nom :

spé MP1 carnot DIJON

(I.4.d) n'est pas trivial ; II.3.b devrait supposer a non nul, pour écarter le cas du cercle point (0,0) où il est vrai qu'il n'y a pas de tangente ;)

(L'intéréssante faute de frappe à la fin de la première ligne de la question (1.d) du troisième exercice, n'a pas du perturber beaucoup les candidats, qui l'ont remarquée !)

Exercice 1

1) Coefficients de FOURIER de f : On rappelle que $\boxed{\mathbf{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos nwtdt \text{ avec } w = \frac{2\pi}{T}}}$;

Ici f est impaire donc les a_n sont nuls et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ntdt = \frac{2}{\pi}[-\frac{1}{n}\cos nt]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}(1-\cos n\pi)$; Il reste $\boxed{\mathbf{b_{2p} = 0 \,\Big|\, b_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)}}}$

---

2) Expression à exprimer à l'aide de : Comme f est normalisée en ses points de discontinuité, le théorème de DIRICHLET donne $f(t) = \frac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin[(2p+1)t]}{2p+1}$, et on constate immédiatement que la limite demandée est $\boxed{\mathbf{f(k\frac{\pi}{4})\sin[3k\frac{\pi}{4}]}}$

---

3) Convergence de la suite $\mathbf{S_N}$: Il y a peu de théorèmes pour les suites (monotone bornée, Cauchy, suites adjacentes) tandis qu'il y en a beaucoup pour les séries ! On a donc intérêt à remarquer que la suite proposée est de même nature que sa série des DIFFÉRENCE : $u_N = S_{N+1} - S_N = \frac{1}{-8N+3} + \frac{1}{8N+13} = \frac{16}{(-8N+3)(8N+13)} \sim \frac{-16}{84N^2} = -\frac{1}{4N^2}$, série convergente puisque de RIEMANN avec $\alpha = 2 > 1$.

4.a) Calculer $\sigma_{\mathbf{p}}$: À cause de la 2π périodicité de sin, on constate que σ_p est 4-périodique. On nous a fait cadeau du calcul des trois premiers termes, il reste à calculer σ_3. Pour simplifier on remarque que $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ et donc que $2\sigma_3$ est la somme des termes qui sont dans les lignes de l'accolade suivante :

$$2\sigma_3 = \sum_{k=0}^{7}(\cos[(2p-2)k\frac{\pi}{4}] - cos[(2p+4)k\frac{\pi}{4}]) = \sum_{k=0}^{7}(\cos[k\pi] - cos[5k\frac{\pi}{2}]) = \begin{cases} +1-1 & 0 \\ -1-0 & \text{-1} \\ +1+1 & 2 \\ -1-0 & \text{-1} \\ +1-1 & 0 \\ -1-0 & \text{-1} \\ +1+1 & 2 \\ -1-0 & \text{-1} \end{cases} = 0 \text{ et ainsi } \boxed{\sigma_3 = 0}$$

4.b) Convergence d'une suite : On a intérêt d'après la question précédente à procéder par "PAQUETS de 4". Comme les paquets sont de cardinal fini 4 et que le terme général $u_p = \frac{\sigma_p}{2p+1}$ tend vers 0, la convergence de la série paquet, impliquera celle de la série dont la somme partielle d'indice $4N$ est proposée par l'énoncé.

Or $v_k = u_{4k} + u_{4k+1} + u_{4k+2} + u_{4k+3} = \frac{\sigma_0}{8k+1} + \frac{\sigma_1}{8k+3} + \frac{\sigma_2}{8k+5} + \frac{\sigma_3}{8k+7} = \frac{0}{8k+1} + \frac{4}{8k+3} + \frac{-4}{8k+5} + \frac{0}{8k+7} = \frac{8}{(8k+3)(8k+5)} \sim \frac{1}{8k^2}$, série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$. Deux séries à termes positifs équivalents étant de même nature, la série paquet considérée converge, donc aussi la série proposée.

4.c) Somme de Riemann à calculer :

On écrit la formule des sommes de RIEMANN : $SR = \frac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{k=0}^{7} f(k\frac{\pi}{4})\sin(k\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}\Big[0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\Big] = \frac{\pi}{4}(2\sqrt{2} - 2) = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1)$. Ainsi $\boxed{\textbf{Somme de RIEMANN (4.c)= SR} = \mathbf{\frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1)}}$

4.d) Valeur de L puis de S :

On vient de voir que $SR = \frac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{k=0}^{7} f(k\frac{\pi}{4})\sin(k\frac{\pi}{4})$ et pour ce qui est dans la somme on utilise le résultat de la question (2) :

$SR = \sum_{k=0}^{7}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2p+1)k\frac{\pi}{4}]}{2p+1}\sin(k\frac{\pi}{4})$;

On a le droit de permuter les sommations (somme finie de séries convergentes d'après (2)), ce qui donne :

$SR = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{7} \frac{\sin[(2p+1)k\frac{\pi}{4}]}{2p+1}\sin(k\frac{\pi}{4}) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sigma_p}{2p+1}$.

Ainsi $\boxed{\mathbf{L = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sigma_p}{2p+1} = SR = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)}}$

- **Calcul de S :** En posant $p = 4q+i$, $i = 0..3$, la somme Q_N (qui tend vers L) du (4.b) s'écrit, comme $\sigma_{4q+i} = \sigma_i$, en groupant par paquets : $Q_N = 4\sum_{q=0}^{N-1}\frac{1}{8q+3} - 4\sum_{q=0}^{N-1}\frac{1}{8q+5}$, soit :

$-\frac{Q_N}{4} = \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8(N-1)+5} - \left(\frac{1}{3} + ... + \frac{1}{8(N-1)+3}\right) =_{\text{(avec des notations évidentes)}} A_{N-1} + B_{N-1}$.

Or $S_N = \frac{1}{-8N+5} + \frac{1}{-8(N-1)+5} + ... + \frac{1}{-8+5} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8(N-1)+5} + \frac{1}{8N+5} = -\frac{1}{8(N-1)+3} - .... - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8(N-1)+5} + \frac{1}{8N+5} = B_{N-1} + A_{N-1} + \frac{1}{8N+5} = Q_N + \frac{1}{8N+5}$; par suite en faisant tendre N vers plus l'infini. $\boxed{\mathbf{S = -\frac{L}{4} = \frac{\pi}{8}(1-\sqrt{2})}}$

Exercice 2

1) Solution avec u=v=0 : D'après Cauchy-Lipchitz, il n'y a qu'une seule solution satisfaisant à des conditions initiales données, or ici la solution nulle $x = y = 0$ est évidente.

2.a) Déterminant : Avant de calculer on remarque que $\begin{cases} x" = 2xx' + 2y' = 2x(x^2+y) + xy = 2x^3 + 3xy \\ y" = x'y + xy' = x^2y + y^2 + x^2y = 2x^2y + y^2 \end{cases}$ par conséquent $W(x',y') = Wronskien(x',y') = \begin{Vmatrix} x^2+y & 2x^3+3xy \\ xy & 2x^2y+y^2 \end{Vmatrix} =_{\text{C2-2C1}} \begin{vmatrix} x^2+y & 2xy \\ xy & y^2 \end{vmatrix} = y^2(x^2+y-2x^2)$, soit $\boxed{\mathbf{W(x',y') = y^2(y-x^2)}}$

2.b) W quand inflexion ? : En un point de nature inflexionnelle les deux vecteurs dérivés de $OM\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix}$ sont liés donc ce déterminant est nul.

2.c) Résoudre $\mathbf{x' = x^2}$: C'est une équation à variables séparables $\frac{dx}{x^2} = dt$ soit $-\frac{1}{x} = t - k$ soit $\boxed{\mathbf{x = \frac{1}{k-t}}}$; à cause de la division par x^2, il faut envisager les raccords avec $x = 0$, mais qui ne peuvent se produire car $\frac{1}{k-t}$ ne peut s'annuler quand elle est définie ($t \neq k$).

2.d) Trajectoires incluses dans une droite ? Tous les points seraient inflexionels donc $W = 0$, mais comme $y = x^2$ est une parabole (conique) une droit ene la coupe qu'en deux points, donc elle ne peut convenir : il reste la droite $y = 0$, avec la loi horaire $x = \frac{1}{k-t}$.

3.a) Isocline avec $\mathbf{x' = 0}$: $x' = 0$ donne par la première équation $y = -x^2$ parabole admettant Oy comme axe de symétrie (voir figure).

3.b) Unique cercle convenant : Les hypothèses disent que son équation est de la forme $x^2+y^2-ay = 0$. Ses deux points $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ et $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, sont des points du cercle à tangente parallèle à Oy, il doivent être sur la parabole $y = -x^2$, ce qui donne $\frac{a}{2} = -\frac{a^2}{4}$. $a^2 + 2a = 0$; Si on écarte le cas $a = 0$ qui donne le cercle point réduit à l'origine, on a $\boxed{\mathbf{a=-2}}$; le cercle demandé est le cercle $\mathbf{x^2 + y^2 + 2y = 0}$.

3.c) Solution maximale contenant (0,a) : $\frac{x'y-y'x}{y^2} = \frac{x^2y+y^2-x^2y}{y^2} = 1$; $(\frac{x}{y})' = 1$ soit $\frac{x}{y} = t + Cte$, la condition initiale donne $Cte = 0$, par conséquent $\boxed{\mathbf{\frac{x}{y} = t}}$;

On reporte dans la seconde équation du système : $\frac{dy}{dt} = xy \iff \frac{dy}{\frac{ydx-xdy}{y^2}} = xy$, soit $ydy = (ydx - xdy)x$ soit $ydy = -x^2dy + xydx$, on prend comme nouvelle variable $\boxed{u = x^2}$ on a $ydy = -udy + \frac{y}{2}du$, on considère u comme fonction de y, $yu' - 2u = 2y$; équation différentielle du premier ordre, linéaire avec second membre ; l'équation sans second membre associée $z'y = 2z$ donne en séparant les variables, (méthode pratique $\frac{z'}{z} = 2$, qui est rendue rigoureuse car elle donne le même résultat que parla multiplication par l'exponentielle $exp(2\ln(|y|)$,...voir le cours) : $z = Cy^2$; On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre, sous la forme polynomiale de même degré que le second membre $u = ky$, ce qui donne $ky - 2ky = 2y$ $k = -2$; La solution générale de l'équation donne alors une trajectoire $x^2 = Cy^2 - 2y$, mais en tenant compte de la condition initiale donnée $0 = Ca^2 - 2a = 4C + 4$ donc $C = -1$; On trouve $\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 + 2y = 0}}$ c'est à dire le cercle de la question précédente (on s'y attendait).

Exercice 3

1.a) Dimension de $\mathbf{O_a}$ est 2 : Pa récurence descendante, (a,u(a)) est génératrice, puisque $u^p(a) = \frac{1}{2}(u^{p-2}(a) + u^{p-1}(a))$. Comme elle est libre par hypothèse la dimension de O_a est bien deux.

La matrice de u/O_a, sur la base précédente, ayant comme colonnes les images des vecteurs de base est $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

Son équation caractéristique est $\begin{vmatrix} -t & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} - t \end{vmatrix} = t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = 0$ de racines $t = 1$ et $t = -\frac{1}{2}$, distinctes et réelles? donc u/O_a est bien diagonalisable. La matrice de la restriction de u à l'orbite de a est $diag(1, -\frac{1}{2})$.

■ **Calcul pour $\mathbf{u/O_b}$:**

On procède de même O_b est de dimension 3, avec la base $b, ub), u^2(b)$, sur laquelle u/O_b a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'équation caractéristique } \begin{vmatrix} -t & 0 & 1 \\ 1 & -t & -1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = -(t^2+1)(t-1),$$

obtenu soit par Sarrus, soit en ajoutant la troisième colonne à la première. Cette matrice ayant trois valeurs propres distinctes sur C, est diagonalisable.

La matrice de la restriction de u à l'orbite de b est $diag(1, i, -i)$.

1.c) u est diagonalisable : Les vecteurs propres associés aux quatre valeurs propres distinctes trouvées dans la question précédente grâce aux deux orbites espaces stables $(1, -\frac{1}{2}, i, -i)$, sont linéairement indépendants, en nombre 4 dimension de E, donc constituent une base propre de E qui est bien diagonalisable?

1.d) Déterminer c : e_1 est 1-propre, e_2 est $-\frac{1}{2}$ propre, e_3 est i-propre tandis que e_4 est -i-propre.

On pense immédiatement à $\boxed{\mathbf{c = ke_2 + e_3 + e_4}}$ (k étant choisi pour donner un degré de liberté pour les questions suivantes, pour cette question ou peut prendre k=1) : en effet comme e_2, e_3, e_4 sont propres pour u, $c, u(c), u^2(c) \in Vect(e_2, e_3, e_4)$, ainsi que tous les itérés suivant de c, donc l'orbite est bien de exactement trois car comme $\begin{cases} c = ke_2 + e_3 + e_4 \\ u(c) = -k\frac{1}{2}e_2 + ie_3 - ie_4 \\ u^2(c) = k\frac{1}{4}e_2 - e_3 - e_4 \end{cases}$, on constate que le déterminant $(= -\frac{5ki}{2}$, ajouter C3 à C1) des composantes de ces trois vecteurs sur la base (e_2, e_3, e_4) est différent de 0, pour k non nul. $c, u(c), u^2(c)$, forment une famille libre.

1.e) L'orbite de a+b peut ne pas être de dimension 4 :

(À mon avis la question a une certaine ambiguité dans sa formulation, qui a sans doute géné les candidats qui sont parvenus jusqu'à elle : en effet d'après le préambule du (1) a et b sont CHOISIS puisque leur orbites, comme le rappelle implicitement le texte en italique entre (1.c) et (1.d) sont considérées comme fixées. L'énoncé aurait du dire "Montrer que l'on peut choisir a et b...." ; Je remercie mon collègue Gozard, qui comme les bons mathématiciens a pris le problème à l'envers (choix de a et b en fonction des e_i) ce qui m'a donné l'idée et le courage de simplifier le calcul que j'avais ébauché ; En fait tout repose sur la latitude dans le choix de c, liberté correspondant au choix de k déja évoquée ; les correcteurs se rendront par eux même compte du flou de cette question par la lecture directions multiples prises par les candidats, qui auront été jusqu'à ce point).

Calculs techniques

Pour ne pas noyer le raisonnement dans le détail des calculs, je les fait tous d'abord :

(On tient compte de ce que e_1 est 1-propre pour les restrictions de u aux deux orbites O_a et O_b pour obtenir la relation $s(a+2u(a)) = b + u^2(b)$; On calcule aussi $e_2 = r(a - u(a))$)

■ **Calcul de $\mathbf{e_1, e_2}$ dans O(a) :** Le système des composantes associé au vecteur 1-propre e_1 est $-x + \frac{y}{2} = 0$ et ainsi $y = 2, x = 1$, $e_1 = K(a + 2u(a))$ et nous avons la possibilité du chois de K.

De même le système vérifié par les composantes de e_2 $-\frac{1}{2}$-propre est $x + y = 0$ et $e_2 = K'(a - u(a))$ et nous avons aussi le degré de liberté du choix de K' (non nul bien sûr, un vecteur propre n'étant jamais nul).

Pour que $a = e_1 + e_2$, à coordonnées les plus simples possibles dans la base propre, comme $e_1 + e_2 = a(K + k') + u(a)(2K - K')$, il suffit de prendre $K + K' = 1$ et $2K - K' = 0$; la résolution immédiate de ce petit système cramérien donne $K = \frac{1}{3}$, $K' = \frac{2}{3}$. *(On pourrait remplacer a par un vecteur proportionnel, l'orbite de a étant la même que celle de ta (t étant non nul)* ; On a obtenu $\boxed{a = e_1 + e_2}$

De même travaillons dans l'orbite O(b) ;

Le système donnant les composantes du vecteur 1-propre dans la base $b, u(b), u^2(b)$ est $-x + z = 0, x - y - z = 0, y = 0$ donc $se_1 = b + u^2(b)$; Quant aux composantes du vecteur i-propre elles vérifient $-ix + z = 0, x - iy - z = 0, y + (1-i)z = 0$ qui est équivalent à $-ix + z = 0, y + (1-i)z = 0$; Comme le but est de faire disparaitre u(b) qui ne figure pas dans e_1, je prends y comme variable auxiliaire. $y = ip$ $x = \frac{1}{2}(i-1)y, z = -\frac{1}{2}(i+1)y$, donc e_3 vecteur i-propre est $e_3 = p(\frac{1}{2}(-1-i)b + iu(b) + \frac{1}{2}(1-i)u^2(b))$ et en changeant i en -i puisque la matrice est à coefficients réels on a $e_4 = q(\frac{1}{2}(-1+i)b - iu(b) + \frac{1}{2}(1+i)u^2(b))$; On prend $q = p$, pour faire disparaître $u(b)$: $e_3 + e_4 = p(-b + u^2 - b))$ et rappelons $e_1 = s(b + u^2(b))$;

On veut s'arranger pour que $c = e_2 + e_3 + e_4$ et constater que $c = a + b$ dont l'orbite sera d'après (1.d) de dimension 3 ; Pour cela il faut que e_1 se réduise, et donc que $b = -e_1 + e_3 + e_4 = b(-p - s) + u^2(b)(p - s)$; On prend $p = s = -\frac{1}{2}$.

1.f) Choix de d : Nous avons choisi $c = a + b = e_2 + e_3 + e_4$; Il suffit de perturber le choix précédent, pour que le fait fortuit dépendant de ce choix, que O(c) soit de dimension 3, disparaisse : $c' = b + ka = c + (k-1)a$ avec $k \neq 1$;

Comme E est dimension 4, il suffit de vérifier que l'orbite de $c' = c + ra$ est de dimension 4 ; or il suffit de vérifier que $a, u(a)$, sont indépendants de $c, u(c), u^2(c)$; Or ceci est rapide, car en procédant par blocs le déterminant de leurs composantes sur e_1, e_2, e_3, e_4 est $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & i & -1 & 0 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5\frac{i}{2} \neq 0$.

2.a) Matrice A ? Sur la base B, A dont les colonnes sont les composantes des images par u des vecteurs de base est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & a_1 \\ 1 & 1 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ où $u^n(x_0) = a_0x_0 + ... + a_{n-1}u^{n-1}(x_0)$. On reconnaît la matrice compagne du polynôme $X^n - a_0X^{n-1} - ... - a_{n-1}$;

2.b) Première colonne des $\mathbf{A^k}$: Il y a décalage, à chaque prise d'image : La première colonne de A^k est le vecteur $u^k(x_0)$.

2.c) Condition nécéssaire pour avoir un endomorphisme cyclique : Les n matrices $I, A, ..., A^{n-1}$ échelonnées en composantes sur E_i^1 sur la base canonique des matrices, sont indépendantes. Donc le degré du polynôme minimal de A est $> n-1$. Il est donc de degré n donc proportionnel au polynôme caractéristique, qu'il divise, puisque celui ci est annulateur d'après CAYLEY.

La condition nécéssaire cherchée est donc : pour qu'un endomorphisme soit cyclique il faut que son polynôme minimal soit $(-1)^n$ le polynôme caractéristique, ce qui est classique pour une matrice compagne (voir le cours utilisation de la réduction pour résoudre un sytème récurrent linéaire).

FIN E3A 1 MP 2000