Corrigé de l'épreuve Math B de E3A, PSI 2011

Luc Verschueren, Lycée Daudet à Nîmes.

Marges : 1cm=haut=bas=gauche=droite

Exercice n◦ 1 Une équation polynômiale.

On étudie les polynômes P non nul de $\mathbb{C}[X]$ tels que $(*)$ $\quad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$

Question 1. Si $a \in \mathbb{C}$, vérifie $P(a) = 0$, et si P vérifie $(*)$ alors pour les fonctions polynômes en $X = a+1$: $P\big((a+1)^2-1\big) = P((a+1)-1)P((a+1)+1) = P(a)P(a+2) = 0$ et $P\big((a-1)^2-1\big) = P(a-2)P(a) = 0$

donc $\boxed{\text{si } a \text{ est racine de } P, \text{ alors } (a+1)^2-1 \text{ et } (a-1)^2-1 \text{ sont aussi racines de } P}$

Question 2. a. Assurons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. **Initialisation** pour $n = 0$: a_0 racine de P.
Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si a_n est une racine de P, alors $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n = (a_n+1)^2 - 1$ est racine de P.
Par le thm de **récurrence** dans $\mathbb{N}$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \text{ est une racine de } P}$

Question 2. b. Si $a_n > 0$, alors $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ vérifie $a_{n+1} > 2a_n$ donc aussi $a_{n+1} > a_n > 0$.
Par récurrence sur n, si $a_0 > 0$ (initialisation) alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 < a_n < a_{n+1}$ (hérédité ci-dessus) et :
$\boxed{\text{Si } a_0 > 0, \text{ la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constituée de réels strictement positifs et strictement croissante}}$

Question 2. c. Ainsi : si $a > 0$ est une racine de P, avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ initialisée par $a_0 = a$, P admettrait une **infinité de racines distinctes** (et réelles positives), ce qui est $\boxed{\text{impossible pour un polynôme } P \text{ non nul}}$

Question 2. d. Si $P(-1) = 0$ et -1 racine de P, alors $(-1-1)^2 - 1 = 3$ serait aussi racine de P, ce qui est exclu avec la question précédente. $\boxed{\text{Ainsi } P(-1) \neq 0,\ -1 \text{ n'est pas racine de } P}$

Question 2. e. Pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir de $a_0 \in \mathbb{C}$, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n+1)^2}$
Par récurrence, on assure ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}}$

Question 3. Si a est une racine complexe de P vérifiant $(*)$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir de $a_0 = a$ est une suite de racines de P.
Si $|a+1| > 1$ alors la suite des modules $|a_n+1| = |a_0+1|^{2^n}$ serait strictement croissante tendant vers $+\infty$, et P admettrait une infinité de racines complexes. Impossible.
Si $|a+1| < 1$ alors la suite des modules $|a_n+1| = |a_0+1|^{2^n}$ serait strictement décroissante tendant vers 0, et donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers $\ell = -1$. Par continuité des polynômes, on aurait $P(-1) = \lim\limits_{n\to\infty} P(a_n) = 0$, donc -1 serait racine de P. Impossible. **Note** : on aurait aussi une infinité de racines distinctes.

$\boxed{\text{Donc le seul cas compatible est } |a+1| = 1}$

On admet que si l'on considérait la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ b_{n+1} = b_n^2 - 2b_n$, on obtiendrait le résultat complémentaire $\boxed{|a-1| = 1}$

Question 4. Si $d°P > 0$, il admet une racine complexe a et $|a+1| = 1$, $|a-1| = 1$, donc a est sur le cercle de centre $C_1 = -1$ et de rayon $R = 1$ **et** sur le cercle de centre $C_2 = 1$ et de rayon $R = 1$. Ces deux cercles ont un seul poit commun : $a = 0$. $\boxed{\text{La seule racine possible de } P \text{ est } a = 0}$

Question 5. Ainsi P non nul vérifiant $(*)$ est constant $P(X) = c$ ou il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(X) = cX^k$.
Cherchons $(c,k) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N}$, tels que $P(X) = cX^k$ vérifie $(*)$.

$$\big(\text{Pour } (c,k) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N},\ \ P(X) = cX^k \text{ vérifie } (*)\big) \iff \begin{pmatrix} c(X^2-1)^k = c^2(X-1)^k(X+1)^k \\ \text{et } c \neq 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \iff \big(c = c^2\big) \\ \iff \big(c = 1\big) \end{array}$$

$\boxed{\text{Les polynômes non nuls vérifiant } (*) \text{ sont les polynômes tels qu'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } P_k(X) = X^k}$

Exercice n◦ 2 Etude d'une courbe et opération entre les points.

La fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} = 1 - \dfrac{2}{t^2+1}$ est paire et de de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

La fonction vectorielle $\vec{f} : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = t\varphi(t) \end{cases}$ est donc aussi C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Partie A

Question A. 1. On a x qui est paire et y qui est impaire donc $M(-t)$ est **symétrique** de $M(t)$ par rapport à Ox.
Pour $t = 0,$ le point $P = M(0)$ est sur la courbe.

Question A. 2. La courbe admet un point double, (elle repasse au même point) si et seulement si :

$$\left(\exists(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2,\quad t_1 < t_2 \text{ et } M(t_1) = M(t_2)\right) \iff \left(\begin{array}{c} \exists(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2, \\ t_1 < t_2 \end{array} \text{ et } \begin{cases} \dfrac{t_1^2-1}{t_1^2+1} = \dfrac{t_2^2-1}{t_2^2+1} \\ t_1\dfrac{t_1^2-1}{t_1^2+1} = t_2\dfrac{t_2^2-1}{t_2^2+1} \end{cases} \right)$$

$$\iff \left(\exists(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2,\ t_1 < t_2 \text{ et } t_1^2-1 = t_2^2-1 = 0\right)$$

car si $x(t_1) = x(t_2) \neq 0$ alors $\left(y(t_1) = y(t_2)\right) \implies (t_1 = t_2)$

$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C} \text{ admet un seul point double : } M(-1) = M(1) = (0,0)}$

On a $\vec{f'} : t \mapsto \begin{cases} x'(t) = \varphi'(t) \\ y'(t) = t\varphi'(t) + \varphi(t) \end{cases}$ et $x'(t) = \varphi'(t) = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$ ne s'annule qu'en $t = 0$ où $\varphi(0) \neq 0$.

$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C} \text{ n'a pas de point stationnaire}}$

La courbe admet 2 branches infinies : quand $t \to \infty,$ où $\begin{cases} x(t) \to 1 \\ y(t) = +\infty \end{cases}$ et quand $t \to -\infty,$ où $\begin{cases} x(t) \to 1 \\ y(t) = -\infty \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{C} \text{ admet ainsi la même asymptote verticale d'éqation } x = 1, \text{ pour ses deux branches infinies}}$

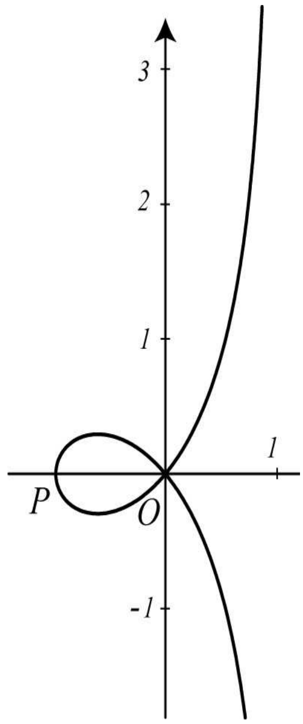
Question A. 3. On a $y'(t) = \dfrac{4t^2 + (t^2+1)(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = \dfrac{t^4+4t^2-1}{(t^2+1)^2}$ le trinôme du second degré $X^2 + 4X - 1,$ admet 2 racines réelles de signes opposés (produit égal à -1) qui sont $X_1 = \sqrt{5} - 2 > 0$ et $X_2 = -\sqrt{5} - 2 < 0.$

Donc $y'(t)$ s'annule (points à tangente horizontale) en $t_1 = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$
et $t_2 = -\sqrt{\sqrt{5} - 2} = -t_1$

Le tableau de variation des fonctions x et y est obtenu, avec les valeurs approchées de l'énoncé :

$x(t_2) = \varphi(t_2) \approx -0,6\ \ y(t_2) = t_2\varphi(t_2) = -t_1\varphi(t_1) \approx +0,3$

et $x(t_1) = \varphi(t_1) \approx -0,6\ \ y(t_1) = t_1\varphi(t_1) \approx -0,3$



t	$-\infty$		t_2		0		t_1		∞
x'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y'		$+$	0		$-$		0	$+$	
x	1	$\searrow$	$\varphi(t_2)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\varphi(t_1)$	$\nearrow$	1
y	$-\infty$	$\nearrow$	$t_2\varphi(t_2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$t_1\varphi(t_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

Question B. 1. a. Avec l'opération élémentaire sur les lignes : $L_2 - aL_1 \to L_2$ on a :

$$\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-t\varphi(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ (a-b)\varphi(b) & (a-t)\varphi(t) \end{vmatrix}$$ que nous noterons $\Delta(t)$.

Question B. 1. b. $$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \dfrac{(a^2-1)(b^2+1)-(b^2-1)(a^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)} & \dfrac{(a^2-1)(t^2+1)-(t^2-1)(a^2+1)}{(a^2+1)(t^2+1)} \\ (a-b)\dfrac{b^2-1}{b^2+1} & (a-t)\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(t) = \frac{1}{(b^2+1)(t^2+1)}\begin{vmatrix} \dfrac{2a^2-2b^2}{(a^2+1)} & \dfrac{2a^2-2t^2}{(a^2+1)} \\ (a-b)(b^2-1) & (a-t)(t^2-1) \end{vmatrix}$$ par linéarité suivant C_1 puis C_2.

$$\Delta(t) = \frac{2}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)}\begin{vmatrix} a^2-b^2 & a^2-t^2 \\ (a-b)(b^2-1) & (a-t)(t^2-1) \end{vmatrix}$$ par linéarité suivant L_1.

$$\Delta(t) = \frac{2(a-b)(a-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)}\begin{vmatrix} a+b & a+t \\ b^2-1 & t^2-1 \end{vmatrix}$$ par linéarité suivant C_1 puis C_2.

$$\Delta(t) = \frac{2(a-b)(a-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)}\begin{vmatrix} b-t & a+t \\ b^2-t^2 & t^2-1 \end{vmatrix}$$ avec l'opération élémentaire $C_1 - C_2 \to C_1$.

Enfin $$\boxed{\Delta(t) = \frac{2(a-b)(a-t)(b-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)}\begin{vmatrix} 1 & a+t \\ b+t & t^2-1 \end{vmatrix} \text{ par linéarité suivant } L_1}$$

Note : ce déterminant est $\det_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{M(t)A}\right)$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$.

Question B. 2. a. Les hypothèses posées sur (A,B) assurent que $a+b \neq 0$ et $a \neq b$. La droite (A,B) a pour équation $\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-x \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-y \end{vmatrix} = 0$ qui exprime que $\det_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MA}\right)$ pour $M = (x,y)$.

$$\boxed{\text{La droite } (A,B) \text{ rencontre } \mathcal{C} \text{ en un point } M(t) \text{ si et seulement si } \Delta(t) = 0}$$

On cherche $M(t)$ différent de A et B donc $\dfrac{2(a-b)(a-t)(b-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)} \neq 0$

et $\left(\Delta(t) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} 1 & a+t \\ b+t & t^2-1 \end{vmatrix} = 0\right) \Leftrightarrow \left(ab+at+bt+1 = 0\right) \Leftrightarrow \left(t = -\dfrac{1+ab}{a+b}\right)$

$$\boxed{\text{La droite } (A,B) \text{ rencontre } \mathcal{C} \text{ au point } M(h(a,b)) = A \star B}$$

Ce point serait égal à O si et seulement si t vallait -1 ou 1 et :

$\left(-\dfrac{1+ab}{a+b} = 1\right) \Leftrightarrow \left(a+b+ab+1 = 0\right) \Leftrightarrow \left((a+1)(b+1) = 0\right)$ cas exclu, car A et B diffèrent de O.

$\left(-\dfrac{1+ab}{a+b} = -1\right) \Leftrightarrow \left(a+b-ab-1 = 0\right) \Leftrightarrow \left((a-1)(b-1) = 0\right)$ cas exclu, car A et B diffèrent de O.

Donc $\boxed{A \star B \neq O}$

Question B. 2. b. **Remarque 1** : $\left(A \in \mathcal{C} \text{ est différent de } P \text{ et de } O\right) \Leftrightarrow \left(A = M(a) \text{ pour } a \notin \{0,-1,1\}\right)$.
Donc $a \in]0,\infty[\setminus \{1\}$ ou $a \in]-\infty,0[\setminus \{-1\}$. Vue la symétrie de la courbe par rapport à Ox, quand on change t en $-t$, montrons le résultat pour $a \in]0,1[\cup]1,\infty[$.

Remarque 2 : l'application h est continue sur chacun des ouverts de $\mathbb{R}^2$: $U_1 = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a+b > 0\right\}$ et $U_2 = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a+b < 0\right\}$, car c'est une fraction rationnelle à dénominateur non nul. La fonction $\overrightarrow{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition l'application $(a,b) \mapsto M(h(a,b)) = A \star B$ est continue sur U_1 et sur U_2.

Considérons alors $b \in]0,1[\cup]1,\infty[$, $b \neq a$. Le résultat précédent s'applique et on peut faire tendre b vers a en restant dans $]0,1[$ ou dans $]1,\infty[$. Alors la droite (A,B) a une position limite qui est la tangente à $\mathcal{C}$ en A, et le point $A \star B = M(h(a,b))$ tend vers $M(h(a,a))$, car (a,b) tend vers (a,a) en restant dans U_1.

Ainsi $\boxed{\text{la tangente à } \mathcal{C} \text{ en } A \text{ différent de } P \text{ et } O, \text{ recoupe la courbe } \mathcal{C} \text{ en l'unique } A \star A}$

$A \star A$ correspond à $M\left(-\dfrac{1+a^2}{2a}\right)$.

$\dfrac{1+a^2}{2a} \neq 0$ donc $\boxed{A \star A \neq P}$ Et $\left.\begin{array}{l} \left(-\dfrac{1+a^2}{2a} = 1\right) \Leftrightarrow \left((a+1)^2 = 0\right) \Leftrightarrow (a = -1) \\ \left(-\dfrac{1+a^2}{2a} = -1\right) \Leftrightarrow \left((a-1)^2 = 0\right) \Leftrightarrow (a = 1) \end{array}\right\}$ qui sont exclus donc $\boxed{A \star A \neq O}$

Note : si $A = O,$ donc $a = 1$ ou $a = -1,$ la tangente est dirigée par $\overrightarrow{f'(a)} = \begin{pmatrix} x'(a) = a \\ y'(a) = a\varphi'(a) + \varphi(a) = 1 \end{pmatrix}$

et passe par $O.$ C'est donc la droite $y = x$ respectivement $y = -x.$

Elle recouperait $\mathcal{C}$ en $M(t)$ si et seulement si $\left|\begin{array}{l} \left(x(t) = y(t)\right) \Leftrightarrow \left(\varphi(t) = 0 \text{ ou } t = 1\right) \Leftrightarrow \left(M(t) = O\right) \\ \text{ou } \left(x(t) = -y(t)\right) \Leftrightarrow \left(\varphi(t) = 0 \text{ ou } t = -1\right) \Leftrightarrow \left(M(t) = O\right) \end{array}\right.$

On posera $\boxed{O \star O = O}$, pour compléter notre opération sur $\mathcal{C}$.

Question B. 3.

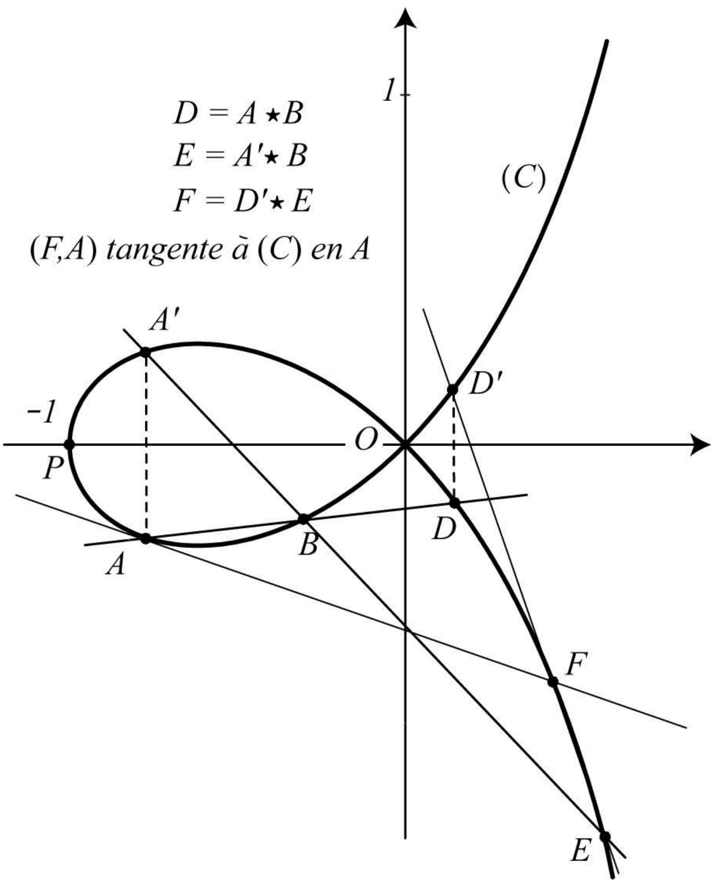
On continue à respecter les contraintes : $A = M(a)$ et $B = M(b)$ différents de O et $P,$ et $a + b \neq 0.$

Alors $D = M\left(-\dfrac{1+ab}{a+b}\right),$ $A' = M(-a)$ donc $E = M\left(\dfrac{1-ab}{a-b}\right)$ et $D' = M\left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right)$

$$\text{donc } F = M\left(-\frac{1 + \left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right)\left(\dfrac{1-ab}{a-b}\right)}{\left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right) + \left(\dfrac{1-ab}{a-b}\right)}\right) = M\left(-\frac{(a^2-b^2) + (1-a^2b^2)}{(1+ab)(a-b) + (1-ab)(a+b)}\right)$$

$$= M\left(-\frac{(1-b^2)(1+a^2)}{2a(1-b^2)}\right) = M\left(-\frac{(1+a^2)}{2a}\right) \text{ donc } \boxed{F = A \star A}$$

$\boxed{\text{La droite } (F,A) \text{ est donc la tangente à } \mathcal{C} \text{ en } A}$ Car la tangente à $\mathcal{C}$ en A coupe la courbe en l'unique point $F.$



Exercice n◦ 3

Etude de séries de fonctions, d'une série de Fourier et d'intégrales à paramètre.

On considère les suites de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $u_n(t) = \dfrac{1}{1+(t+2\pi n)^2}$

et $v_n(t) = \dfrac{1}{1+(t-2\pi n)^2}$. $\boxed{\text{Ces fonctions sont } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}\text{, positives et bornées par 1}}$

Partie A

Question A. 1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum u_n(t)$ est une série de réels positifs et $u_n(t) \sim \dfrac{1}{4\pi^2 n^2}$ terme général d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ donc convergente. Par le thm d'équivalence entre séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n(t) \text{ converge. De même } \sum v_n(t) \text{ converge}}$

Question A. 2. a. Etudions les variations de u_n sur $\mathbb{R}$. On a $u_n'(t) = -\dfrac{2(t+2\pi n)}{\left(1+(t+2\pi n)^2\right)^2}$ qui s'annule en $t = -2\pi n$, D'où le tableau de variations :

t	$-\infty$		$-2\pi n$		∞
u_n'		$+$		$-$	
u_n	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Si on fixe $a > 0$, alors pour $n \geqslant \boxed{N = E\left(\dfrac{a}{2\pi}\right)+1}$, où $E(x)$ est la partie entière de x, on a $-2\pi n < -a$ et ainsi :

$\boxed{|u_n| = u_n \text{ est positive et décroissante sur } [-a,a]}$, donc $\boxed{\sup\limits_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a) < 1}$ pour $n \geqslant N$.

Question A. 2. b. La convergence simple de $\sum u_n(-a)$ assure donc la $\boxed{\text{convergence normale sur } [-a,a] \text{ de } \sum u_n}$

Pour $n \geqslant N$, on a sur $[-a,a]$: $0 \leqslant u_n(t) = \dfrac{1}{1+(t+2\pi n)^2} \leqslant u_n(-a)$ donc $\dfrac{2}{\left(1+(t+2\pi n)^2\right)^2} \leqslant 2u_n(-a)^2$, car la fonction "carré" est croissante sur $[0,\infty[$.

Ainsi $|u_n'(t)| \leqslant 2(a+2\pi n)u_n(-a)^2$ et $\boxed{\sup\limits_{t\in[-a,a]} |u_n'(t)| \leqslant \dfrac{2(a+2\pi n)}{\left(1+(2\pi n-a)^2\right)^2}}$ pour $n \geqslant N$. Le majorant est le terme général d'une série positive équivalente à $\dfrac{1}{\pi n^3}$ et $\sum \dfrac{1}{\pi n^3}$ converge, donc $\sum \sup\limits_{t\in[-a,a]} |u_n'(t)|$ converge.

On a assuré donc la $\boxed{\text{convergence normale sur } [-a,a] \text{ de } \sum u_n'}$. Enfin la convergence normale sur $[-a,a]$ assure la $\boxed{\text{convergence uniforme sur } [-a,a]}$ $\boxed{\text{De même pour } \sum v_n \text{ et } \sum v_n'}$

Question A. 3. a. F est somme de 3 fonctions. $u_0 : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-a,a]$.

Pour $a > 0$, la somme totale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $[-a,a]$, en vertu du thm de dérivation des séries de fonctions de classe C^1, sous convergence simple de $\sum u_n$ et de convergence uniforme de $\sum u_n'$ sur $[-a,a]$

Et on peut dériver terme à terme. De même pour $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [-a,a] \text{ pour tout } a > 0 \text{ fixé}}$

Puisque F est C^1 sur $[-a,a]$ pour tout $a > 0$ fixé, elle est C^1 au voisinage de tout $x \in \mathbb{R}$, qu'on peut mettre à l'intérieur d'un $[-a,a]$ pour a fixé, assez grand. Donc $\boxed{F \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Question A. 3. b. F est somme de 3 fonctions. $u_0 : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est paire et $u_n(-t) = v_n(t)$ sur $\mathbb{R}$ donc $F(-t) = F(t)$ sur $\mathbb{R}$, et $\boxed{F \text{ est paire sur } \mathbb{R}}$

Question A. 3. c. Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $F(t+2\pi) = u_0(t+2\pi) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t+2\pi) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(t+2\pi)$

Or $u_0(t+2\pi) = u_1(t)$, $v_1(t+2\pi) = u_0(t)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(t+2\pi) = u_{n+1}(t)$ et $v_{n+1}(t+2\pi) = v_n(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $F(t+2\pi) = u_1(t) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1}(t) + u_0(t) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(t) = F(t)$ sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{F \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$

Partie B

Question B. 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons c_k la fonction $x \mapsto \cos(kx)$. La fonction Fc_k est somme de 3 fonctions C^1 sur $[0,\pi]$ et son intégrale est la somme des 3 intégrales. Pour $\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$, on cherche à assurer l'interversion des symboles $\sum$ et $\int$, en assurant un thm d'intégration terme à terme.

Les fonctions $u_n c_k$ sont continues (d'ailleurs C^∞) sur $[0,\pi]$. Puisque $\sup_{t\in[-\pi,\pi]} |u_n(t)| = u_n(-\pi)$ pour $n \geqslant 1$ alors $\sup_{t\in[-\pi,\pi]} |u_n(t)\cos(kt)| \leqslant u_n(-\pi)$ et la série de fonctions $\sum u_n c_k$ converge donc normalement, donc uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$ donc sur le segment $[0,\pi]$.

Le **thm d'intégration terme à terme sous convergence uniforme sur segment** s'applique donc et assure que : $\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi u_n(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$ et de même pour la série de fonctions $\sum v_n c_k$.

Ainsi $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\quad \int_0^\pi F(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+t^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+(t+2\pi n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+(t-2\pi n)^2}}$

Puisque F est (mieux que) continue par morceaux et 2π-périodique, elle admet des coefficients de Fourier.

Puisqu'elle est **paire**, ses coefficients en sinus sont tous nuls : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ b_k(F) = 0}$ Et ses coefficients de Fourier en cosinus valent $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_k(F) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t}$

On pourrait être tenté de calculer ces a_k, mais l'énoncé des questions suivantes montre que c'est prématuré.

Question B. 2. Puisque F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, le **thm de Dirichlet** s'applique (il s'applique dès que la fonction est C^1 par morceaux) et il assure même la convergence uniforme (si la fonction est de plus continue) de la série de Fourier de F vers F. Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\quad F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt)}$ avec la question précédente.

Question B. 3. a. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons g_α la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}$.

Elle est continue et positive sur $[0,\infty[$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R},\quad \forall x \in [0,\infty[,\quad |g_\alpha(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$.

Notons $\varphi_0 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Elle est continue, positive sur $[0,\infty[$ et intégrable sur $[1,\infty[$, car $\varphi_0(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ fonction de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Par le thm de majoration, $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\quad \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha s)\,\mathrm{d}s}{1+s^2} \text{ converge}}$

Question B. 3. a. Effectuons les changements de variable C^1-difféomorphe entre segments dans les 2 intégrales :

$$\begin{pmatrix} s = t + 2n\pi \\ t \in [0,\pi] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = s - 2n\pi \\ s \in [2n\pi,(2n+1)\pi] \end{pmatrix} \text{ alors } \int_0^\pi \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+(t+2\pi n)^2} = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\cos(ks)\,\mathrm{d}s}{1+s^2}.$$

$$\begin{pmatrix} r = 2n\pi - t \\ t \in [0,\pi] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 2n\pi - r \\ r \in [(2n-1)\pi,2n\pi] \end{pmatrix} \text{ alors } \int_0^\pi \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+(t-2\pi n)^2} = \int_{(2n-1\pi}^{2n\pi} \frac{\cos(kr)\,\mathrm{d}r}{1+r^2}$$

Considérons alors, pour $N \in \mathbb{N}^*$: $S_N = \int_0^\pi \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+t^2} + \sum_{n=1}^{N}\int_0^\pi \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+(t+2\pi n)^2} + \sum_{n=1}^{N}\int_0^\pi \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+(t-2\pi n)^2}$

$$S_N = \int_0^\pi \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+t^2} + \sum_{n=1}^{N}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\cos(ks)\,\mathrm{d}s}{1+s^2} + \sum_{n=1}^{N}\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\cos(ks)\,\mathrm{d}s}{1+s^2} = \int_0^{(2N+1)\pi} \frac{\cos(kt)\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

avec la règle de Chasles, sur les segments successifs. Quand $N \to \infty$, la convergence de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est assurée vers a_k et celle de l'intégrale est assurée vers $\int_0^\infty \dfrac{\cos(\alpha s)\,\mathrm{d}s}{1+s^2}$.

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(ks)\,\mathrm{d}s}{1+s^2}}$

Partie C

Question C. 1. On a montré en **B. 3. a.** que $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xs)\,\mathrm{d}s}{1+s^2}$ converge.

La fonction ϕ est définie sur $\mathbb{R}$ et **paire**. La fonction $(x,s) \mapsto \dfrac{\cos(xs)}{1+s^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc continue sur $[0,\infty[$ par rapport à s, à x fixé dans $[0,\infty[$, et continue sur $[0,\infty[$ par rapport à x, à s fixé dans $[0,\infty[$.
De plus il existe $\varphi_0\ :\ s \mapsto \dfrac{1}{1+s^2}$, . continue, positive sur $[0,\infty[$ et intégrable sur $[1,\infty[$, car $\varphi_0(s) \sim \dfrac{1}{s^2}$ quand $s \to \infty$, telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall s \in [0,\infty[,\ \ \left|\dfrac{\cos(xs)}{1+s^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+s^2} = \varphi_0(s)$.
Ce qui assure les hypothèses du **thm de continuité des intégrales à paramètre sous domination**,

donc la $\boxed{\text{continuité de } \phi \text{ sur } [0,\infty[, \text{ et que } \forall x \in \mathbb{R},\ |\phi(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \phi \text{ bornée}}$

avec $\arctan(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}s}{1+x^2}$. Enfin $\boxed{\phi(0) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}}$

Question C. 2. a. Pour $x > 0$, le changement de variable $\left(\begin{array}{l} t = xs \\ s \in\ ]0,\infty[\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} s = \frac{1}{x}\,t \\ t \in\ ]0,\infty[\end{array}\right)$ qui est C^1-difféomorphe entre ces intervalles, conserve la convergence des intégrales et leur valeur.

Donc $\boxed{\forall x > 0,\ \ \phi(x) = x\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{x^2+t^2}}$ avec $\mathrm{d}s = \dfrac{\mathrm{d}t}{x}$.

Question C. 2. b. Considérons $h\ :\ (x,t) \mapsto \dfrac{\cos(t)}{x^2+t^2}$ de classe C^∞ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ (comme quotient à dénominateur non nul de fonctions à 2 variables C^∞ sur $\mathbb{R}^2$). On sait donc qu'elle est continue par rapport à t sur $[0,\infty[$,

à $x > 0$ fixé et dérivable par rapport à $x \in\ ]0,\infty[$ à t fixé, avec $\boxed{\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}}$ continue par rapport à t sur $[0,\infty[$, à $x > 0$ fixé et par rapport à $x \in\ ]0,\infty[$ à t fixé.

Considérons (a,b) fixés tels que $0 < a < b$.
On assure qu'il existe $\varphi_1\ :\ t \mapsto \dfrac{2b}{(a^2+t^2)^2}$, continue, positive sur $[0,\infty[$ et intégrable sur $[1,\infty[$, car $\varphi_1(t) \sim \dfrac{2b}{t^4}$ quand $t \to \infty$, telle que $\forall x \in [a,b]\ \ \forall t \in [0,\infty[,\ \ \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_1(t)$.
Ce qui assure les hypothèses du **thm de dérivation des intégrales à paramètre sous domination**,

donc que $\boxed{x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{x^2+t^2} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,b], \text{ et sa dérivée vaut } -2x\int_0^\infty \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^2}}$

Par produit, ϕ est de classe C^1 sur $[a,b]$, et $\phi'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{x^2+t^2} - 2x\int_0^\infty \frac{t\cos(t)\,\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^2}$.
Le résultat est vrai sur tout $[a,b]$ pour $0 < a < b$, on peut donc l'assurer pour tout $x > 0$, en choisissant $a = \dfrac{x}{2}$, et $b = x+1$, et $\boxed{\phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ \ \phi'(x) = \frac{1}{x}\phi(x) - 2x^2\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^2}}$

Question C. 2. c. En effectuant le changement de variable réciproque de **C. 2. a.**, on montre que :
$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^2} = \frac{x}{x^4}\int_0^\infty \frac{\cos(xs)\,\mathrm{d}s}{(1+s^2)^2}$ donc $\boxed{\forall x > 0,\ \ \phi'(x) = \frac{1}{x}\phi(x) - \frac{2}{x}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xs)\,\mathrm{d}s}{(1+s^2)^2}}$

Question C. 3. a. Considérons $j\ :\ (x,s) \mapsto \dfrac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}$. On vérifie les hypothèses du **thm de dérivation des intégrales à paramètre sous domination**, avec $\dfrac{\partial j}{\partial x}(x,s) = \dfrac{-s\sin(xs)}{(1+s^2)^2}$ et l'existence de la fonction φ_2 continue, positive sur $[0,\infty[$ et intégrable sur $[1,\infty[$, car $\varphi_2(s) \sim \dfrac{1}{s^3}$ quand $s \to \infty$, telle que :

$\boxed{\forall (x,s) \in \mathbb{R}\times[0,\infty[\ \left|\dfrac{\partial j}{\partial x}(x,s)\right| \leqslant \varphi_2(s) = \dfrac{s}{(1+s^2)^2}}$. Ainsi $\boxed{\psi \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \psi'(x) = +2\displaystyle\int_0^\infty \frac{s\sin(xs)\,\mathrm{d}s}{(1+s^2)^2}}$

Considérons un segment $[0,B] \subset [0,\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^B \frac{-s\sin(xs)\,\mathrm{d}s}{(1+s^2)^2}$. On peut effectuer une intégration par partie en posant $\left\{\begin{array}{l} u(s) = \sin(xs) \text{ qui se dérive en } u'(s) = x\cos(xs) \\ v'(s) = \dfrac{-s}{(1+s^2)^2} \text{ et on choisit } v(s) = \dfrac{1}{2(1+s^2)} \end{array}\right.$ où u et v sont C^1 sur $[0,B]$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^B \frac{-s\sin(xs)\,\mathrm{d}s}{(1+s^2)^2} = \left[\frac{\sin(xs)}{2(1+s^2)}\right]_{s=0}^{s=B} - \frac{x}{2}\int_0^B \frac{\cos(xs)\,\mathrm{d}s}{1+s^2}$. Les limites existent quand $B \to \infty$, les deux premières sont nulles et on a donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \psi'(x) = -2\displaystyle\int_0^\infty \frac{-s\sin(xs)\,\mathrm{d}s}{(1+s^2)^2} = x\int_0^\infty \frac{\cos(xs)\,\mathrm{d}s}{1+s^2} = x\phi(x)}$

Question C. 3. b. La fonction ψ est C^1 sur $]0,\infty[$, et $\forall x > 0$, $\phi'(x) = \dfrac{1}{x}\big(\phi(x)+\psi(x)\big)$ donc ϕ' est C^1 ce qui assure que $\boxed{\phi \text{ est } C^2 \text{ sur }]0,\infty[}$ Et $\forall x > 0$,

$$\phi''(x) = \frac{-1}{x^2}\big(\phi(x)+\psi(x)\big) + \frac{1}{x}\big(\phi'(x)+\psi'(x)\big) = \frac{-1}{x^2}\big(\phi(x)+\psi(x)\big) + \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}\big(\phi(x)+\psi(x)\big) + x\phi(x)\Big)$$

Ainsi $\boxed{\forall x > 0,\ \phi''(x) = \phi(x)}$

Question C. 4. La fonction ϕ est donc solution sur $]0,\infty[$ de l'EDL2 $y'' = y$ dont l'ensemble des solutions est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$. Donc il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x > 0$, $\phi(x) = A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x}$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Puisque } \phi \text{ est continue sur } [0,\infty[, \text{ on a } A+B = \lim\limits_{x\to 0+}\phi(x) = \phi(0) = \dfrac{\pi}{2}. \\ \text{Puisque } \phi \text{ est bornée sur } [0,\infty[, \text{ alors } A = 0 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\forall x > 0,\ \phi(x) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-x}}$

Question C. 5. Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{2}{\pi}\phi(k) = \mathrm{e}^{-k}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k}\cos(kt)$

D'où $F(t) = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^{-ikt}\right) = -\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(1+it)}}\right)$ car c'est la somme de $\sum \mathrm{e}^{-(1+it)k}$ série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-(1+it)}$ de module $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$. Et $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}(\cos t - i\sin t)} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}(\cos t + i\sin t)}{(1-\mathrm{e}^{-1}\cos t)^2 + (\mathrm{e}^{-1}\sin t)^2}$

D'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}\cos t}{1+\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-1}\cos t} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2(1+\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-1}\cos t)}}$
