., en bijection par $f \mapsto f(-1)$ avec les éléments M de G vérifiant $M\overline{M} = I_n$. Or, pour une telle matrice, $M^2 = M.I_n.\overline{M}^{-1}$, donc $\tilde{u}([f]) = 0$.

   (c) On a, avec les notations de IV.5. et le résultat de IV.5.b., $\mathrm{Im}(\tilde{i}) = \mathrm{Ker}(\tilde{u}) = \mathcal{H}(\Gamma_2, G)$. Or $A = \{M \in G; M^2 = I_n\}$ est fini d'après II.1. Donc $Z(\Gamma_2, A)$ aussi, ainsi que $\mathcal{H}(\Gamma_2, A)$ et, bien sûr, $\mathrm{Im}(\tilde{i})$.

2. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. M est élément de $SO_2(\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

   Un calcul facile montre que ces conditions sont équivalentes à :

$$\begin{cases} d = a \\ c = -b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

   Et on vérifie immédiatement

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

   d'où la commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$.

   Montrons maintenant que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ vérifie la condition (L). Posons

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{C});\ \Re(a) > 0 \right\}$$

   et définissons $\psi : A \to \mathbb{C}$ par $\psi(M) = b$. A est un ouvert de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ qui contient I_n, et ψ une application continue injective. L'image de A par ψ est $V = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ 1 - z^2 \in \mathbb{R}_-\} = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$ qui est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $\phi : A \to V$ l'application (bijective et continue) induite par ψ.

   Pour voir que ϕ^{-1} est continue, considérons la bijection $\xi : \{a \in \mathbb{C};\ \Re(a) > 0\} \to \mathbb{C} \setminus R_-$ définie par $\xi(a) = a^2$. En posant $a = x + iy$, on a $\xi(a) = (x^2 - y^2) + 2ixy$. ξ est C^1 et sa matrice jacobienne (en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$) vaut $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, qui est inversible en tout point. Donc ξ est un C^1 difféomorphisme, et $\phi^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \xi^{-1}(1 - z^2) & -z \\ z & \xi^{-1}(1 - z^2) \end{pmatrix}$ est de classe C^1.

   Il ne reste plus qu'à choisir un ouvert U de A contenant I_n, pour lequel $\forall (M, N) \in U,\ MN \in A$ (il en existe par continuité de $(M, N) \mapsto MN$), puis V_1 et f comme en II.2. On a, pour tout $(z, w) \in V_1$, $f(z, w) = \xi^{-1}(1 - w^2)z + \xi^{-1}(1 - z^2)w$, donc f est bien de classe C^1.

   (b) Si $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in A$, alors ${}^tMM = M^2 = I_2$, d'où $b = 0$ et $a = \pm 1$. Donc $A = \{I_2, -I_2\}$. Comme $A \subset M_2(\mathbb{R})$, l'action de Γ_2 sur A par conjugaison est triviale (${}^\gamma M = M$). Les cocycles sont donc les morphismes de Γ_2 dans A (il y en a deux), et, vu la commutativité de A, l'équivalence entre cocycles ($\exists b \in A; f(\gamma) = b^{-1} f'(\gamma) {}^\gamma b$) est l'égalité. Donc $|\mathcal{H}(\Gamma_2, A)| = 2$.

(c) Soit f le cocycle non nul de Γ_2 dans A : $f(1) = I_2$, $f(-1) = -I_2$. Si $\tilde{i}[f] = 0$, alors il existe $B \in SO_2(\mathbb{C})$ tel que $-I_2 = B^{-1} I_2 \overline{B}$, d'où, en tenant compte de ${}^tBB = I_2$, ${}^t\overline{B}B = -I_2$. C'est impossible, puisque ${}^t\overline{B}B$ est hermitienne définie positive, tandis que $-I_2$ est hermitienne définie négative (mais l'esprit du problème était plutôt d'utiliser IV.5.c.). Donc $\mathrm{Im}(\tilde{i})$ est de cardinal 2.

Montrons maintenant, pour établir la surjectivité de u à travers V.1.a, et en vue d'utiliser IV.5., que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ est la réunion des quatres parties

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{C}); \Re(a) > 0 \right\}, \qquad \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{C}); \Re(a) < 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} it & -\sqrt{1+t^2} \\ \sqrt{1+t^2} & it \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \left\{ \begin{pmatrix} it & \sqrt{1+t^2} \\ -\sqrt{1+t^2} & it \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

La première est connexe par arcs en tant qu'image par l'application continue ϕ^{-1} du connexe par arc V. La seconde l'est pour une raison similaire. Les troisièmes et quatrièmes sont des images de $\mathbb{R}$ par une application continue, donc connexes par arcs. Enfin, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$ est connexe par arcs (image continue de $\mathbb{R}$ par une application continue), contenu dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$, et rencontre les quatre parties précédentes. Il en résulte[4] que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

On peut maintenant conclure $\mathrm{Ker}(\tilde{u}) = \mathrm{Im}(\tilde{i})$ par IV.5.b., et $\mathrm{Ker}(\tilde{u}) = \mathcal{H}(\Gamma_2, \mathrm{SO}_2(\mathbb{C}))$ par V.1.b. Donc $|\mathcal{H}(\Gamma_2, \mathrm{SO}_2(\mathbb{C}))| = 2$.

3. (a) Comme σ est d'ordre 3, il est clair que i est un morphisme. Et vu que l'action de Γ, tant sur G que sur H, est triviale, i est un Γ-morphisme.

   Notons que i étant injective, on peut identifier $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ à son image dans $H = S_3$, qui n'est autre que le groupe alterné A_3, noyau du morphisme signature $\varepsilon : S_3 \to \Gamma_2$. Faisons opérer trivialement Γ sur Γ_2. Alors, comme ε est surjective et comme $\varepsilon((S_3)^\Gamma) = (\Gamma_2)^\Gamma$ (immédiat), $\tilde{i}$ est réduit à $\{0\}$ d'après IV.5.c.

   (b) On identifie encore G et son image A_3. Vu la trivialité de l'action de Γ sur G et la commutativité de G, les éléments de $Z(\Gamma, G)$ sont les morphismes de Γ dans G (il y en a trois, déterminés par l'image de $[1]_3$)) et l'équivalence de deux cocycles est l'égalité. Soient f_1 et f_2 les deux cocycles définis par $f_1([1]_3) = \sigma$, $f_2([1]_3) = \sigma^2$. Alors les cocycles ${}^if_1$ et ${}^if_2$ de $Z(\Gamma, H)$ sont équivalents car, en notant τ la transposition $(2,3)$, on a $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^2$, d'où $f_2(\gamma) = \tau^{-1} f_1(\gamma) \tau$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Donc $\tilde{i}([f_1]) = \tilde{i}([f_2])$ et $\tilde{i}$ n'est pas injective (alors que son noyau est nul).

[4] Une autre possibilité était de montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ est l'image de $\mathbb{C}$ par l'application continue $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.