

Exercice I

1°. — Soit $R \in E$, alors $x \mapsto R(x)e^{-x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et que $R(x)e^{-x} = \mathbf{0} \left(\frac{1}{x^2} \right)$ au voisinage de $+\infty$, donc $x \mapsto R(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien définie.

— $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique et bilinéaire.

— Si $P \in E$, alors $\langle P | P \rangle = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x} dx \geq 0$

— De plus si $\langle P | P \rangle = 0$, alors $\forall x \in [0, +\infty[; P(x) = 0$, donc P possède une infinité de racines, donc nul

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur E .

2°. $\|1\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ Soit $P_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1$, et $P_2 = \frac{X - \langle X | P_1 \rangle P_1}{\|X - \langle X | P_1 \rangle P_1\|} = \frac{X - 1}{\|X - 1\|}$.

$$\|X - 1\|^2 = \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2 - 2 + 1 = 1$$

Alors $(P_1, P_2 = X - 1)$ est 1 BON de $F = \mathbb{R}_1[X]$, par conséquent

$$P_F(X^2) = \langle X^2 | P_1 \rangle P_1 + \langle X^2 | P_2 \rangle P_2 = 2 + 4(X - 1) = 4X - 2$$

3°. On a : $X^2 - p_F(X^2) \perp p_F(X^2)$ donc $\|X^2 - p_F(X^2)\|^2 + \|p_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2$ (th de pythagore).

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - (aX + b)\|^2 = d^2(X^2, F) = \|X^2 - p_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|p_F(X^2)\|^2 = 4! - \langle 4X - 2 | 4X - 2 \rangle = 4! - 20 = 4$$

Exercice II

4°. Si : $m > n$, alors :

$$\begin{aligned} P(Z = m \cap T = n) &= P(X = m \cap Y = n) + P(Y = m \cap X = n) \\ &= P(X = m)P(Y = n) + P(Y = m)P(X = n), \quad \text{par l'indépendance de } X, Y \\ &= pq^m pq^n + pq^m pq^n \\ &= 2p^2 q^{m+n} : \end{aligned}$$

Si : $m < n$, alors $P(Z = m \cap T = n) = \mathbf{0}$: car $Z \geq T$

Si $m = n$, alors $P(Z = n \cap T = n) = P(X = n)P(Y = n) = p^2 q^{2n}$

5°. $(T = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, par application de la formule des probabilités totale :

Si $m \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} P(Z = m) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Z = m \cap T = n) \\ &= \sum_{n=0}^m P(Z = m \cap T = n) + \sum_{n=m+1}^{+\infty} P(Z = m \cap T = n) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2 q^{m+n} + p^2 q^{2m} \\ &= 2p^2 q^m \frac{1 - q^m}{1 - q} + p^2 q^{2m} \\ &= 2pq^m (1 - q^m) + p^2 q^{2m} \end{aligned}$$

Si $m = 0$, alors : $P(Z = 0) = P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = p^2$.

Donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $P(Z = m) = 2pq^m(1 - q^m) + p^2q^{2m}$.

Remarque :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} P(Z = m) &= \sum_{m=0}^{+\infty} [2pq^m(1 - q^m) + p^2q^{2m}] \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} 2pq^m - \sum_{m=0}^{+\infty} 2pq^{2m} + \sum_{m=0}^{+\infty} p^2q^{2m} \\ &= \frac{2p}{1 - q} - \frac{2p}{1 - q^2} + \frac{p^2}{1 - q^2} \\ &= 2 - \frac{2}{1 + q} + \frac{p}{1 + q} \\ &= \frac{2 + 2q - 2 + p}{1 + q} \\ &= \frac{q + p + q}{1 + q} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Problème

Partie I

6°. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

$$\begin{aligned} \Pi_1 \cdot \Pi_2 &= \mathbf{0}; \quad \Pi_1 + 5\Pi_2 = A; \quad \Pi_1 + \Pi_2 = I_2 \\ \Pi_1^2 &= \Pi_1; \quad \Pi_2^2 = \Pi_2. \end{aligned}$$

Remarque : $\forall q \in \mathbb{N}$; $A^q = \Pi_1 + 5^q\Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^q + 1 & 5^q - 1 \\ 5^q - 1 & 5^q + 1 \end{pmatrix}$.

7°.

$Q(u) \circ P(u) = (PQ)(u)$, Soit $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } P(u) &\implies P(u)(x) = \mathbf{0} \\ &\implies Q(u) \circ P(u)(u) = \mathbf{0} \\ &\implies (PQ)(u)(x) = \mathbf{0} \\ &\implies x \in \text{ker}(PQ)(u). \end{aligned}$$

Donc $\text{ker } P(u) \subset \text{ker}(PQ)(u)$ De même $\text{Ker } Q(u) \subset \text{ker}(PQ)(u)$.

Donc $\text{Ker } P(u) + \text{ker } Q(u) \subset \text{ker}(PQ)(u)$.

$$P \wedge Q = 1 \implies \exists U, V \in \mathbb{C}[X]/U \cdot P + V \cdot Q = 1$$

alors $\forall x \in E, x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x) = y + z$

Si $x \in \text{Ker}(PQ)(u)$ alors $y \in \text{Ker } Q(u)$ et $z \in \text{Ker } P(u)$ donc $\text{Ker}(PQ)(u) \subset \text{Ker } P(u) + \text{Ker } Q(u)$.

Par conséquent $\text{Ker}(PQ)(u) = \text{Ker } P(u) + \text{Ker } Q(u)$.

de plus si $x \in \text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u)$, alors $x = \mathbf{0}$ d'après l'égalité encadré précédente :

donc $\text{Ker}(PQ)(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$

8°. $\Pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}, Q_1 = P_2^{k_2}; Q_2 = P_1^{k_1}$

$$P_1 \wedge P_2 = 1 \implies P_1^{k_1} \wedge P_2^{k_2} = 1$$

Donc $Q_1 \wedge Q_2 = 1$

$$\exists R_1, R_2 \in \mathbb{C}[X]/R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1.$$

9°. $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ supposons que : $i \neq j$, alors

$$p_i \circ p_j = (R_i R_j)(u) \circ (Q_i \cdot Q_j)(u)$$

or $(Q_i Q_j) = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}} \cdot \frac{\pi_u}{P_j^{k_j}} = \pi_u \cdot \frac{\pi_u}{P_i^{k_i} P_j^{k_j}} = \pi_u \cdot \prod_{\substack{\ell \neq i \\ \ell \neq j}} P_\ell^{K_\ell}$ donc $(Q_i Q_j)(u) = 0$, alors $p_i \circ p_j = 0$.

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m p_i &= \sum_{i=1}^m (R_i Q_i)(u) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m R_i Q_i \right)(u) \\ &= 1(u) \\ &= i d_E \end{aligned}$$

pour j fixé :

$$\begin{aligned} p_j &= p_j \circ i d_E \\ &= p_j \circ \sum_{i=1}^m p_i \\ &= \sum_{i=1}^m p_j \circ p_i \\ &= p_j^2 \end{aligned}$$

donc p_j est 1 projecteur :

10°. les λ_i sont $\neq 2$ à 2 , alors les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux 2 à 2, par application du lemme des noyaux et de Cayley-Hamilton.

$$\begin{aligned} \bigoplus_{1 \leq i \leq m} N_i &= \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \text{Ker}(u - \lambda_i i d_E)^{\alpha_i} \\ &= \text{Ker} \prod_{i=1}^m (u - \lambda_i i d_E)^{\alpha_i} \\ &= \text{Ker} X_u(u) \\ &= \text{Ker} \theta \\ &= E \end{aligned}$$

11°. Soit $x \in E$ d'après Q9; $x = \sum_{i=1}^m p_i(x)$ donc $E \subset \sum_{i=1}^m \text{Im} p_i$, alors l'égalité, et si $y_i \in \text{Im}(p_i) =$

$$\text{ker}(p_i - i d_E) / \sum_{i=1}^m y_i = 0 \text{ alors } y_i = p_i(y_i).$$

$$\text{Soit } j \text{ fixé, alors } 0 = \sum_{i=1}^m p_j \circ p_i(y_i) = p_j(y_j) = y_j$$

$$\text{Donc } E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(p_i).$$

12°. Pour i fixé et $y_i \in \text{Im}(p_i)$ donc $y_i = p_i(y_i)$ alors $y_i = (Q_i R_i)(u)$, par conséquent

$$\begin{aligned} (u - \lambda_i i d)^{\alpha_i}(y_i) &= (P_i^{\alpha_i} Q_i R_i)(u) \\ &= (\pi_u \cdot R_i)(u) \\ &= \pi_u(u) \circ R_i(u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $y_i \in \text{Ker}(u - \lambda_i i d)^{\alpha_i} = N_i$.

Donc

$$\text{Im}(p_i) \subset N_i$$

Si $\exists i \quad \text{Im}(p_i) \subsetneq N_i$, alors $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \text{Im}(p_i) \subsetneq \bigoplus_{1 \leq i \leq m} N_i = E$, absurde
donc $\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \text{Im } p_i = N_i$

Partie II

13°. Π_u est simplement scindé car u est diagonalisable, donc

$$\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i).$$

14°. Posons $\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{x - \lambda_i}$, on a $b_i = \left(\frac{X - \lambda_i}{\pi_u} \right) (\lambda_i) = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)} = \theta_i$

donc $\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$; donc $1 = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{\pi_u}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^m \theta_i Q_i$, d'après la définition de p_i on a

$$p_i = \theta_i Q_i(u). \text{ Alors } p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}.$$

15°. On pose $\frac{X}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{X - \lambda_i}$ avec $c_i = \left(\frac{X(X - \lambda_i)}{\pi_u} \right) (\lambda_i) = \left(\frac{X}{Q_i(X)} \right) (\lambda_i) = \frac{\lambda_i}{Q_i(\lambda_i)}$.

$$\text{Donc } X = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(X).$$

$$\text{Alors } u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i.$$

16°. a/ A est symétrique réelle donc diagonalisable et $A^2 = 4I_4$ (Calcul).

b/ $X - 2$ et $X + 2$ ne sont pas des annulateurs de A donc $\pi_A = X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$.

$\text{Sp}(A) = \{2, -2\}$: On prend $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -2$.

Alors $A = 2\Pi_1 + (-2)\Pi_2$: avec $\Pi_1 = \frac{A + 2I_4}{4}, \Pi_2 = \frac{A - 2I_4}{-4}$ car $Q_1 = \frac{\Pi_A}{X - 2} = X + 2; \quad Q_2 = \frac{\Pi_A}{X + 2} = X - 2$.

$$\text{Alors } \Pi_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_2 = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c/ Alors $\forall q \in \mathbb{N} : A^q = 2^q \Pi_1 + (-2)^q \Pi_2$ par récurrence car $\Pi_1 \cdot \Pi_2 = \Pi_2 \cdot \Pi_1 = 0$.

17°. Soit $d = d^0 \pi_v$: Montrons que $\mathbb{C}[v] = \text{vect}(id, v, \dots, v^{d-1})$. On a $\text{vect}(id, v, \dots, v^{d-1}) \subset \mathbb{C}[v]$.

soit $P \in \mathbb{C}[X] \quad \exists Q, R \in \mathbb{C}[X] \mid P = \pi_v \cdot Q + R$ avec $d^0 R < d^0 \pi_v = d$ alors $P(v) = \pi_v(v) \circ Q(v) + R(v) = R(v)$.

donc $P(v) \in \text{vect}(id, v, \dots, v^{d-1})$. Donc $\mathbb{C}[v] = \text{vect}(id, v, \dots, v^{d-1})$.

Par l'absurde si $\exists \alpha_0, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{C}$ non tous nuls tel que $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i v^i = 0$ alors le polynôme $L =$

$\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i X^i$ est annulateur de v et $L \neq 0$ et $d^0 L < d = d^0 \pi_v$ ce qui est absurde avec la définition de π_v .

donc (id, v, \dots, v^{d-1}) est libre, donc base de $\mathbb{C}[v]$ alors $\dim \mathbb{C}[v] = d = d^0 \Pi_v$.

18°. Supposons que $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$: On a : $p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} \in \mathbb{C}[u]$:

Donc $\text{vect}(p_1, \dots, p_m) \subset \mathbb{C}[u]$: et $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$: $id = \sum_{i=1}^m p_i$, alors par les questions (Q9 +

Q15) et par récurrence $\forall q \in \mathbb{N} \quad u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q p_i \in \text{vect}(p_1, \dots, p_m)$.

donc $C[u] = \text{vect}(p_1, \dots, p_m)$: et si $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C} \mid \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i = 0$.

Alors pour j fixé $\sum_{n=1}^m \alpha_i p_j \circ p_i = 0$: donc $\alpha_j p_j = 0$ donc $\alpha_j = 0$ car $p_j \neq 0$. Donc (p_1, \dots, p_m) base de $\mathbb{C}[u]$.

19°. Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: $B^2 = 0$; $B \neq 0$, B est donc non diagonalisable, soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad Sp(A) = \{0, 1\}$$

Car $\chi_A = \chi_B \cdot (X - 1) = X^2(X - 1)$; et $A(A - I_3) \neq 0$, alors $\Pi_A = X^2(X - 1)$: donc A est non diagonalisable : $d^0 \Pi_A = 3$: mais ici on a seulement deux projecteurs associés à A qu'on note Π_1 et Π_2 .

d'après Q17 : $\dim \mathbb{C}[A] = d^0 \pi_A = 3$. Mais $\dim \text{vect}(\Pi_1, \Pi_2) \leq 2$: donc (Π_1, Π_2) n'est pas une base de $\mathbb{C}[A]$:

20°. Supposons que $\forall q \in \mathbb{N}$: $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$ soit $P = \sum_{q=0}^N a_q X^q$; N fixé dans \mathbb{N} : alors :

$$P(u) = \sum_{q=0}^N a_q u^q = \sum_{q=0}^N a_q \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$$

Donc

$$P(u) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{q=0}^N a_q \lambda_i^q \right) f_i = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) f_i$$

Alors :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(u) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) f_i$$

Si on prend $P = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ qui est scindé à racines simples, de plus d'après l'égalité précédente $P(u) = 0$; donc u est diagonalisable.

Pour vos remarques

sadikoulmeki@yahoo.fr

Exercice I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$. Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

- 1°. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P, Q) de polynômes de E , $\langle P|Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
- 2°. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $P_F(X^2)$.
- 3°. Justifier que $\|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$ puis calculer le réel

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx$$

Exercice II

Soit $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X, Y)$ et $T = \inf(X, Y)$.

- 4°. Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$ en distinguant trois cas : $m > n$, $m < n$ et $m = n$.
- 5°. En déduire la loi de la variable aléatoire Z .

PROBLÈME

Dans ce problème, E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

6°. Un exemple

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteur puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

- 7°. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux : Si P_1, P_2, \dots, P_r sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T , si u est un endomorphisme de E alors :

$$\mathbf{Ker}[T(u)] = \mathbf{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathbf{Ker}(P_2(u)) \oplus \dots \oplus \mathbf{Ker}(P_r(u))$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soit P et Q deux polynômes premiers entre eux.

Justifier que $\mathbf{Ker}(P(u)) \subset \mathbf{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\mathbf{Ker}(Q(u)) \subset \mathbf{Ker}[(PQ)(u)]$).

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

- 8°. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal. On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.

Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \dots + R_m Q_m = 1$

- 9°. On pose alors pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = R_j(u)$, $Q_i(u)$. Démontrer que pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \dots, m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E .

Les p_i seront appelés projecteurs associés à u .

- 10°. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique : $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_j id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_j . Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$.

- 11°. Démontrer que $E = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_m$.

- 12°. Démontrer que pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\text{Im } p_i = N_j$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

- 13°. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

- 14°. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}$

Donner, sans détails, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\pi_u}$ puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

- 15°. Démontrer que $X = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

- 16°. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a/ Justifier que la matrice A est diagonalisable et calculer la matrice A^2 .

b/ En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A .

On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

c/ Calculer, pour tout entier naturel q , A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2 .

17°. On note $\mathbb{C}[\nu]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme ν d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[\nu]$ est égal au degré du polynôme minimal π_ν de l'endomorphisme ν .

18°. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$.

Démontrer que la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$

19°. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

20°. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E , tels que pour tout entier q on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q p_i$.

Nous allons étudier une « réciproque ».

Soit u un endomorphisme de E, \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$.

Démontrer que u est diagonalisable.

FIN