

Énoncé et corrigé Centrale - 2013 MP - Maths 2

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{O}(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n ;
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, respectivement strictement positives ;
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note tM sa matrice transposée, $\text{tr}(M)$ sa trace, et, pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, m_{ij} le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par $\|M\| = \sup(|m_{ij}|, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2)$.

I Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

- Q1.** On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
- a/ Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est autoadjoint défini positif si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - b/ Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Q2.** Dans cette question, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint, défini positif, tel que $v^2 = u$.
- a/ Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, autoadjoint défini positif et vérifiant $v^2 = u$, et soit λ une valeur propre de u . Montrer que v induit un endomorphisme de $\text{Ker}(u - \lambda Id)$ que l'on déterminera.
 - b/ En déduire v , puis conclure.
 - c/ Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.
- Q3.** Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
- a/ Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$.
 - b/ En déduire qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
- Q4.** Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.
- Q5.**
- a/ Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - b/ Montrer que $\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - c/ Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - d/ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Un tel couple est-il unique ?
 - e/ Soit φ l'application de $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(O, S) = OS$ pour tout couple (O, S) de $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que φ est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

II Deux applications**Première application**

Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice U carrée de taille n , inversible, à coefficients complexes, telle que $U^t \bar{U} = I_n$ et $A = UBU^{-1}$, où $\bar{U}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de U .

- Q1.** Justifier que ${}^tA = U({}^tB)U^{-1}$.

- Q2.** On se propose de montrer qu'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P{}^tBP^{-1}$. Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = X + iY$.
- a/ Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
 - b/ Montrer que $AX = XB$ et $AY = YB$.
 - c/ Conclure.

- Q3.** On écrit P sous la forme $P = OS$, avec $O \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- a/ Montrer que $BS^2 = S^2B$, puis que $BS = SB$.
- b/ En déduire qu'il existe $O \in \mathcal{O}(n)$ tel que $A = OB{}^tO$.

Seconde application

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ au système

$$(*) \begin{cases} {}^tAA + {}^tXX &= I_n \\ {}^tAX - {}^tXA &= 0_n \end{cases}$$

- Q1.** Montrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de tAA appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.
- Q2.** On suppose dans cette question que les valeurs propres de tAA appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.
- a/ Justifier que l'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme $X = UH$, avec $U \in \mathcal{O}(n)$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - b/ Déterminer H .
 - c/ Montrer l'existence d'une solution $X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de $(*)$ appartenant à $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

III Valeurs propres d'une matrice

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

On note P_p le polynôme tel que, pour tout réel x , $P_p(x) = \det(xI_p - A_p)$.

- Q1.** Montrer qu'à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $(P_p(x))_{p \in \mathbb{N}^*}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2, que l'on précisera.
- Q2.** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2 - x| < 2$. Après avoir justifié l'existence d'un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $2 - x = 2 \cos \theta$, déterminer $P_p(x)$ en fonction de $\sin((p+1)\theta)$ et de $\sin(\theta)$.
- Q3.** Déterminer les valeurs propres de A_p .
- Q4.** Montrer que A_p est diagonalisable, et en déterminer une base de vecteurs propres, en précisant pour chacun la valeur propre associée.

VI

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Q1.** Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{tr}(AM)$. Dans la suite, A désigne la matrice définie dans cette question IV.1.
- Q2.**
- a/ Justifier l'existence de $M_n = \sup(f(O), O \in \mathcal{O}(n))$.
 - b/ Justifier que tAA admet n valeurs propres positives $\mu_1, \dots, \mu_n$, comptées avec multiplicités.
 - c/ Montrer que $M_n = \sup(\text{tr}(D\Omega), \Omega \in \mathcal{O}(n))$, où D est la matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}$.
 - d/ En déduire que $M_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$.

Q3. Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par $\forall \mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(\mathbf{M}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n m_{i,j}$.

a/ Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ telle que $\forall \mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(\mathbf{M}) = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{M})$.

b/ Montrer que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c/ Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{A}^{-1} {}^t\mathbf{A}^{-1}$.

d/ Montrer que $M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cos \frac{k\pi}{2n+1}}$.

e/ Donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin énoncé

I Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

- Q1.** a/ Soient $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$, $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$; $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X = \text{mat}_{\mathcal{B}} x$ et $Y = \text{mat}_{\mathcal{B}} y$
 $\implies$ La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée et $u^* = u$ alors :

$$\langle u(x)|y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \implies {}^t X {}^t A Y = {}^t X A Y$$

Et ceci pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc ${}^t A = A$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, $\langle x|u(x) \rangle = {}^t X A X > 0$ car u est défini positif, donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$\Leftarrow$ Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$${}^t X {}^t A Y = {}^t X A Y \implies \langle u(x)|y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Donc $u = u^*$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\langle x|u(x) \rangle = {}^t X A X > 0$ car A est défini positif, donc u est défini positif.

- b/ 0 n'est pas valeur propre de S , donc S est inversible, ${}^t S = S \implies {}^t S^{-1} = S^{-1}$ c-à-d S^{-1} est symétrique.

De plus le théorème spectral assure l'existence d'une matrice P orthogonale et d'une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, telles que $S = P D P^{-1}$, donc $S^{-1} = P \text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}) P^{-1}$, il apparaît bien que les valeurs propres de S^{-1} sont strictement positives.

- Q2.** a/ $v \circ (u - \lambda Id) = v^3 - \lambda v = (u - \lambda Id) \circ v$, alors $\ker(u - \lambda Id)$ est stable par v .

Posons donc $w = v / \ker(u - \lambda Id)$, w est évidemment symétrique défini positif, donc diagonalisable, soit donc $\mu > 0$ l'une de ses valeurs propres.

$\exists x \in \ker(u - \lambda Id) - \{0\}$ tel que $w(x) = \mu x$, donc $w^2(x) = v^2(x) = \mu^2 x = u(x) = \lambda x$

Donc $\mu = \sqrt{\lambda}$, comme w possède des valeurs propres, alors $\text{Sp}(w) = \{\sqrt{\lambda}\}$.

L'endomorphisme w est diagonalisable, donc $\ker(u - \lambda Id) = \ker(w - \sqrt{\lambda} Id)$, c-à-d $\forall x \in \ker(u - \lambda Id)$, $v(x) = \sqrt{\lambda} x$

- b/ L'endomorphisme u est diagonalisable, donc $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp} u} \ker(u - \lambda Id)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, x s'écrit d'une façon unique sous la forme $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp} u} x_{\lambda}$, alors $v(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp} u} \sqrt{\lambda} x_{\lambda}$,

ainsi v est bien déterminé et donc unique.

Reste à montrer que v existe. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$, $B = \text{mat}_{\mathcal{B}} v$. Le théorème spectral appliqué à A assure l'existence d'une matrice P orthogonale et d'une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, telles que $S = P D P^{-1}$, tous les λ_i sont > 0 , car u est défini positif, posons $B = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}$. On a bien $B^2 = A$ et B est symétrique et définie positive, c-à-d l'existence de v auto-adjoint défini positif tel que $v^2 = u$

- c/ Soient $\mu_1, \dots, \mu_r$ les valeurs propres distinctes de u et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives, considérons l'application : $\varphi : \mathbb{R}_{r-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^r$

$$Q \longmapsto (Q(\mu_1), \dots, Q(\mu_r))$$

φ est une application linéaire injective, les espaces $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ et $\mathbb{R}^r$ ont la même dimension, c'est donc un isomorphisme.

$(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_r}) \in \mathbb{R}^r$, $\exists ! Q \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $(Q(\mu_1), \dots, Q(\mu_r)) = (\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_r})$, on peut écrire :

$$Q(A) = Q(P \text{diag}(\mu_1 I_{m_1}, \dots, \mu_r I_{m_r}) P^{-1}) = P \text{diag}(Q(\mu_1) I_{m_1}, \dots, Q(\mu_r) I_{m_r}) P^{-1} = B.$$

- Q3.** a/ C'est évident que ${}^t A A$ est symétrique. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, ${}^t X {}^t A A X = \|AX\|^2 \geq 0$

Si $AX = 0$, alors $A^{-1} A X = 0$, c-à-d $X = 0$, donc ${}^t X {}^t A A X > 0$.

- b/ Il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t A A = S^2$ et ceci de la question précédente car ${}^t A A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De la question 1, S est inversible, posons $O = A S^{-1}$, alors ${}^t O O = S^{-1} {}^t A A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$.

S est unique, donc O aussi.

$$c/ \text{ On a } {}^tAA = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ses valeurs propres est $\{4, 16, 36\}$

Alors ${}^tAA = P \text{diag}(4, 16, 36) {}^tP$ où $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$, on prend alors :

$$S = P \text{diag}(2, 4, 6) {}^tP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ par conséquent } O = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Q4.

a/ L'application $\varphi_1 : A \mapsto ({}^tA, A)$ est linéaire et $\varphi_2 : (A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire, ces applications démarrent tous des espaces de dimensions finies, donc elles sont continues. $\mathcal{O}(n) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} \{I_n\}$, donc $\mathcal{O}(n)$ est un fermé.

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}(n)$, alors $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,j}| \leq 1$, alors $\|A\| \leq 1$, donc $\mathcal{O}(n)$ est borné, on est dans un espace de dimension finie alors $\mathcal{O}(n)$ est un compact.

b/ Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc continue.

Soit $(A_p)_p$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers A .

Soit $p \in \mathbb{N}$, on a ${}^tA_p = A_p$, donc ${}^tA = A$, car la transposition est continue.

${}^tX {}^tA_p X \geq 0$, donc ${}^tX {}^tA X \geq 0$ car φ est continue.

Donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé.

c/ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, posons pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$. On a $\|A_p - A\| = \frac{1}{p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

Les valeurs propres de A sont en nombre fini, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p \geq N, \frac{1}{p} \notin \text{Sp}(A)$.

Alors $\forall p \geq N, A_p \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, et $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d/ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A .

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(O_p, S_p) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A_p = O_p S_p$.

$\mathcal{O}(n)$ est un compact, il existe une sous suite $(O_{a(p)})_p$ de $(O_p)_p$ qui converge vers $O \in \mathcal{O}(n)$.

Comme l'application $\begin{matrix} \text{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} \end{matrix}$ est continue (cours), alors $O_{a(p)}^{-1}$ converge vers O^{-1} .

l'application $\begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{matrix}$ est continue, alors $O_{a(p)}^{-1} A_{a(p)}$ converge vers $O^{-1} A$.

Posons : $O^{-1} A = S$, alors $A = OS$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $O_{a(p)}^{-1} A_{a(p)} = S_{a(p)}$, la suite $(S_{a(p)})_p$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui est un fermé est convergente vers $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{orthogonale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{orthogonale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}}, \text{ il n'y a donc pas unicité de la décomposition polaire.}$$

Q5.

L'application $\begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{matrix}$ est continue, donc φ est continue.

De la question 3.b) φ est bijective.

Soit $(A_p)_p$ une suite d'éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = O_p S_p$ et $A = OS$ les décompositions polaires de A_p et de A , montrons que $\varphi^{-1}(A_p) = (O_p, S_p)$ tend vers $\varphi^{-1}(A) = (O, S)$ c'est à dire montrons que O_p tend vers O et S_p tend vers S .

On a ${}^tA_p A_p = S_p^2$ tend vers ${}^tA A = S^2$, alors $\text{tr}({}^tA_p A_p) = \text{tr}(S_p^2)$ tend vers $\text{tr}({}^tA A) = \text{tr}(S^2)$.

L'application $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, posons $\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}({}^tA A)}$.

Alors $\|S_p\|_2$ tend vers $\|S\|_2$, donc la suite $(S_p)_p$ est bornée et elle admet donc au moins une valeur d'adhérence (Bolzano).

Soient L_1 et L_2 deux valeurs d'adhérence de $(S_p)_p$, alors ils existent deux sous suites $(S_{a(p)})_p$ et $(S_{b(p)})_p$ de $(S_p)_p$ qui convergent respectivement vers L_1 et L_2 , alors $L_1^2 = L_2^2 = S^2$, les matrices L_1 et L_2 sont dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et de la question I.2) alors $L_1 = L_2 = S$ et la suite $(S_p)_p$ admet une seule valeur d'adhérence S .

Supposons par l'absurde que $(S_p)_p$ ne converge pas vers S , alors

$\exists \varepsilon, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N / \|S_n - S\| \geq \varepsilon$, ainsi on peut construire une sous suite $(S_{a(p)})_p$ de $(S_p)_p$ qui vérifie :

$\exists \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \|S_{a(p)} - S\| \geq \varepsilon ; (*)$

Par la même procédure la suite $(S_{a(p)})_p$ est bornée donc possède une valeur d'adhérence qui est celle de $(S_p)_p$ c-à-d S et ceci est absurde avec $(*)$

$O_p = A_p S_p^{-1}$ tend vers $O = AS^{-1}$.

II Deux applications

Première application

Q1. On a $\bar{A} = \bar{U} \bar{B} \bar{U}^{-1}$, les matrices A et B sont dans à coefficients réelles, donc $A = \bar{U} \bar{B} \bar{U}^{-1}$.

Alors ${}^t A = {}^t \bar{U}^{-1} ({}^t \bar{B}) {}^t \bar{U}$ et ${}^t \bar{U} = U^{-1}$, donc ${}^t A = U ({}^t B) U^{-1}$.

Q2. a/ Posons $Q(X) = \det(A + XB) \in \mathbb{R}[X]$, $Q(i) = \det(U) \neq 0$, donc Q est non nul, ses racines sont en nombres finis, il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\mu) \neq 0$ et $A + \mu B$ est inversible.

b/

$$\begin{aligned} A = UBU^{-1} &\implies AU = UB \\ &\implies AX + iAY = XB + iYB \\ &\implies AX = XB \text{ et } AY = YB \end{aligned}$$

c/ Alors

$$\begin{aligned} AX = XB \text{ et } AY = YB &\implies AX + \mu AY = XB + \mu YB \\ &\implies A(X + \mu Y) = (X + \mu Y)B \\ &\implies A = (X + \mu Y)B(X + \mu Y)^{-1} \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de $(A$ et ${}^t A)$ et $(B$ et ${}^t B)$, on obtient ${}^t A = (X + \mu Y) {}^t B (X + \mu Y)^{-1}$

La matrice $P = X + \mu Y$ qui est dans $GL_n(\mathbb{R})$ répond à la question.

Q3. a/ De ce qui précède $PBP^{-1} = A = {}^t P^{-1} B {}^t P$, alors ${}^t P P B = B {}^t P P$, par conséquent $S^2 B = B S^2$.

Or $S^2 = (S^2)$ et de la question I)2)c) il existe un polynôme Q tel que $S = Q(S^2)$, alors $BS = BQ(S^2) = Q(S^2)B = SB$.

b/ On alors, $A = OSBS^{-1}O^{-1} = OBO^{-1}$.

Seconde application

Q1. La matrice ${}^t AA$ est symétrique positive, donc ses valeurs propres sont positives.

Soit λ une valeur propre de ${}^t AA$, il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que ${}^t AAY = \lambda Y$.

La première équation du système entraîne que ${}^t Y {}^t AAY + {}^t Y {}^t XXY = {}^t Y Y$, alors $\lambda \|Y\|^2 + \|XY\|^2 = \|Y\|^2$, ce qui s'écrit $\frac{\|XY\|^2}{\|Y\|^2} = 1 - \lambda > 0$ car X est inversible. Donc $\lambda \in [0, 1[$.

Q2. a/ $\text{Sp}(I_n - {}^t AA) = \{1 - \lambda / \lambda \in \text{Sp}({}^t AA)\} \subset \mathbb{R}^{*+}$, donc si X solution de $(*)$ existe elle est inversible et de la partie I il existe $(U, H) \in \mathcal{O}_n \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $X = UH$.

b/ On a alors de la première équation du système $I_n - {}^t AA = H^2$, et H existe et unique de la partie I)2).

c/ Reste à donner une matrice orthogonale U telle que la matrice $X = UH$ est solution du système.

$\exists (O, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, / $A = OS$, alors, la matrice U , doit vérifier $S {}^t O U H = H {}^t U O S$, c'est la 2ème équation du système. On prend $U = O$, et on vérifiera que ça marche.

On a alors $SH = HS$ et la première équation du système entraîne $S^2 + H^2 = I_n$.

En appliquant la partie I, il existe un polynôme Q tel que $Q(I_n - {}^t AA) = H$, car $I_n - {}^t AA = H^2$, alors H est un polynôme en S^2 donc en S . Le choix donc de U est convenable.

III Valeurs propres d'une matrice

Q1. $P_1(x) = x - 2$ et $P_2(x) = (x - 2)^2 - 1$.

Pour $p \geq 3$, un développement suivant la première ligne de $P_p(x)$, donne $P_p(x) = (x - 2)P_{p-1}(x) - P_{p-2}(x)$.

Q2. L'application $\cos$ réalise une bijection de $]0, \pi[$ vers $] -1, 1[$, $(2 - x)/2 \in] -1, 1[$, donc $\exists ! \theta \in]0, \pi[$ tel que $2 - x = 2 \cos \theta$.

On remarque que $P_1(x) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta}$ et $P_2(x) = \frac{\sin(3\theta)}{\sin \theta}$

Soit $p \geq 3$, supposons que $P_{p-1}(x) = (-1)^{p-1} \frac{\sin(p\theta)}{\sin \theta}$ et $P_{p-2}(x) = (-1)^{p-2} \frac{\sin((p-1)\theta)}{\sin \theta}$, alors

$$\begin{aligned} P_p(x) &= (x - 2)P_{p-1}(x) - P_{p-2}(x) \\ &= 2 \cos \theta (-1)^p \frac{\sin(p\theta)}{\sin \theta} - (-1)^p \frac{\sin((p-1)\theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{(-1)^p}{\sin \theta} [2 \cos \theta \sin(p\theta) - \sin((p-1)\theta)] \\ &= \frac{(-1)^p}{\sin \theta} \sin(p+1)\theta \end{aligned}$$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, P_p(x) = (-1)^p \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin \theta}$.

Q3. La matrice A_p admet au plus p valeurs propres.

Cherchons ses valeurs propres x qui vérifient $|2 - x| < 2$,

$$\begin{aligned} P_p(x) = 0 &\iff \sin(p+1)\theta = 0 \\ &\iff (p+1)\theta = k\pi, \quad k \in \{1, \dots, p\} \text{ car } \theta \in]0, \pi[\\ &\iff \theta = \frac{k\pi}{p+1}, \quad k \in \{1, \dots, p\} \end{aligned}$$

Alors $x_k = 2 - 2 \cos \theta = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(p+1)}$ avec $k \in \{1, \dots, p\}$, comme le nombre de ces valeurs propres est p , ce sont donc les valeurs propres de A_p .

Q4. A_p est symétrique réelle (ou bien admet p valeurs propres distinctes) donc diagonalisable.

Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}$ où $\theta_k = \frac{k\pi}{p+1}$.

$$A_p \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_n - (2 - \lambda_k)x_{n+1} + x_{n+2} = 0 \\ 0 \leq n \leq p-1 \\ \text{avec la convention } x_0 = x_{p+1} = 0 \end{cases}$$

Mais $2 - \lambda_k = 2 \cos \theta_k$, alors x_n est de la forme $a e^{in\theta_k} + b e^{-in\theta_k}$ où $a, b \in \mathbb{C}$, et puisque $x_0 = 0$, alors

$$x_n = 2ia \sin n\theta_k, \text{ par conséquent } E_{\lambda_k}(A_p) = \text{vect} \begin{pmatrix} \sin \theta_k \\ \vdots \\ \sin p\theta_k \end{pmatrix}$$

VI

Q1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, considérons l'application linéaire suivante $\delta_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, alors l'appli-

cation $\delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, en effet :

$$A \longmapsto \delta_A$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A \in \ker \delta \iff \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ tr}(AM) = 0$$

En particulier $\text{tr}({}^tAA) = 0$, par conséquent $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = 0$, alors $A = 0$, δ est donc injective, les espaces

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont la même dimension qui est n^2 fini.

$f \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$, donc $\exists ! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \delta(A) = f$, autrement dit :

$$\exists ! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{tr}(AM)$$

Q2.

a/ f est linéaire, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, alors, f est continue.

$\mathcal{O}(n)$ est un compact et f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc M_n existe.

b/ Elle est évident que tAA est symétrique positive donc admet n valeurs propres positives comptés avec leurs multiplicités.

c/ Pour toute $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application $\mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(n)$ est une bijection.

$$M \longmapsto BM$$

De la partie I il existe $(U, H) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = UH$,

$\exists P \in \mathcal{O}(n)$ telle que ${}^tAA = P(D^2){}^tP$, et $H = PD{}^tP$ et $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

alors :

$$\begin{aligned} M_n &= \sup\{\text{tr}(OA) / O \in \mathcal{O}(n)\} \\ &= \sup\{\text{tr}(OUH) / O \in \mathcal{O}(n)\} \\ &= \sup\{\text{tr}(\Omega H) / \Omega \in \mathcal{O}(n)\} \\ &= \sup\{\text{tr}(\Omega P D {}^tP) / \Omega \in \mathcal{O}(n)\} \\ &= \sup\{\text{tr}(\Omega D) / \Omega \in \mathcal{O}(n)\} \end{aligned}$$

d/ D'une part $\sup\{\text{tr}(\Omega D) / \Omega \in \mathcal{O}(n)\} \geq \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}$ car I_n est une matrice orthogonale.

D'autre part si on pose $\Omega = (\omega_{i,j})$, alors $\text{tr}(\Omega D) = \sum_{i=1}^n \omega_{i,i} \sqrt{\mu_i}$,

Mais Ω est orthogonale, donc $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \omega_{i,j} \leq 1$, donc $\text{tr}(\Omega D) \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}$, alors $M_n \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}$.

Par conséquent : $M_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}$.

Q3.

a/ Posons $A = (a_{i,j})$, pour $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, $f(E_{k\ell}) = \text{tr}(AE_{k\ell}) = a_{\ell k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \ell \\ 1 & \text{si } k \geq \ell \end{cases}$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b/ Posons $X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} AX = Y &\iff \begin{cases} x_1 + \dots + x_n &= y_1 \\ x_2 + \dots + x_n &= y_2 \\ \dots &= \dots \\ x_n &= y_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_1 - y_2 &= x_1 \\ \dots &= \dots \\ y_{n-1} - y_n &= x_{n-1} \\ y_n &= x_n \end{cases} \\ &\iff A^{-1}Y = X \end{aligned}$$

$$\text{où } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c/ Posons } J = A^{-1t} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Attention, ce n'est pas } A_n \text{ de la partie III.}$$

Mais déjà on peut remarquer qu'elle est symétrique réelle.

On reprend les notations de III, $2 - x = 2 \cos \theta$.

$$\begin{aligned} (-1)^n \chi_J(x) &= \det(xI_n - J) \\ &= (x-1)P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) \quad \text{Décomposition suivant la dernière ligne} \\ &= (x-1)(-1)^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} - (-1)^n \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sin \theta} [\sin n\theta (2 \cos \theta - 1) - \sin(n-1)\theta] \\ &= \frac{(-1)^n}{\sin \theta} [\sin(n+1)\theta - \sin n\theta] \\ &= \frac{(-1)^n}{\cos \theta / 2} [\cos(2n+1)\theta / 2] \end{aligned}$$

Alors

$$\chi_J(x) = 0 \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}; \quad k \in \{0, \dots, (n-1)\}$$

$$\text{Ainsi } x = 2(1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}) = 2(1 + \cos(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n+1})) = 2(1 + \cos \frac{2(n-k)\pi}{2n+1}) = 4 \cos^2 \frac{(n-k)\pi}{2n+1}$$

$$\text{Donc } \text{Sp}(A^{-1t} A^{-1}) = \left\{ 4 \cos^2 \frac{(n-k)\pi}{2n+1} / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} = \left\{ 4 \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} / k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$$

d/ On a ${}^t A A = J^{-1}$, donc $\mu_k^{-1} = 4 \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1}$, par conséquent :

$$M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cos \frac{k\pi}{2n+1}}$$

$$\text{e/ Remarquons que } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos \frac{k\pi}{2n+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n+1})} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)})}.$$

$$\text{On a } \forall x \in]0, \pi/2[, \quad 0 < x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

Donc

$$s_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{2k+1}{(2n+1)} \pi} \leq M_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{2k+1}{(2n+1)} \pi - \frac{(2k+1)^3}{24(2n+1)^3} \pi^3} \stackrel{\text{déf}}{=} S_n$$

Mais

$$s_n = \frac{(2n+1)}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} = \frac{(2n+1)}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n \ln n}{\pi}$$

$$\text{En effet la série } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \text{ diverge et } \frac{1}{2k-1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k}, \text{ de plus } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

$$\text{Pour montrer que } M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n \ln n}{\pi}, \text{ il suffit de montrer que } S_n - s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(s_n).$$

Lorsque cela est possible, on a $\frac{1}{x - \frac{x^3}{24}} - \frac{1}{x} = \frac{x}{24(1 - \frac{x^2}{24})}$, alors :

$$0 \leq S_n - s_n = \frac{1}{24} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{2k+1}{2n+1} \pi}{\left(1 - \frac{(2k+1)^2}{24(2n+1)^2} \pi^2\right)} \leq \frac{1}{24} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{2n+1} \pi}{\left(1 - \frac{k^2}{24(2n+1)^2} \pi^2\right)} \leq \frac{2n+1}{24\pi} \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{2n+1} \pi}{\left(1 - \frac{k^2}{24(2n+1)^2} \pi^2\right)}$$

$$\text{Mais } \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{2n+1} \pi}{\left(1 - \frac{k^2}{24(2n+1)^2} \pi^2\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{x}{1 - \frac{x^2}{24}} dx = -12 \ln \left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right)$$

$$\text{Alors } \frac{2n+1}{24\pi} \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{2n+1} \pi}{\left(1 - \frac{k^2}{24(2n+1)^2} \pi^2\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n}{\pi} \ln \left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n \ln n)$$

Par conséquent : $S_n - s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(s_n)$, donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} s_n$.

Conclusion :

$$M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n \ln n}{\pi}$$

Pour les coquilles....., sadikoulmeki@yahoo.fr