SESSION 1998

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Le problème étudie la minimisation d'une fonctionnelle sur un espace de fonctions vérifiant $y(0) = 0$ et $y(1) = c$. La première partie consiste à démontrer un lemme qui sera utilisé dans la deuxième partie. Les troisième et quatrième parties traitent de cas particuliers.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, le déplacement d'un point mobile M est soumis h la contrainte suivante : lorsque le point occupe la position (x, y), sa vitesse algébrique a pour valeur imposée $v(x, y)$, où v est une fonction donnée des 2 variables réelles x et y. Le temps mis par M pour parcourir un arc Γ de classe $\mathcal{C}^1$, d'origine O, d'extrémité A de coordonnées (ℓ, c) et d'équation $y = \varphi(x)$ a donc pour valeur :

$$T = \int_\Gamma \frac{d\sigma}{v(x,y)} = \int_0^\ell \frac{\sqrt{1+\varphi'^2(x)}}{v(x,\varphi(x))}\,\mathrm{d}x$$

Partie I

I désigne l'intervalle $[0, 1]$ et $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, muni de la norme de la convergence uniforme sur I.

1°) Montrer que l'ensemble $\Gamma^1(I)$ des fonctions $u \in \mathcal{C}^1(I)$ telles que $u(0) = u(1) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$ fermé (c'est à dire tel que la limite f de toute suite f_n d'éléments de $\Gamma^1(I)$, convergente dans $\mathcal{C}^1(I)$, appartient à $\Gamma^1(I)$).

2°) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$ et h la fonction définie sur I par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, a[\quad h(x) = 0 \\ \forall x \in [a, b] \quad h(x) = (x-a)^2(b-x)^2 \\ \forall x \in]b, 1] \quad h(x) = 0 \end{cases}$$

Vérifier que $h \in \Gamma^1(I)$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.

3°) Dans ce qui suit, g désigne une fonction réelle définie et continue sur I. Montrer que l'application G de $\Gamma^1(I)$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$G : u \longmapsto G(u) = \int_0^1 g(x)u(x)\,\mathrm{d}x$$

est linéaire et continue sur $\Gamma^1(I)$.

4°) Montrer que, s'il existe $x_0 \in I$ tel que la fonction g vérifie l'inégalité $g(x_0) > 0$, il existe un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ inclus dans I et un nombre $\alpha > 0$ tels que l'on ait : $\forall x \in [a, b] g(x) \geqslant \alpha$. En déduire alors que, pour que l'on ait $\forall u \in \Gamma^1(I)\ G_1(u) = 0$ il faut et il suffit que g soit la fonction nulle.

5°) G_1 est la forme linéaire sur $\Gamma^1(I)$ définie par :

$$\forall u \in \Gamma^1(I) \qquad G_1(u) = \int_0^1 g(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit $g \in \mathcal{C}^1(I)$, montrer que $\forall u \in \Gamma^1(I)\ G_1(u) = 0$ si et seulement si g est constante sur I.

6°) On suppose dans cette question que g est uniquement continue sur I. Quelle valeur faut-il donner à la constante réelle μ pour qu'il existe une fonction $u_\mu \in \Gamma^1(I)$, dont la dérivée u'_μ est la fonction $x \longmapsto g(x) - \mu$? Vérifier que, pour cette valeur de μ, on a :

$$G_1(u_\mu) = \int_0^1 (u'_\mu(x))^2\,\mathrm{d}x$$

En déduire que $\forall u \in \Gamma^1(I)\ G_1(u) = 0$ si et seulement si la fonction g est constante sur I.

Partie II

1°) c étant un réel positif ou nul donné, $\Gamma^1_c(I)$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{C}^1(I)$ dont les éléments sont les fonctions y telles que $y(0) = 0$ et $y(1) = c$. Que peut-on dire de la différence $y_2 - y_1$ de deux éléments y_1 et y_2 de $\Gamma^1_c(I)$?

2°) $f : (x, t) \longmapsto f(x, t)$ désignant une fonction réelle donnée, définie sur $\Delta = Ix\mathbb{R}$, continue, ayant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ continue sur Δ, on considère l'application :

$$F : Y \longmapsto F(Y) = \int_0^1 f(x, Y'(x))\,\mathrm{d}x \text{ de } \Gamma^1_c(I) \text{ dans } \mathbb{R}\,.$$

Prouver que si y correspond à un minimum local de F, alors, pour toute fonction $u \in \Gamma^1(I)$ non nulle, l'application :

$$G_u : \theta \longmapsto G_u(\theta) = \int_0^1 f(x, y'(x) + \theta u'(x))\,\mathrm{d}x$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ présente un minimum local pour $\theta = 0$.

3°) Soient u et y deux éléments respectivement de $\Gamma^1(I)$ et $\Gamma^1_c(I)$; vérifier que G_u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donner l'expression de $G'_u(\theta)$ sous forme d'intégrale et déterminer $G'_u(0)$.
4°) Déduire alors de ce qui précède qu'une condition nécessaire pour que la fonction $y \in \Gamma^1_c(I)$ corresponde à un minimum local de F est l'existence d'un réel λ tel que y soit solution sur I de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y') = \lambda \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I \ \frac{\partial f}{\partial t}(x, y'(x)) = \lambda \, .$$

Partie III

1°) $\alpha : x \longmapsto \alpha(x)$ étant une fonction définie sur I, continue et croissante, telle que $\alpha(0) > 0$, déterminer l'ensemble L des réels $\lambda \geqslant 0$ pour lesquels l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) \qquad \alpha(x)\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \lambda$$

admet des solutions appartenant à $\mathcal{C}^1(I)$. Pour tout $\lambda \in L$, exprimer sous forme d'intégrale la solution particulière $y_\lambda \in \mathcal{C}^1(I)$ de (E_λ) telle que $y_\lambda(0) = 0$.
2°) Soit la fonction k définie sur L par :

$$k(\lambda) = \int_0^1 \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha(x)^2 - \lambda^2}} \, \mathrm{d}x \, .$$

a) Montrer que k est continue, dérivable et injective sur L.
b) On suppose désormais qu'il existe un réel strictement positif β tel que $\alpha(x) - \alpha(0) \geqslant \beta x$ pour tout x de I. Montrer que k est bornée et en déduire que k possède une limite finie K lorsque λ tend vers $a(0)$.
3°) À quelle condition doit satisfaire le nombre $c \geqslant 0$ pour qu'il existe une valeur de λ pour laquelle (E_λ) admette une solution y appartenant à $\Gamma^1_c(I)$? Cette condition étant supposée remplie, montrer que la valeur de λ est unique ; on la désignera par $\lambda(c)$. Vérifier alors que la seule solution de $(E_{\lambda(c)})$ qui appartienne à $\Gamma^1_c(I)$ est $y_{\lambda(c)}$.

Partie IV

Les notations étant celles de la partie II, on s'intéresse désormais à l'étude des minima locaux stricts de l'application :

$$F : Y \longmapsto F(Y) = \int_0^1 f(x, Y'(x)) \, \mathrm{d}x$$

de $\Gamma^1_c(I)$ dans R, dans le cas particulier où la fonction f est définie sur $\Delta = I \times \mathbb{R}$ par $f(x,t) = \alpha(x)\sqrt{1+t^2}$, α étant la fonction introduite au III.
1°) Étudier, pour tout triplet (x, t, s) de $\Delta \times \mathbb{R}$ le signe de :

$$\varphi(x,t,s) = f(x, t+s) - f(x,t) - s\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \, .$$

2°) Montrer que si la fonction $y \in \Gamma^1_c(I)$ correspond à un minimum local strict parmi les fonctions de $\Gamma^1_c(I)$ de l'application F, elle est nécessairement égale à la fonction $y_{\lambda(c)}$ définie dans la partie III.
3°) Réciproquement, on se propose de montrer que cette fonction $y = y_{\lambda(c)}$ correspond non seulement à un minimum local strict de F, mais au minimum strict absolu. Déduire ce résultat de l'étude du signe de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x, y'(x), u'(x)) \, \mathrm{d}x$ où φ est la fonction définie à la question IV.1 et $u \in \Gamma^1(I)$.
4°) Ce qui suit est une application au cas particulier où la fonction α est telle que $\forall x \in I \ \alpha(x) = 1 + x$. Déterminer L défini au III. 1. Vérifier que,

$$\forall \lambda \in L, \, \forall x \in y_\lambda(x) = \lambda \ln \frac{1 + x + \sqrt{(1+x)^2 - \lambda^2}}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}} \, .$$

5°) Dans le cas où $\ell = 1$, pour quelles fonctions $v(x, y)$ sait-on montrer, en utilisant la partie IV, qu'il existe un arc joignant le point origine O et le point particulier A de coordonnées $(1, c)$ pour lequel le temps de parcours est minimum ? Cet arc est-il unique ?