

# Mines 2017 : PSI, maths 1

yann.villessuzanne@prepas.org

1. Comme  $(\mathbf{P}(S_k = i))_{1 \leq i \leq 5}$  est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 1) = \sum_{i=1}^5 \mathbf{P}(S_{k+1} = 1 \mid S_k = i) \mathbf{P}(S_k = i) = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^5 \mathbf{P}(S_k = i)$$

vu que  $\mathbf{P}(S_{k+1} = 1 \mid S_k = 1) = 0$  et  $\mathbf{P}(S_{k+1} = 1 \mid S_k = i) = 1/3$  pour  $2 \leq i \leq 5$ .

2. Posons  $b_{i,j} = \mathbf{P}(S_{k+1} = i \mid S_k = j)$ . Ces quantités sont données par l'énoncé et indépendantes de  $k$ . Le  $i$ -ème coefficient du vecteur colonne  $BX_k$  vaut alors

$$(BX_k)_i = \sum_{j=1}^5 b_{i,j}(X_k)_j = \sum_{j=1}^5 \mathbf{P}(S_{k+1} = i \mid S_k = j) \mathbf{P}(S_k = j) = \mathbf{P}(S_{k+1} = i) = (X_{k+1})_i$$

d'après la formule des probabilités totales. On a bien  $X_{k+1} = BX_k$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , où

$$B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. En notant  $U$  le vecteur colonne de  $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R})$  dont tous les coefficients valent 1, on observe que  ${}^tBU = U$ , donc 1 est valeur propre de la matrice  ${}^tB$  et  $U$  est un vecteur propre associé.

4. Un calcul donne  $BX_0 = X_0$ ; d'où  $X_k = X_0$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$  par une récurrence triviale. Comme la loi de  $S_k$  est caractérisée par le vecteur  $X_k$ , on en déduit que  $S_k$  et  $S_0$  ont la même loi pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , d'où le résultat.

5. Non! Par exemple,  $0 = \mathbf{P}(S_0 = S_1 = 1) = \mathbf{P}(S_0 = 1, S_1 = 1) \neq \mathbf{P}(S_0 = 1) \cdot \mathbf{P}(S_1 = 1) = 1/4^2$ .

6. Comme  $u(x) = x$ , une récurrence triviale donne  $u^l(x) = x$  pour tout  $l \in \mathbf{N}$ . On en déduit que  $r_k(x) = x$  qui converge donc vers  $x$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

7. Il existe  $y \in E$  tel que  $x = u(y) - y$ . Ainsi,  $u^l(x) = u^{l+1}(y) - u^l(y)$  est donc le terme d'une série télescopique. On en déduit que  $r_k(x) = \frac{1}{k}(u^k(y) - y)$ . Or une récurrence triviale montre que pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\|u^k(y)\| \leq \|y\|$ . L'inégalité triangulaire donne alors  $\|r_k(x)\| \leq \frac{2}{k}\|y\| \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Bref,  $r_k(x) \rightarrow 0_E$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

8. Notons  $F = \text{Ker}(u - I_E)$  et  $G = \text{Im}(u - I_E)$ .

Si  $x \in F \cap G$ , alors d'après les deux questions précédentes,  $r_k(x)$  tend vers  $x$  et vers  $0_E$  quand  $k \rightarrow \infty$ , donc  $x = 0_E$ . Ainsi la somme  $F + G$  est directe. De plus,  $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = \dim E$  d'après le théorème du rang, d'où  $F \oplus G = E$ .

9. Comme  $E = F \oplus G$ , le vecteur  $x$  se décompose de façon unique comme  $x = y + z$  où  $y \in F$  et  $z \in G$ . On a  $r_k(x) = r_k(y) + r_k(z) \rightarrow y + 0 = y$  quand  $k \rightarrow \infty$  d'après les questions 6 et 7. Ainsi  $p(x) = y$ ; comme  $y$  est le projeté de  $x$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ , l'endomorphisme  $p$  est donc la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

**10.** Il suffit probablement d'écrire que c'est traduction immédiate de la question précédente dans le contexte matriciel.

Si l'on souhaite être pédant : soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . On définit une norme sur  $E$  en posant  $\|x\|_E = \|\text{Coords}_{\mathcal{B}}(x)\|$  pour tout  $x \in E$ . Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ . De la condition  $\|AX\| \leq \|X\|$  pour tout  $X \in \mathbf{R}^n$ , on déduit facilement que  $\|u(x)\|_E \leq \|x\|_E$  pour tout  $x \in E$ . La question précédente montre alors que  $r_k \rightarrow p$  quand  $k \rightarrow \infty$ , où  $p$  est la projection sur  $\text{Ker}(u - I_E)$  parallèlement à  $\text{Im}(u - I_E)$ .

L'application  $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est continue car linéaire en dimension finie, donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_k) \rightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$  quand  $k \rightarrow \infty$ . On a  $R_k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_k)$  par linéarité. Bref,  $R_k \rightarrow P$  où  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ , et  $P^2 = P$  car  $p^2 = p$ .

**11.**  $AU = U$  si et seulement si  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(AU)_i = U_i$ . Comme  $(AU)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$  et  $U_i = 1$ , on a bien l'équivalence cherchée.

**12.** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices stochastiques. La matrice  $C = AB$  vérifie la condition (3) d'après l'expression du produit matriciel. Elle vérifie également la condition (4) car  $CU = A(BU) = AU = U$  d'après la question précédente.

**13.** *Fermé.* Soit  $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une suite de matrices stochastiques telles que  $A_k \rightarrow A$ . Notons  $(a_{i,j}^k)_{1 \leq i,j \leq n}$  les coefficients de la matrice  $A_k$ . Soit  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Comme  $A^k$  est stochastique,  $a_{i,j}^k \geq 0$ . En faisant  $k \rightarrow \infty$ , il vient  $a_{i,j} \geq 0$ , donc  $A$  vérifie la condition (3). Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $A^k$  est stochastique,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j}^k = 1$ . En faisant  $k \rightarrow \infty$ , il vient  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ , donc  $A$  vérifie la condition (4). Bref,  $A$  est stochastique, donc  $\mathcal{E}$  est fermé.

*Variante.* On définit les applications  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$  suivantes : pour  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $\varphi_{i,j}(A) = a_{i,j}$  et pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\psi_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ . Ce sont des applications continues car linéaires en dimension finie. Les ensembles  $\varphi_{i,j}^{-1}(\mathbf{R}^+)$  et  $\psi_i^{-1}(\{1\})$  sont des fermés de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  comme images réciproques de fermés de  $\mathbf{R}$  par des applications continues ; leur intersection est également fermée, donc  $\mathcal{E}$  est une partie fermée.

*Convexe.* Soit  $A$  et  $B$  stochastiques,  $\lambda \in [0, 1]$  et  $C = \lambda A + (1 - \lambda)B$ . Avec des notations évidentes,  $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + (1 - \lambda)b_{i,j} \geq 0$  pour tous  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  et

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^n a_{i,j} + (1 - \lambda) \sum_{j=1}^n b_{i,j} = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1$$

pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , donc  $C$  vérifie les conditions (3) et (4) :  $C$  est stochastique donc  $\mathcal{E}$  est convexe.

**14.** En notant  $(AX)_i$  le  $i$ -ème coefficient du vecteur colonne  $AX$ , on a pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$|(AX)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq \|X\|_{\infty} \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \|X\|_{\infty}$$

car  $A$  est stochastique. En prenant le maximum sur  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il vient  $\|AX\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty}$ .

**15.** En utilisant la question 12, on voit par une récurrence triviale que la matrice  $A^p$  est stochastique. Ainsi d'après la question 11,  $A^p U = U$ , donc  $\text{Vect}(U) \subset \text{Ker}(A^p - I_n)$ . Montrons l'autre inclusion.

Soit  $X \in \text{Ker}(A^p - I_n)$ ,  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  et soit  $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j)$ . Notons  $(\alpha_{i,j})$  les coefficients de la matrice stochastique  $A^p$ . On a

$$x_s = (X)_s = (A^p X)_s = \sum_{j=1}^n \alpha_{s,j} x_j \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{s,j} x_s = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{s,j} \right) x_s = x_s$$

donc les inégalités ci-dessus sont des égalités, Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\alpha_{s,j} x_j = \alpha_{s,j} x_s$  donc  $x_j = x_s$  car  $\alpha_{s,j} > 0$ . Ainsi  $x_1 = \dots = x_n$  donc  $X = x_1 U \in \text{Vect}(U)$ .

Bref,  $\text{Ker}(A^p - I_n) = \text{Vect}(U)$  et en particulier  $\dim \text{Ker}(A^p - I_n) = 1$ .

**16.** Comme  $A$  est stochastique, on a  $AU = U$  donc  $\text{Vect}(U) \subset \text{Ker}(A - I_n)$ . Dans l'autre sens, soit  $X \in \text{Ker}(A - I_n)$ . On a  $AX = X$  donc par une récurrence triviale,  $A^p X = X$ , donc  $X \in \text{Ker}(A^p - I_n) = \text{Vect}(U)$ . On a bien  $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(U)$ .

**17.** Pour tout  $l \in \mathbf{N}$ , la matrice  $A^l$  est stochastique donc à coefficients positifs.  $kR_k$  étant la somme de matrices à coefficients positifs, elle l'est également ; ainsi  $R_k$  vérifie la condition (3). De plus,  $R^k U = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l U = U$  car  $A^l U = U$ . Donc  $R_k$  vérifie la condition (4), donc  $R_k$  est bien stochastique.

*Remarque :* on pourrait aussi utiliser la convexité de  $\mathcal{E}$  montrée à la question 13, mais la notion de barycentre n'est plus au programme.

**18.** La question 10 est applicable en prenant la norme infinie d'après la question 14. On en déduit qu'il existe une matrice  $P$  telle que  $R_k \rightarrow P$  quand  $k \rightarrow \infty$ . De plus,  $P$  est stochastique car  $\mathcal{E}$  est fermé. Enfin, on a montré à la question 10 que  $P$  est la matrice de la projection sur  $\text{Ker}(A - I_n)$  parallèlement à  $\text{Im}(A - I_n)$ , donc  $P$  est de rang  $\dim \text{Ker}(A - I_n) = 1$ .

**19.** Notons  $L$  la première ligne de la matrice  $P$  et  $L_i$  la  $i$ -ème ligne. Comme  $P$  est de rang 1, les lignes  $L_i$  et  $L$  sont liées. La ligne  $L$  n'est pas nulle car  $L$  est stochastique, donc il existe  $\mu_i$  tel que  $L_i = \mu_i L$ . Or  $1 = L_i U = \mu_i L U = \mu_i$  car  $L_i$  et  $L$  sont stochastiques, donc  $L_i = L$ . Toutes les lignes de  $P$  sont égales à  $L$ , donc  $P = UL$ .

**20.** On a

$$R_k A = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^{l+1} = \frac{1}{k} \left( \sum_{l=0}^k A^l - I_n \right) = \frac{k+1}{k} R_{k+1} - \frac{1}{k} I_n.$$

Le terme de gauche tend vers  $PA$  quand  $k \rightarrow \infty$ , tandis que celui de droite tend vers  $1 \cdot P - 0 \cdot I_n = P$ . Ainsi,  $PA = P$ .

Notons  $V = (1, 0, \dots, 0)$ , de sorte que  $VU = 1$  et donc  $VP = VUL = L$ . On a donc  $LA = VPA = VP = L$  donc  $L$  convient. Il reste à montrer l'unicité.

Toute matrice a le même rang que sa transposée donc  $\text{rang}({}^t A - I_n) = \text{rang}(A - I_n)$ . Le théorème du rang donne alors  $\dim \text{Ker}({}^t A - I_n) = \dim \text{Ker}(A - I_n) = 1$  d'après la question 16. Remarquons que  ${}^t A {}^t L = {}^t L$ , donc  ${}^t L \in \text{Ker}({}^t A - I_n)$ . Comme  ${}^t L \neq 0$ , on a donc

$$\text{Ker}({}^t A - I_n) = \text{Vect}({}^t L).$$

Soit  $\tilde{L}$  une matrice ligne stochastique vérifiant  $\tilde{L}A = \tilde{L}$ . On a  ${}^t \tilde{L} \in \text{Ker}({}^t A - I_n) = \text{Vect}({}^t L)$ , donc il existe  $\alpha \in \mathbf{R}$  tel que  $\tilde{L} = \alpha L$ . Comme  $L$  et  $\tilde{L}$  sont stochastiques,  $1 = \tilde{L}U = \alpha LU = \alpha$ , donc  $\tilde{L} = L$ , d'où l'unicité.

**21.**  $P$  est stochastique donc ses coefficients sont positifs ; comme  $L$  est la première ligne de  $P$ , ses coefficients sont également positifs.

Supposons par l'absurde qu'il existe un  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_i = 0$ . Soit  $V$  le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le  $i$ -ème qui vaut 1, de sorte que  $LV = 0$ . Comme  $L = LA$ , on a par récurrence triviale  $LA^p = L$ , d'où  $LA^p V = LV = 0$ . Or le vecteur colonne  $W = A^p V$  est la  $i$ -ème colonne de la matrice  $A^p$  et est donc à coefficients strictement positifs par hypothèse. Notons  $W = {}^t(w_1, \dots, w_n)$ . La somme  $LW = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$  est nulle et à termes positifs, donc pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i w_i = 0$ , donc  $\lambda_i = 0$  car  $w_i > 0$ , donc  $L = 0$  : c'est absurde car  $L$  est stochastique.

Bref, tous les coefficients de  $L$  sont strictement positifs.

- 22.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel normé de dimension finie tel que  $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$ . Dans la question question 8, on a montré que  $E = F \oplus G$  où  $F = \text{Ker}(u - I_E)$  et  $G = \text{Im}(u - I_E)$ . Comme  $u - I_E$  commute avec  $u$ , les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont stables par  $u$ . Notons  $v$  (respectivement  $w$ ) l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  (respectivement  $G$ ). On sait qu'alors le polynôme caractéristique de  $u$  se factorise en  $\chi_u = \chi_v \cdot \chi_w$ . Comme  $v = I_F$ ,  $\chi_v = (X - 1)^m$  où  $m = \dim F$ . De plus, si  $x \in \text{Ker}(w - I_G)$ , on a  $w(x) = x$ , donc  $u(x) = x$ , donc  $x \in F$ , donc  $x \in F \cap G = \{0\}$ . Ainsi 1 n'est pas valeur propre de  $w$ , donc  $\chi_w(1) \neq 0$ . Bref,  $\chi_u(X) = (X - 1)^m \chi_w(X)$  où  $\chi_w(1) \neq 0$ . On a montré que 1 est une valeur propre de  $u$  de multiplicité exactement  $m = \dim \text{Ker}(u - I_E)$ .

On applique cela à l'endomorphisme de  $E = \mathbf{R}^n$  canoniquement associé à la matrice  $A$ , qui est bien 1-lipschitzien d'après la question 14. On en déduit que 1 est une racine de  $\chi_u = \chi_A$  de multiplicité  $m = \dim \text{Ker}(A - I_n) = 1$ , ce qui est le résultat cherché.

- 23.** Soit  $\tilde{L} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16})$ . D'après le calcul fait à la question 4, le vecteur colonne  $V = {}^t\tilde{L}$  vérifie  $BV = V$ . La matrice ligne  $\tilde{L}$  est donc stochastique et vérifie  $\tilde{L}A = \tilde{L}$ . D'après la question 20, on a donc  $L = \tilde{L}$ . La matrice  $P$  vaut donc  $P = UL = U\tilde{L}$ , d'où

$$P = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 24.** L'existence est donnée par la question 4. Montrons l'unicité : supposons que les lois de  $S_k$  soient toutes identiques. Avec les notations de la première partie, on doit avoir en particulier  $X_1 = X_0$  et donc  $BX_0 = X_0$ . La matrice ligne  ${}^tX_0$  est alors stochastique et vérifie  ${}^tX_0A = {}^tX_0$ . D'après la question 20, on a donc  ${}^tX_0 = L$  soit  $X_0 = {}^tL = {}^t(\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16})$ . Comme le vecteur  $X_0$  caractérise la loi de la variable aléatoire  $S_0$ , on a donc l'unicité.