CAPES interne de Mathématiques
session 2002

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag52e]

PREMIER PROBLÈME : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DUNE SUITE EN FONCTION DE SA VALEUR INITIALE

On considère un nombre réel a et on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2} \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Le but de lexercice est d'étudier, pour différentes valeurs de a, le comportement de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

1. Etude d'un premier cas particulier.

Dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2}$.

1.1. Calculer la valeur exacte de u_1 et u_2.

1.2. Donner, pour chacun des nombres u_1 et u_2 un encadrement d'amplitude 10^{-2} à bornes décimales.

1.3. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $0 < u_n \leq 1$.

1.4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

2. Etude d'un second cas particulier.

Dans cette question, on suppose que $a = 2$.

2.1. Calculer la valeur réelle exacte, puis donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près de u_1, u_2 et u_3.

2.2. On considère la fonction f définie sur $[0 + \quad [$ par $f(x) = e^x - (x+1)(x+2)$.

2.2.1. Étudier le signe de $f \quad$.

2.2.2. Montrer que $f \quad$ est strictement positive sur l'intervalle $[2 + \quad [$.

2.2.3. Déduire de ce qui précède que f est strictement positive sur l'intervalle $[3 + \quad [$.

2.3. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq n$.

2.4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+ \quad$.

3. Etude du cas général.

On revient au cas général où a est un nombre réel quelconque. On désigne par E_a l'ensemble des indices $n > 0$ tels que u_n est strictement inférieur à 1 :

$$E_a = \quad n \quad \mathbb{N}^* \quad u_n < 1$$

3.1. Déterminer $E_{1 \ 2}$ et E_2.

3.2. Démontrer que, si E_a n'est pas vide, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

3.3. Démontrer que, si E_a est vide, on a :

$$n \quad \mathbb{N} \quad u_n \geq \ln(n+2)$$

et en déduire, dans ce cas, que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+ \quad$.

4. Détermination d'une partition de $\mathbb{R}$ en fonction du comportement de la suite.

On désigne par A_0 l'ensemble des réels a tels que E_a n'est pas vide et par A celui des réels a tels que E_a est vide.

4.1. Montrer que A_0 et A sont deux intervalles complémentaires de $\mathbb{R}$.

4.2. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que :

$$]- \quad m[\subset A_0 \subset]- \quad m] \text{ et }]m + \quad [\subset A \quad \subset [m + \quad [$$

4.3. En déduire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

4.4. A l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

4.5. Déterminer auquel des deux intervalles A_0 ou A appartient le nombre réel m.

SECOND PROBLEME : GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN COMPLEXE

Ce problème comporte deux parties. la partie I permet de retrouver des résultats classiques de géométrie du triangle ; la partie II aborde des questions relatives à la droite. Ces deux parties sont indépendantes l'une de l'autre, à l'exception de la question II.5. qui utilise des résultats de la partie I.

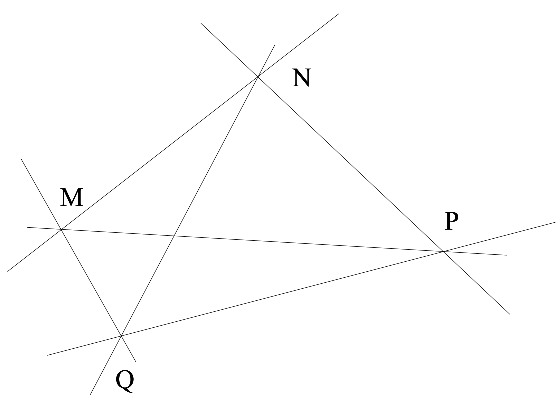
Dans tout le problème, on se place dans le plan affine euclidien. On rappelle que, dans un triangle, le pied de la hauteur passant par un sommet est l'intersection de cette hauteur avec le côté opposé à ce sommet. D'autre part, z étant un nombre complexe, on désigne par $\overline{z}$ son conjugué et par z son module.

Partie I

I.0. Question préliminaire.

Définition 1. On appelle quadrangle toute figure du plan formée par six droites joignant deux à deux quatre points du plan non alignés trois à trois.

La figure ci-contre représente le quadrangle $(MNPQ)$. Les points M, N, P, Q sont les sommets de ce quadrangle et les segments $[MN]$ $[NP]$ $[PQ]$ $[QM]$ $[PM]$ $[QN]$ en sont les côtés.



Définition 2. On dit qu'un quadrangle est orthocentrique si, et seulement si, chacun de ses sommets est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres sommets.

I.0.1. Démontrer qu'un quadrangle $(MNPQ)$ est orthocentrique si, et seulement si, le point M est l'orthocentre du triangle NPQ.

On se place désormais dans le plan complexe rapporté au repère cartésien orthonormal direct $(O\ \overline{i}\ \ \overline{j}\ )$, et on appelle Γ le cercle de centre O et de rayon 1. Soient A, B, C trois points distincts de Γ tels que le triangle ABC ne soit pas rectangle. On note $a\ \ b\ \ c$ les affixes respectives des points $A\ \ B\ \ C$. Le point M d'affixe m sera parfois noté $M(m)$.

I.0.2. Tracer une figure soignée représentant l'ensemble des situations étudiées dans la partie I. On complétera cette figure au fur et à mesure des questions qui seront traitées.

I.1. Construction d'un quadrangle orthocentrique.

I.1.1. Soit C l'image du point O dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB). Démontrer que C est distinct de O, puis déterminer la nature du quadrilatère $AOBC$. Démontrer que l'affixe de C est $a+b$.

I.1.2. On considère le point D tel que $OC\ DC$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati).

a. A quelle condition portant sur le triangle ABC les points O, C , D, C sont-ils alignés ?

b. Démontrer que (CD) est une hauteur du triangle ABC.

I.1.3. Démontrer que l'affixe d du point D est $d = a + b + c$. En déduire que (AD) et (BD) sont des hauteurs du triangle ABC.

I.1.4. Démontrer que le quadrangle $(ABCD)$ est orthocentrique.

I.2 Le cercle et la droite d'Euler d'un triangle.

I.2.1. On considère le milieu commun C_1 des segments $[AB]$ et $[OC\ ]$, le milieu commun Ω des segments $[OD]$ et $[CC\ ]$ et, enfin, le milieu C_2 du segment $[CD]$. Déterminer les affixes des vecteurs $\overline{C_1}\Omega$ et $\overline{\Omega}C_2$.

I.2.2. En déduire que le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en Ω passe par les milieux respectifs A_1, B_1, C_1 des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ du triangle ABC, par les milieux respectifs A_2, B_2, C_2 des segments $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$ et par les points A_3, B_3, C_3, pieds des hauteurs du triangle ABC passant respectivement par A, B, C.

Le cercle précédent est appelé cercle d'Euler du triangle ABC.

I.2.3. Montrer que l'homothétie h de centre D et de rapport 2 transforme le cercle d'Euler du triangle ABC en le cercle circonscrit au triangle ABC.

I.2.4. A l'aide de ce qui précède, donner une démonstration du théorème suivant :

Théorème 1. Étant donné un quadrangle orthocentrique $(ABCD)$, les quatre triangles déterminés par ses sommets pris trois à trois ont le même cercle d'Euler. Celui-ci passe par neuf points : les six milieux des côtés du quadrangle et les pieds des hauteurs des triangles.

I.2.5. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Calculer l'affixe de G ; en déduire que les points O, Ω, D et G sont alignés. Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, la droite passant par les quatre points précédents est appelée droite d'Euler du triangle ABC. Préciser la position des points Ω et G sur le segment $[OD]$. Que se passe-t-il si le triangle ABC est équilatéral ?

I.3. Cercle d'Euler associé à un quadrangle orthocentrique.

On ajoute aux points A, B, C, D, C introduits précédemment le point $A\ (b+c)$ et le point $B\ (c+a)$.

I.3.1. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle $A\ B\ C$ est centré en D et de rayon 1 et que le quadrangle $(A\ B\ C\ O)$ est orthocentrique (on pourra, en le justifiant, utiliser le fait que le triangle $A\ B\ C$ est l'image de ABC par une isométrie que l'on précisera).

I.3.2. Compléter l'énoncé suivant :

Théorème 2. Soit un quadrangle orthocentrique $(ABCD)$. [...]. Les huit triangles [...] ont le même cercle d'Euler ; ce cercle passe par les douze points [...] rattachés au quadrangle.

I.3.3. On s'intéresse maintenant aux droites d'Euler.

a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, on a $a + b + c = 0$.

b. Dans le cas où le triangle ABC n'est pas équilatéral, que peut-on dire des droites d'Euler des triangles ABC et $A\ B\ C$?

I.4. Un peu d'histoire des mathématiques.

Comme on le sait, l'oeuvre de Leonhard Euler (1707-1783) est colossale et touche à tous les champs des mathématiques ; mais Euler est plus connu pour ses travaux en analyse qu'en géométrie ; ses études dans cette branche étaient souvent prétexte à revenir à l'analyse qu'il affectionnait. Toujours épris d'un profond désir de clarté, il fut amené à préciser nombre de notations encore en vigueur à l'heure actuelle.
Pouvez-vous, parmi vos connaissances personnelles des programmes du secondaire, choisir un point précis (notion mathématique ou notation) qui soit un apport de ce mathématicien et le situer comme tel dans une courte présentation d'une dizaine de lignes accessible à des élèves de lycée ? Le cercle d'Euler et la droite d'Euler ne peuvent être retenus ici.

Partie II

Dans cette partie, le plan complexe est toujours rapporté à un repère cartésien orthonormal direct d'origine O. On désigne toujours par Γ le cercle de centre O et de rayon 1 et on note, comme précédemment $a\ \ b\ \ c$, d les affixes respectives des points $A\ \ B\ \ C\ \ D$. On conseille vivement de réaliser plusieurs figures séparées.

II.1. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes parallèles du cercle Γ. Démontrer que les angles orientés de vecteurs $(\overline{O}A\ \ \overline{O}C)$ et $(\overline{O}D\ \ \overline{O}B)$ sont égaux. En déduire $ab = cd$.

II.2. Equation complexe d'une droite du plan complexe.

II.2.1. Soit I le milieu d'une corde $[AB]$ du cercle Γ. Soient $Z(z)$ un point, $S(s)$ l'image de Z dans la symetrie orthogonale par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$ et $T(t)$ le symétrique du point S par rapport au point I.

a. Lorsque le point Z est différent du point O, montrer que $\frac{s}{s}\frac{z}{z} = ab$, puis exprimer t en fonction de $a\ \ b\ \ z$. Le résultat obtenu est-il toujours valable quand Z coïncide avec O ?

b. Démontrer que le point Z appartient à la droite (AB) si et seulement si $Z = T$.

c. En déduire que la relation :

$$(1) \qquad z + ab\overline{z} = a + b$$

caractérise les points de la droite (AB).

d. Soit $[PQ]$ un diamètre de Γ. On note p l'affixe du point P ; démontrer que les points de la droite (PQ) sont caractérisés par $z - p^2\overline{z} = 0$.

II.2.2. Soit Δ une droite quelconque du plan passant par le point $Z_0(z_0)$ et parallèle à (PQ). Montrer que la relation :

$$(2) \qquad z - p^2\overline{z} = z_0 - p^2\overline{z}_0$$

caractérise les points de la droite Δ (on pourra noter que le point $Z(z)$ appartient à la droite Δ si et seulement si son image par la translation de vecteur $\overline{Z_0O}$ appartient à la droite (PQ)).

On appelle la relation (2) une équation dans le plan complexe de la droite Δ. Le nombre $-p^2$ s'appelle le coefficient directeur complexe de toute droite parallèle à la droite (PQ).

II.2.3. Quel est le coefficient directeur complexe de la droite (AB) définie au **II.2.1.** ?

II.3. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes parallèles du cercle Γ. La droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par D recoupe le cercle Γ en D $(d$ $)$ (les points D et D peuvent éventuellement être confondus). Démontrer que $d \ = -c$, puis que $d \ = -\frac{ab}{d}$.

II.4. Droite de Simson.

Soient A B C D quatre points distincts deux à deux du cercle Γ. On note $U(u)$ $V(v)$ $W(w)$ les projetés orthogonaux respectifs du point D sur les droites (AB) (BC) (CA) . On se propose de démontrer que les trois points U V W sont alignés.

II.4.1. Démontrer ce résultat lorsque la corde $[CD]$ est un diamètre du cercle Γ.

II.4.2. On se place dans le cas où la corde $[CD]$ n'est pas un diamètre de Γ et n'est pas perpendiculaire à la corde $[AB]$. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par D recoupe le cercle Γ en P.

a. Démontrer que les angles orientés de droites $((CA)$ $(CP))$ et $((WA)$ $(WU))$ sont égaux.

b. Déterminer le coefficient directeur complexe de la droite (UW) et en déduire que les trois points U V W sont alignés.

II.4.3. Démontrer que les points U V W sont encore alignés lorsque la corde $[CD]$ n'est pas un diamètre du cercle Γ et est perpendiculaire à la corde $[AB]$ (on pourra utiliser la tangente τ au cercle Γ au point C). La droite passant par les points U V W est appelée la droite de Simson du point D relativement au triangle ABC.

II.5. Cette question utilise des résultats obtenus dans la partie I. On y démontre le :

Théorème 3. Dans un quadrilatère inscrit on considère pour chaque sommet sa droite de Simson relative au triangle formé par les trois autres sommets. Les quatre droites ainsi définies sont concourantes en un point appartenant aux cercles d'Euler des quatre triangles.

Reprenons les hypothèses et les notations de la question **II.4**.

II.5.1. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Quelle est l'affixe de H ?

II.5.2. Déterminer une équation complexe des droites (DU) et (AB). En déduire la valeur de u en fonction de a b d.

II.5.3. Montrer alors que la droite de Simson du point D relativement au triangle ABC admet pour équation complexe :

$$(3) \qquad z - \frac{abc}{d}\overline{z} = \frac{1}{2}\left[(a+b+c+d) - \frac{abc}{d}\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}\right)\right]$$

II.5.4. Montrer que le point L d'affixe $l = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ vérifie la conclusion du théorème 3.